数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 86-93

AHP における C.I.と評点化過程

愛知学院大学経営学部　田中浩光（Hiromitsu Tanaka）
Faculty of Management
Aichi-Gakuin University

1．はじめに

サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)は、AHP（Analytic Hierarchy Process）方式において、一対比較値行列の信頼性を点検する代表的な基準である。C.I.の有用性については、数値実験を含む多くの検討がなされてきている(Saaty(1980)、仁科・柴山(1992)、小澤（2004）など)。しかし、C.I.値と信頼性を損なう原因の関係・関連を結びつける明確な解釈は得られていない。評点化に及ぼす諸要因の影響が強いことを受けて、一対比較値の生成過程を誤差モデルで説明することを考える場合、固有値解法による重みの推定値と（真の）重みの偏差を評価基準として採用するとき、C.I.は、必ずしも有効な指標でないことが人工的な数値例を通して示唆される(田中(2007a),田中(2007b),田中(2008a),田中(2008b),田中(2009a),田中(2009b)など)。

本稿では、一対比較の対象項目数 n を 3 に限定するときの C.I.値の振舞いを、評点化過程に着目して調べる。これらの考察・吟味を通して得られる知見に基づいて、C.I.の点検の結果が望ましくないときの一対比較値の調整方式を提示する。評価基準として偏差平方和を採用するとき、C.I.=0 の完全整合性（サーティの意味で）を有する評点の組に基づき、固有値解法で得られる重みの推定値を(真の)重みの候補として代用することに注意が要る。

2. 一対比較での評点化過程と重要度の導入

比較対象の n 項目に対する一対比較では、下記の手順(1)、(2)を通して、一対比較値行列 A を得る。

$A=\{a_{ij}\}$

ここに、$i,j=1,\cdot\cdot\cdot,n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1}=a_{ji},\quad a_{ii}=1 \tag{1}$$

$$\max\{a_{ij},\ a_{ji}\}\in\{1,\cdot\cdot\cdot,9\} \tag{2}$$

評点 a_{ij} は、AHP 方式の縛りである逆数対称化(1)、離散化(2)を受ける。これらの AHP 方式に付随する制約以外にも、評点 a_{ij} には、評点化に際しての評価者による過大・過小見積もり、一対比較の試行に起因するバラツキなど様々な撹乱要因を含む。一対比較値の評点化過程を図 1 に示す(田中(2008a),(2009a),(2009b))。

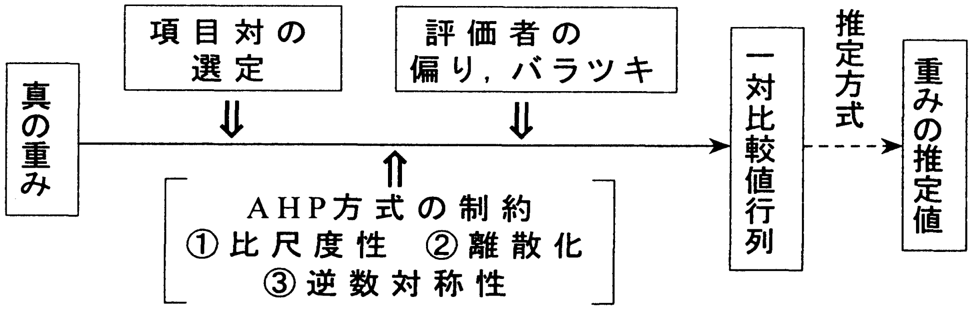

図１．AHPにおける一対比較での評点化過程

３．誤差モデル、固有値解法とサーティの整合性指標 C.I.

本節では、一対比較値の生成について定式化を考える。図１を斟酌して、定式化には、(真の)重みと誤差を組み入れる。重要度(以降、重み)W を変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み{w_i }は、評価者固有の固定値であり、一対比較の実施に対し不変とする。

本稿では、以降、誤差モデルとして下記の式(3)を用いる。

$$a_{ij} = (w_i / w_j) \cdot \varepsilon_{ij} \tag{3}$$

ここに、{ε_{ij} }はAHP方式に付随する制約（離散化など）の調整を含む誤差を表す。

重みの推定は、Saatyの固有値解法で得られるが、通常である。

〔固有値解法〕

$$AU_{max} = \lambda_{max} \cdot U_{max} \tag{4}$$

ここに、λ_{max}：Aの最大固有値、U_{max}：λ_{max}に対応する主固有ベクトル、U_{max} ＝{u_i}。

u_iを第 i 項目の重みとする。固有値法で求められたu_iを重みw_iの推定値と考える。

一対比較値の整合性の点検には、サーティの整合性指標 C.I.(Consistency Index)が用いられる。

$$C.I. = (\lambda_{max} - n) / (n-1) \tag{5}$$

$$= \Sigma (e_{ij\cdot} - 1) / {}_nC_2 \tag{6}$$

ここに、$e_{ij\cdot}$ は相対残差と呼ばれ、ε_{ij}の推定値である。

$$e_{ij\cdot} = a_{ij} / (u_i / u_j)$$

このとき、誤差モデル(3)において、AHP 方式の根幹となる比尺度性とサーティの整合性は次のように書き下すことができる。ここに、$H_{SO} \supseteq H_O$ である（田中(2007b))。

比尺度性　　　　H_O : $a_{ij} = w_i / w_j$

サーティの整合性　H_{SO} : $a_{ij} = a_{ik}\, a_{kj}$

したがって、式(6)でのΣ内の１をH_Oの下での$e_{ij\cdot}$と見なすことで、C.I.は比尺度性からの相対残差 e_{ij} の平均と解釈できる（田中(2007b))。

以下、n＝3 の場合をとりあげて、サーティが経験則として提唱する整合性基準において、C.I.値と評点の関係を整理する.

$$C.I.=（Z^{1/3}+Z^{-1/3}-2）/2$$

ここに、$Z=a_{12}\,a_{23}\;/\,a_{13}$

$Z \geqq 1$ のとき、C.I.は Z について単調増加である。$Z < 1$ のとき、Z について単調減少である。また、$Z \geqq 1$ のとき、C.I.≦0.1 は $Z \leqq 3.78$ と同値であり、C.I.≦0.15 は $Z \leqq 5.07$ と同値である。$Z < 1$ のとき、C.I.≦0.1 は $Z \leqq (3.78)^{-1}$ と同値であり、C.I.≦0.15 は $Z \leqq (5.07)^{-1}$ と同値である。

4．C.I.の挙動

本節では、比較項目の個数 n を 3 に限定し、評点の取りうる全ての組み合わせに基づいて、C.I.の振舞いを吟味・考察する。サーティの整合性基準に照らして、C.I.を考察する。ここに、3 項目を①,②、③と表し, ①→②→③の順序が成立するとする。①→②は評点 a_{12} が 1 を超えることを意味する。以降では, 便宜的に a_{12}、a_{23}、a_{13} の代用として a, b, c を用いる.

(1) 評点の組(a,b,c)の c を固定して, 1～9 まで変化させるときの C.I.値、とくに整合性基準である 0.1 以下と完全整合である 0 を満足する評点の組数を調べる(表 1)。併せて、田中(2007a)で提示された緩和な整合性基準(c > max(a,b))を満たさない組の数を調べる.

(2) (1)と同様で、C.I.値が 0.1 を超えるときの組数を調べる(表 2)。 併せて、田中(2008a)で提示された離散化の影響を示す現象(評点での値域の有界性)を満たす組の数を調べる.

(3) C.I.値と評点の組(a,b,c)の関連を調べる。ここでは、c=9 で、C.I. ≦0.02, 0.02≦C.I. ≦0.1 を満足する場合を表 3、表 4 に示す。

表 1．C.I.≦ α を満足する評点の組(a,b,c)の数

c	α=0.1	α=0 完全整	c<
1	5	1	4
2	16	2	12
3	25	2	16
4	32	3	17
5	39	2	17
6	43	4	13
7	48	2	9
8	52	4	5
9	54	3	0
計	314	23	93

表 2．C.I.＞ α となる評点の組(a,b,c)の数

c	α=0.1	ab/c < 3.78	値域の有界
1	76	0	17
2	65	0	17
3	56	0	15
4	49	1	15
5	42	1	13
6	38	1	13
7	33	1	13
8	29	3	11
9	27	3	24
計	415	10	138

評点の組(a,b,c)の総数は 729 通りである。表 1 から、整合性（C.I.≦0.1）を満たす組の数は 314 組であるが、c＝3,4,5,6 では緩和な整合性基準(c > max(a,b))を満足していない組が、それぞれ 16 組中 12 組、25 組中 16 組、32 組中 17 組、39 組中 17 組の多数出現している。表 2 では、値域の有界性に抵触することが、全ての c 値に多く見られたが、とくに大きい c 値、たとえば c＝9 の場合には 29 組中 24 組に高頻度に出現していることがわかる。

表 3. C.I.値と(a,b,9)
: C.I.≦0.02

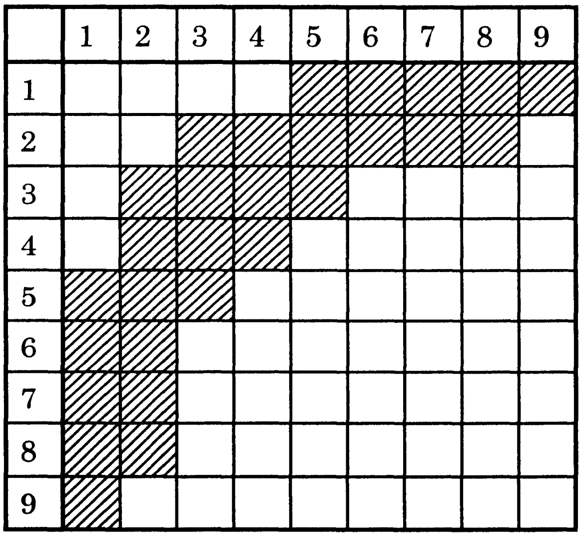

表 4. C.I.値と(a,b,9)
: 0.02≦C.I. ≦0.1

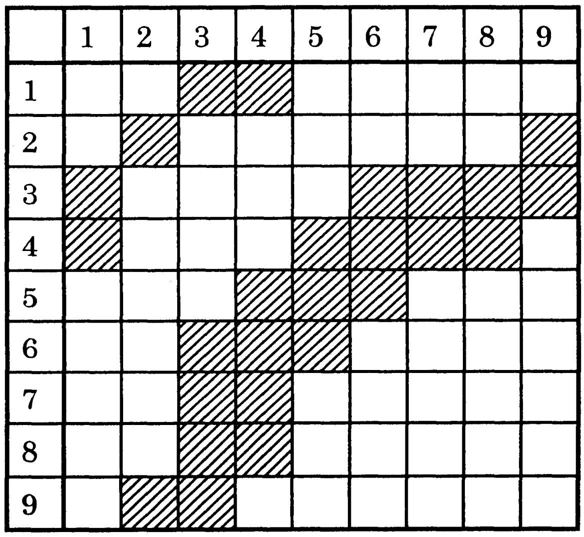

表3、表 4 での斜線部は、それぞれ C.I.≦0.02、0.02≦C.I. ≦0.1 を満たす評点の組を示している。表 3、表 4 からの視察によると、a,b のいずれに対しても大きい値と小さい値をとるとき、C.I. 値が大きくなる傾向がある。表 1 によると、c=9 の場合、81 組中 54 組が C.I. ≦0.1 を満足するが、c の値が小さくなるに従い、C.I. ≦0.1 を満足する組の数は少なくなる。

評点化過程に影響を受けるときの一対比較値の振舞いを下記に列挙する。

(1)比尺度性が真の重みの値（とくに、極小値）に依存しないで成立することは評点付けに混乱を生じることにつながる。

(2)AHP 方式に付随する制約（離散化の影響、とくに評点の最大が 9 であること）の影響を受ける。

(3)項目の組み合わせの間に重みの順序が成立する場合、評点のバラツキは②→③の評点 a_{23} 、①→②の評点 a_{12} 、①→③の評点 a_{13} の順で小さくなると考えられる。

(4)評価者の評点づけのバラツキが極端に大きくないと考えられる。一対比較値行列 A の生成で、真の重みを全く未知として想定するよりも、理想的な評点付けで得られる完全整合となる一対比較値行列の重みの推定値を(真の)重みの候補として考える。

5. 調整の視点

本節では、4 節の諸事項に基づいて、一対比較値を調整することを考える。

(1)4 節の事項(3)にしたがい、評点 a_{13} を最初に固定する。以下、評点 a_{12}、a_{23} の順で変化させる。

(2)4 節の事項(1)にしたがい、最も影響のある評点 a_{23} の変化幅を大きくする。評点 a_{12} の変化幅を小さくする。

(3) 4 節の事項(4)にしたがい、真の重みを複数個の完全整合となる一対比較値行列の重みで代替する。

6．完全整合性の活用

一対比較値の信頼性を点検する方法として、サーティの整合性指標である C.I.が多用されている。本節では、点検方法の評価基準として、一対比較値の生成に誤差モデルを導入することで、母数である(真の)重み{w_i }の推定性能に注目する。従来の C.I.が評点上での整合性（サーティの意味で）を問うものであったが、(真の)重みの水準で評価する、たとえば偏差平方和の最小化基準の方が、誤差モデルを前提にする限りにおいては合理的と考えられる。しかし、(真の)重みは未知であるため、評点上での基準量を作ることできない。本稿では、サーティの整合性指標 C.I.がゼロ（完全整合）となるときの一対比較値行列を固有値解法で推定する重みに着目する。この着想は、一対比較値行列が比尺度性の成立の下で得られとする理想状況では、(真の)重みが完全整合での重み（集合）にあるとする考えに基づいている。また、提示方式の要点の１つである完全整合の組を見出すには、評点の組(a,b,c)が a→b→c の順序を成立するとした上で、評点 c の値が他の a,b に比較して安定していることに着目することで、c の値を評点で固定する。

以下、完全整合となる組(a,b,c)の状況を具体的に把握するために、本節では、 c =9,8 の場合に着目する。表 5、表 6 は、斜線部が C.I.≦0.1 を満足する評点の組である。＊印が（真の）重みの代用となる完全整合のときの推定される重み(v1,v2,v3)である。

表5. 完全整合(C.I.=0)の活用：c=9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									*
2									
3			*						
4									
5									
6									
7									
8									
9	*								

表6. 完全整合(C.I.=0)の活用：c=8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1								*	
2				*					
3									
4		*							
5									
6									
7									
8	*								
9									

完全整合	v1	v2	v3
(1, 1, 9)	0.4737	0.4737	0.0526
(3, 3, 9)	0.6923	0.2308	0.0769
(9, 1, 9)	0.8182	0.0909	0.0909

完全整合	v1	v2	v3
(1, 8, 8)	0.4706	0.4706	0.0588
(2. 4. 8)	0.6154	0.3077	0.0769
(4, 2, 8)	0.7273	0.1818	0.0909
(8, 1, 8)	0.8	0.1	0.1

7．一対比較値の調整方式

C.I が 0.1 以上となる一対比較値行列 A をとりあげて各要素の修正を考える。 ここに、3 項目の一対比較値行列を非巡回有向グラフで考え、始点、終点を①、③とする。③は合流点、②は非合流点である。a,b,c はそれぞれ①→②、②→③、①→③に対応する評点である.一対比較値行列を$\triangle_{abc}$とする。作業手順では、$\triangle_{abc}$として扱う。

(1) c の値として a_{13} を最初に固定する。

(2) a の値として a_{12} −2 で固定する。次いで,(a_{12} −2、a_{12} −1、a_{12}、a_{12} +1 の順に変化させる)

(3) b の値として a_{23} −4 で固定する。次いで、(a_{23} −4、、a_{23} −3、a_{23} −2、a_{23} −1、a_{23}、a_{23} +1 の順に変化させる)

(4) $\triangle_{abc}$において、重みの推定と整合性指標 C.I.を計算する。一番近いと考えられる完全整合である一対比較値行列の重みからの代用偏差平方和を求める。

(5)順次、(3)、(2)を繰り返して、(4)を実行する。

(6)最も小さい代用偏差平方和をとる$\triangle_{abc}$は一対比較値行列 A の調整とする。

ここで、本稿で提案方式の妥当性を得るための筋道を整理する。固有値解法で推定される重み u_i と(真の)重みw_i からの偏差平方和を最小にすることを評価基準に採用するとき、サーティの意味の完全整合となる評点の組から得られる重みに着目する、調整方式について考える。偏差平方和は

$$\begin{aligned}\Sigma(w_i - u_i)^2 &= \Sigma(w_i - v_i + v_i - u_i)^2\\ &= \Sigma(w_i - v_i)^2 + \Sigma(v_i - u_i)^2 + 2\Sigma(w_i - v_i)(v_i - u_i)\end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる。ここに、v_i はサーティの意味の完全整合となる評点の組から生成される一対比較値行列に対し、固有値解法を適用することで得られる重みの推定値である。

偏差平方和を表す式(7)の右辺に注目する。比例尺度性が成立して真の重みで評点付けされている理想状況下では、一対比較値行列は完全整合となり、真の重みは完全整合となる組のいずれかにあると考えることができる。したがって、右辺の第 1 項である$\Sigma(w_i - v_i)^2$はゼロになると見なして良いと考える。右辺の第 3 項である$\Sigma(w_i - v_i)(v_i - u_i)$も、同様にゼロとなると考えられて良い。結局、偏差平方和$\Sigma(w_i - u_i)^2$ の最小化は、右辺の第 2 項である代用偏差平方和$\Sigma(v_i - u_i)^2$を最小化することに近似的に帰着すると考えることができるため、本稿での提示方式の根拠を与えることになる。

8. 数値例

本節では、2 例の数値例をとりあげて、サーティの意味で完全整合となる一対比較値行列から得られる推定値の活用を図る、一対比較値の調整方式が良好に作動しているかを吟味する。6 節にしたがい、7 節で提示されている調整方式で、一対比較値を調整する。本稿での提示方式の対照は、相対残差による調整である。評点化過程が一対比較値の生成に影響を与えている(田中(2008b))。本節では,値域の有界性(c=9)と対の重みが極小の 2 つの場合を取り上げて、提示方式の有効性を吟味する。ここに、項目数 n は 3 で、$w_1 \geqq w_2 \geqq w_3$。

① 例 1：値域の有界に影響を受ける場合

② 例 2：対の重みが極小の場合

例 1　値域の有界性：{w_i }=〔0.865、0.120、0.015〕

評点化された一対比較値行列を$\triangle_{789}$とする。a_{13} =9 に注目する。ここに、サーティの完全整合性(C.I.=0)が成立する 3 個の一対比較行列、$\triangle_{119}$、$\triangle_{339}$、$\triangle_{919}$に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、下記のようになる。

(1) $\triangle_{119}$の場合　→　$\triangle_{569}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.1304、C.I.=0.0816

(2) $\triangle_{339}$の場合　→　$\triangle_{559}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.0028、C.I.=0.0585

(3) $\triangle_{919}$の場合　→　$\triangle_{849}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.0045、C.I.=0.0907

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0028 をとる$\triangle_{559}$を採用することになる(偏差平方和＝0.0262、u ＝ (0.7352,0.2067,0.0581))。因みに、相対残差の場合は$\triangle_{749}$に調整される。このとき、偏差平方和＝0.0133、C.I.=0.0724、 u ＝ (0.7846,0.1505,0.0649)

例 2　対の重みが極小の場合：{w_i }=〔0.950、0.045、0.005〕

評点化された一対比較値行列を$\triangle_{789}$とする。a_{13} =9 に注目する。ここに、サーティの完全整合性(C.I.=0)が成立する 3 個の一対比較行列、$\triangle_{119}$、$\triangle_{339}$、$\triangle_{919}$に着目する。一対比較値の調整手順にしたがうとき、探索範囲の中に、C.I. ≦0.1 を満足する組がないため、C.I. ≦0.1 を満足する組の中で最も近隣の組で代用する。

(1) $\triangle_{119}$の場合　→　$\triangle_{339}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.1664、C.I.=0.0678

(2) $\triangle_{339}$の場合　→　$\triangle_{659}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.0609、C.I.=0.0816

(3) $\triangle_{919}$の場合　→　$\triangle_{939}$に調整される。

代用偏差平方和＝0.0305、C.I.=0.0678

したがって、提示する調整では、最も小さい代用偏差平方和 0.0305 をとる$\triangle_{939}$を採用することになる(偏差平方和＝0.0278、 u ＝ (0.8082,0.1295,0.0623))。因みに、相対残差の場合は$\triangle_{949}$に調整される。このとき、偏差平方和＝0.0313、C.I.=0.1087、 u ＝ (0.8023,0.1415,0.0562)

以上の結果を整理する、例 1 では、従来の多用されている相対残差方式に比較して、提示方式の方が偏差平方和の意味で悪く,C.I.の意味で良かった。例 2 では、探索範囲の中に C.I. ≦0.1 を満足する組がなかったが、最近隣の組で代用したため、相対残差の方式よりも良い推定を得た。

9．おわりに

本稿では、n=3 の場合について、C.I.の挙動を評点化過程に留意して調査・吟味した。C.I.が整合性を診る点検指標として有効であるか否かを探った。結果として、整合性（C.I. ≦0.1）を満たす評点の組は少ないことがわかった。この理由としては、評点化された一対比較値がサーティ方式に付随する制約、とくに評点の離散化、に影響を多大に受けているためと考えられる。一対比較値が 9 とする評点付けは、たとえ比尺度性が成立する理想的な評点付けであっても、離散化が惹起する C.I.の増加により、一対比較値行列での不整合に繋がることが見出された。したがって、AHP 方式に遵守するとき、評点値 9 の取り扱いには、より深い注意が必要になる。本稿で提示した一対比較値の調整方式は、完全整合の一対比較値行列を固有値解法により推定した重みで(真の)重みの代用とした。数値例の 2 例のうち調整方式が良好に作動した、値域の有界性の数値例が、相対残差の方式よりも C.I、では良好であったが、偏差平方和で望ましくない結果を得たことは提示方式の探索範囲に改良の指摘を受けたことになり、検討の課題となった。提示方式が、従来の統計的手法に馴染まない AHP データに対する 1 つの接近として有効となるためには、多様で多数の数値実験による検証が必要である。

参考文献

(1) Saaty,T.L.(1980). The Analytic Hierarchy,Process,McGraw Hill,New YorK.

(2) 仁科健、柴山忠雄(1992). 一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22,2,115-123.

(3) 小澤正典(2004). AHP における整合度 C.I.値の意味と解釈、OR学会研究部会「AHP の世界」発表資料(2004.9.24).

(4) 田中浩光(2007a). AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講究録 1548,122-129.

(5) 田中浩光(2007b). AHP における整合性診断とテトラッド比、OR学会研究部会「不確実環境下での柔構造モデリング」発表資料(2007.12.22).

(6) 田中浩光(2008a). AHP における一対比較値の整合性診断について、京都大学数理解析研究所講究録 1589,157-166.

(7) 田中浩光(2008b). AHP における一対比較値の離散化について、日本経営数学会研究発表会予稿集、53-56.

(8) 田中浩光(2009a). AHP における一対比較値の評点化過程について、京都大学数理解析研究所講究録 1636,169-176.

(9) 田中浩光(2009b). AHP における一対比較値の調整について、日本 OR 学会秋季大会アブストラクト集,154-155.

田中 浩光

愛知学院大学経営学部

〒470-0195　愛知県日進市岩崎町阿良池 12

E-mail : htanaka@dpc.aichi-gakuin.ac.jp