数理解析研究所講究録
第 1682 巻 2010 年 100-107

協力捜索ゲームと捜索資源の価値

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1　はじめに

捜索問題は第２次大戦における軍事研究を起源にもつ．オペレーションズ・リサーチのバイブルとも言える Morse and Kimball の本 [5] の中では，捜索問題へのゲーム理論の応用研究がすでに記述されている．しかし，捜索ゲームが盛んに研究され始めたのは，１９８０年から９０年代にかけてである．その代表的な研究 [1, 6, 7, 2] では，主として敵対する目標と捜索者との間の２人非協力ゲームが扱われているが，支払にはゼロ和の仮定がなされていた．しかし，軍事問題に限らず一般の捜索ゲームにおいても，プレイヤー間で協力関係が生じる状況があり得る．例えば，ある目標の発見とそれに付随する利益の取得を複数の捜索者が期待する場合には，捜索者間での協力が生じ得る．捜索救難においては，捜索機を見つけた遭難者は遭難信号の発信や信号弾の発射を試みるなど，捜索者による発見を手助けしよとする行為は目標と捜索者の間に協力関係が存在する例である．

上記のような協力的状況における捜索問題を特性関数形ゲームの立場で論じようとしたのが，hohzaki[3] や宝崎 [4] である．そこでは，通常の特性関数形ゲームとは異なる特徴をもつ捜索ゲームに関し，目標に対する探知確率という捜索者の能力にのみ依存する（擬）特性関数を新たに定義し，特殊な捜索ゲームを通常の特性関数形ゲームに焼き直して，目標を発見した場合の目標価値の分割の方法に関する評価式を提案している．

この論文では，一般論で論じられた上記の協力捜索ゲームを捜索配分ゲームと呼ばれるモデルに適用する．捜索配分ゲームではプレイヤーは目標と捜索者であり，目標の戦略は空間での移動，捜索者のそれは手持ち資源の空間投入である．適用モデルでは，複数の捜索者がそれぞれが持っている資源を持ち寄り協力して目標を発見しようとする状況を考える．その結果，目標価値の公平な分割にはそれぞれの持つ資源の価値が影響を与えることになる．この報告では，そのような資源価値が線形計画問題でのシャドー・プライスという明示的な形で与えられることを示す．

この報告では，まず（擬）特性関数や特性関数形協力捜索ゲームに関するこれまでの知見をレビューした後，捜索配分ゲームの協力ゲーム版を述べ，その均衡解の導出や目標価値の公平な分配について議論する．

2　複数捜索者が参加する協力捜索ゲームの理論

ここでは，論文 [3] で提案された協力捜索ゲームの理論を復習する．捜索者全体の集合 N に対し，複数の捜索者 $S \subseteq N$ が協力して 1 つの目標を捜索している状況下における探知確率を p_S とした場合，次式により S の提携による（擬）特性関数を定義する．ただし，a は適切に設定された基底パラメータである．

$$h(S) \equiv -\log_a(1-p_S) \tag{1}$$

このとき疎な提携 A, B $(A \cap B = \emptyset)$ の間で優加法性 $h(A \cup B) \geq h(A) + h(B)$ が成り立てば，N による全体提携が可能であるとする．その後の議論は，特性関数 $h(S)$ をもつ通常の特性関数形ゲームとして当該捜索ゲームを論じる．さて擬特性関数に基づく全体提携内での公平な配分としては，シャプレイ値やコア，仁といった様々な解概念が提案されている．今考えている捜索ゲームに対し，それらの中から適切な解概念

を用いることにより，メンバーである捜索者 i の配分として $\{x_i,\ i \in N\}$ が得られたとする．このとき，捜索者 i は次式により定義される探知確率（探知能力）をもつと考えることができる．

$$\widetilde{p}_i = 1 - a^{-x_i} \tag{2}$$

これを，'配分 x_i に対する a を基とする変換探知確率' と呼ぶ．仮に元の捜索問題が複雑なものであっても，この変換探知確率には捜索者間での探知に関する影響が加味されており，変換探知確率を用いた捜索者間での探知事象に関しては，互いに独立性が存在すると仮定することができる．例えば「捜索者 i と j が探知し，捜索者 k は探知しない確率」は，$\widetilde{p}_i\widetilde{p}_j(1-\widetilde{p}_k)$ と掛け算で評価できるのである．

したがって，全体提携による捜索から目標が探知された場合には，次の式が捜索者 i に分けられるべき分配比率を与える．

$$\beta(i) = \frac{1}{p_N}\sum_{S\subseteq N, S\ni i}\frac{1}{|S|}\prod_{j\in S}\left(1-a^{-x_j}\right)\cdot a^{-\sum_{k\in N\setminus S}x_k} \tag{3}$$

因みに，$\sum_{i\in N}\beta(i)=1$ となる．(3) 式は，捜索者 i が発見者グループ S に属するケースを全て網羅し，発見者グループ内では均等に分配することを仮定した評価式となっているが，実際には，どのグループが発見しても目標価値は全体のものであるとされる全体提携を考えている．

以上が従来研究において提案された協力捜索ゲームの理論の概要である．

3　協力的捜索配分ゲーム

ここでは，2 節における理論を捜索配分ゲームに適用する．1 人の目標と複数の捜索者とがプレイヤーとして参加するが，目標は捜索者から逃避するように，捜索者は目標を発見するように行動する．時々刻々移動する目標に対し，手持ち資源を用いた捜索者による捜索も時間経過を伴いながら実施されるが，互いに相手戦略に対する情報がないため，同時手番ゲームである．

(C1) 捜索空間は，離散地理空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ と離散時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ から成る集合 $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{T}$ である．

(C2) 目標は時間とともに移動するパスを通り，そのパス ω を $\{\omega(t),\ t\in\boldsymbol{T}\}$ と表現しよう．ただし，$\omega(t)\in\boldsymbol{K}$ は時点 t でのパスの通過地点を示す．また，目標の取り得る実行可能パス全体を Ω とする．

(C3) 捜索者は全員で n 人おり，捜索者の集合を $N=\{1,\cdots,n\}$ で表す．捜索者 k は各時 t において上限 $\Phi_k(t)$ の資源量を提供できる．捜索に参加する捜索者全体のとる戦略は捜索資源投入計画 $\varphi=\{\varphi(i,t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\boldsymbol{T}\}$ で表される．ただし，$\varphi(i,t)\in\boldsymbol{R}$ は時点 t において地点 i へ投入する非負の捜索資源量である．また，捜索資源の投入を始めることのできる捜索開始時点は τ であるとする．

(C4) 目標のパス ω と参加捜索者の資源投入戦略 φ により，目標パス上に投入される捜索資源の重み付き総量は $g(\varphi,\omega)\equiv\sum_{t\in\widehat{T}}\alpha(\omega(t),t)\varphi(\omega(t),t)$ となる．ただし，$\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ は捜索資源の投入可能な時点集合を，α_i は，地点 i に投入された単位捜索資源の有効性を表すパラメータである．このとき，目標探知確率は $P(\varphi,\omega)=1-\exp(-g(\varphi,\omega))$ で与えられるする．
参加捜索者は協力してこの確率を高くしようとするマキシマイザーとして，目標はミニマイザーとして行動する．

参加捜索者集合を $S\subseteq N$ とした場合の投入捜索資源の実行可能性条件は次で与えられる．

$$\Psi_S = \{\varphi \mid \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\le\Phi^S(t)\equiv\sum_{k\in S}\Phi_k(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ \varphi(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\} \tag{4}$$

また，目標に関しては混合戦略 $\pi=\{\pi(\omega),\ \omega\in\Omega\}$ を考える．$\pi(\omega)$ はパス ω の選択確率であり，π の実行可能領域は次式で与えられる．

$$\Pi = \{\pi(\omega) \mid \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1,\ \pi(\omega)\ge 0,\ \omega\in\Omega\} \tag{5}$$

捜索者の純粋戦略 φ と目標の混合戦略 π による探知確率は $P(\varphi,\pi)=\sum_{\omega}\pi(\omega)P(\varphi,\omega)$ と書け，π に関して線形式，φ に関しては凹関数となっているが，そのミニマックス値とマックスミニ値が一致することはすでに証明されており，以後我々は目標の混合戦略，捜索者提携 S の純粋戦略の範囲内で均衡解を導出することにする．

まず，マックスミニ値を求めよう．実行可能領域 Π の制約式に注意すれば，マックスミニ最適化は次の変形を許す．

$$\max_{\varphi\in\Psi_S}\ \min_{\pi\in\Pi}\ P(\varphi,\pi)=\max_{\varphi\in\Psi_S}\ \min_{\omega\in\Omega}\ P(\varphi,\omega)=1-\exp(-\max_{\varphi,\eta}\ \{\eta\mid g(\varphi,\omega)\geq\eta,\ \omega\in\Omega\})$$

結局，マックスミニ問題は次の線形計画問題を解くことと同値であることが分かる．

$$P_S\ :\quad w(S)=\max_{\varphi,\eta}\ \eta$$
$$s.t.\quad \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\geq\eta,\ \omega\in\Omega,\quad \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\leq\sum_{k\in S}\Phi_k(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ \ \varphi(i,t)\geq 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$

この最適値 $w(S)$ を用いれば，マックスミニ値，すなわち提携 S による目標探知確率 p_S としてのゲームの値は $1-\exp(-w(S))$ となる．

ここで擬特性関数の定義 (1) 式を思い出そう．上式を (1) 式に代入すれば，結局 $h(S)$ と $w(S)$ は同じであることが分かる．したがって，この捜索配分ゲームを，問題 (P_S) を解いて得られる値 $w(S)$ を特性関数にもつ協力ゲームと見なすことができる．

さて，問題 (P_S) に対する次の双対問題 (D_S) を解けば，目標の最適戦略 $\{\pi(\omega),\omega\in\Omega\}$ が得られる．

$$D_S\ :\quad w(S)=\min_{\nu,\pi}\ \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\nu(t)\sum_{k\in S}\Phi_k(t)$$
$$s.t.\quad \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1,\ \ \pi(\omega)\geq 0,\ \omega\in\Omega,$$
$$\alpha_i\sum_{\omega\in\Omega_{it}}\pi(\omega)\leq\nu(t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\tag{6}$$

ただし，Ω_{it} は時刻 t にセル i を通過するパスの集合 $\Omega_{it}=\{\omega\in\Omega|\omega(t)=i\}$ を意味する．次に，特性関数 $w(S)$ に関しては優加法性が成り立つことが，次の予備定理により分かる．

予備定理 1 協力捜索配分ゲームにおける捜索者の提携 S による擬特性関数 $w(S)$ は優加法性を満たす．すなわち，$A,\ B\subseteq N,\ A\cap B=\emptyset$ なる任意の $A,\ B$ に対し，$w(A\cup B)\geq w(A)+w(B)$ である．

証明: 互いに排反な任意の $A,\ B\subset N$ に対する問題 (P_A), (P_B) の最適値を η_A^*，η_B^*，最適解を φ_A^*，φ_B^* とし，新しい解 $\varphi(i,t)=\varphi_A^*(i,t)+\varphi_B^*(i,t)$ を作る．この解は，

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)=\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi_A^*(i,t)+\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi_B^*(i,t)\leq\sum_{k\in A}\Phi_k(t)+\sum_{k\in B}\Phi_k(t)=\sum_{k\in A\cup B}\Phi_k(t)$$

を満たし，かつ $\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\geq\eta_A^*+\eta_B^*$ であるから，$\varphi(i,t)$ 及び $\eta=\eta_A^*+\eta_B^*$ は問題 $(P_{A\cup B})$ の実行可能解である．したがって，$w(A\cup B)\geq\eta_A^*+\eta_B^*=w(A)+w(B)$ である． **Q.E.D.**

予備定理 1 により，この協力捜索配分ゲームにおいては全体提携が成立すると考えて良い．そこで，次に全体提携における配分を考えるが，次のようにしてコアの 1 つを容易に見つけることができる．

定理 1 全体提携 N に対する問題 (D_N) を解き，その最適解 $\nu^*(t)$ に対し $x_k\equiv\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\nu^*(t)\Phi_k(t)$ を作れば，$\{x_k,\ k\in N\}$ はコアに属す．

証明: (6) 式から，明らかに $w(N)=\sum_{k\in N}x_k$ が成り立つ．また，任意の $S\subset N$ に関し

$$w(S)=\min_{\nu,\pi}\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{k\in S}\nu(t)\Phi_k(t)\le\sum_{k\in S}\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\nu^*(t)\Phi_k(t)=\sum_{k\in S}x_k$$

が成立する． **Q.E.D.**

4 コアの点における資源の価値

定理 1 における配分 $\{x_k\}$ の表現から分かるとおり，$\nu^*(t)$ は時点 t における単位資源量の潜在価値を示していると言える．前提 (C3) によるプレイヤーの協力は各時点での使用可能資源量に対する寄与であり，同じ時点での資源提供である限り，どのプレイヤーによるものであっても同じ価値を持つ．実際，コア x_k の定義式において時点 t で提供される資源 $\Phi_k(t)$ には，それがどのプレイヤーから提供されるかに拘わらず同じ価値 $\nu^*(t)$ が付けられているが，これが資源 $\Phi_k(t)$ のタイムリー性を示す潜在価値と考えられる．

さて，このような協力とは異なり，提供する資源の使用領域がプレイヤー毎に異なる場合がある．例えば，プレイヤーはどこかの地理的位置を占めており，その地点を基点として資源を提供するため，提供が地理的制約を受けるケースはよくある．以上の点を考慮するため，次の前提を追加しよう．

(C5) 捜索者 k は各時 t において上限 $\Phi_k(t)$ の資源量を提供できるが，その使用できる地点範囲が $A_k(t)\subseteq\boldsymbol{K}$ に制限されている．

このとき，捜索者の捜索資源配分は協力者の提供する資源量ごとに分類し，区別しなければならない．すなわち，プレイヤー k が時点 t で提供する資源量 $\Phi_k(t)$ からの投入資源量を $\{\varphi_k(i,t),\ i\in A_k(t)\}$ で表す．この修正モデルに対し捜索者提携 S の問題 (P_S) に対応する主問題は，若干の修正の後次のようになる．

$$\begin{aligned}
P_S^M\ &:\ w_M(S)=\max_{\varphi_k,\eta}\ \eta\\
s.t.\ &\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\sum_{\{k\in S|\omega(t)\in A_k(t)\}}\varphi_k(\omega(t),t)\ge\eta,\ \omega\in\Omega,\quad\sum_{i\in A_k(t)}\varphi_k(i,t)\le\Phi_k(t),\ k\in S,\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\\
&\varphi_k(i,t)\ge0,\ i\in A_k(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ k\in S
\end{aligned}$$

問題 (P_S^M) に双対で，問題 (D_S) に対応する問題は次式となる．

$$\begin{aligned}
D_S^M\ &:\ w_M(S)=\min_{\nu_k,\pi}\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{k\in S}\nu_k(t)\Phi_k(t)\\
s.t.\ &\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)=1,\quad\pi(\omega)\ge0,\ \omega\in\Omega,\\
&\alpha_i\sum_{\omega\in\Omega_{it}}\pi(\omega)\le\nu_k(t),\ i\in A_k(t),\ k\in S,\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}\tag{7}$$

予備定理 1 はこのモデルでも成り立ち，したがって，全体提携による次の配分がコアに属することは，前モデルと同様である．すなわち，問題 (D_N^M) の最適解 $\nu_k^*(t)$ により定義した配分 $\{x_k^M=\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\nu_k^*(t)\Phi_k(t),\ k\in N\}$ はコアに属する．この修正モデルではプレイヤーに依存した重み $\nu_k^*(t)$ が付けられ，プレイヤーの資源提供に課せられる地理的制約が提供資源の地政学的な潜在価値を変化させることになる．(D_S^M) の定式化から考察すると，目標の最適混合戦略 $\pi(\omega)$ の定性的な性質として次のことが言える．時刻 t において，資源量 $\Phi_k(t)$ を多く提供できるプレイヤー k の領域 $A_k(t)$ を通過する目標パスの選択確率をできるだけ小さくすることで，制約条件 (7) を課された変数 $\nu_k(t)$ の値をできるだけ小さくし，これにより目的関数における $\Phi_k(t)$ と $\nu_k(t)$ の積を小さくしようとしている．

プレイヤー N が一人の意思決定者の資源の代理執行者である場合もある．この意思決定者は，地理学上その他の理由から，自分のもつ資源を n 個の拠点 N にまず分散させることで，その効率的使用を企図する．こ

のプレイヤーが時点 t で総量 $\Phi(t)$ の資源を提供できる場合，各地点 $k \in N$ での利用可能資源 $\Phi_k(t)$ を便宜上決めて配置させておくことにすれば，問題 (P_N^M) の定式化において $\Phi_k(t)$ を変数とし，$\sum_{k\in N}\Phi_k(t) \le \Phi(t)$ を新たな条件として追加して解くことで，このプレイヤーの手持ち資源に関する効率的使用法 $\{\varphi_k(i,t)\}$ が得られる．上記の定式化が次の問題 (P^I) と同値であることは，簡単な考察により確認できる．

$$
\begin{aligned}
P^I \ :\ & w_I(N) = \max_{\varphi_k,\eta}\ \eta \\
s.t.\ & \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \sum_{\{k\in N|\omega(t)\in A_k(t)\}} \varphi_k(\omega(t),t) \ge \eta,\ \omega\in\Omega,\ \ \varphi_k(i,t)\ge 0,\ i\in A_k(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ k\in N, \\
& \sum_{k\in N}\sum_{i\in A_k(t)} \varphi_k(i,t) \le \Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

以上，線形計画問題 (P_S), (P_S^M) 及び (P^I) により解くことのできる３つのモデルを考えた．前半の２つのモデルでは，全体提携による捜索の結果目標が探知された場合は，それぞれの配分 $\{x_k,\ k\in N\}$ を基礎にして，得られた目標価値をプレイヤー間で分配することになるが，その分配比率 $\{\beta(k),\ k\in N\}$ は (3) 式により査定すればよい．また最後のモデルでは，１人の意思決定者が目標価値を独占することになる．

5　海賊の拿捕品の分配問題

4 節では，協力捜索配分ゲームにおいて，全体提携が成立した後に必要となる全メンバー間での獲得価値の分配について議論し，各メンバーのもつ資源使用のタイムリー性が価値を生起させるケース（ケース１），資源の使用可能範囲に影響され地政学的価値が生じるケース（ケース２）において，資源価値の定量的評価について明らかにするとともに，資源の地政学的価値を最大限追求できる独裁者による資源の最適配置（ケース３）の求め方を考えた．ここでは，前回の報告 [4] で扱った数値例を用いて，各ケースでの最適解と資源価値の評価を比較する．まず，前回の数値例とケース 1 の結果を再掲する．

図 1 のように，捜索空間 $\boldsymbol{K}$ は 48 個の正 6 角形のセルから成る海域で表されていて，そこには大小２つの島がある．右の大きな島には海賊の基地が２つあり，セル 22 には中規模の基地，セル 30 には大きな基地がある．その島から海峡を挟んだ左の島には，中規模の基地がセル 18 に置かれている．通常この海域を通る船舶は，離散時点 $\boldsymbol{T} = \{1,\cdots,11\}$ の間に，セル 24 から入り，4 つのセル 8,16,25 または 34 に到達して海域を抜ける．これらの入口，出口を結ぶ航路を船舶は通行することになるが，その航路全体は次のものを考える．

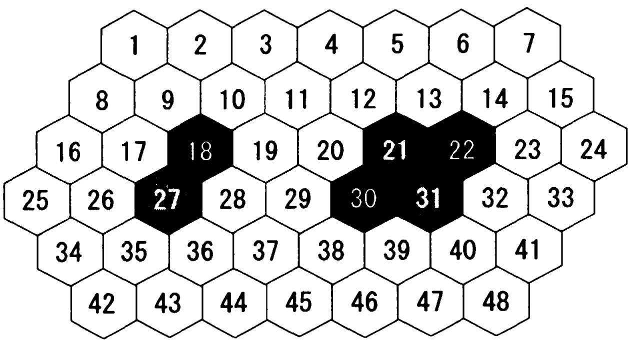

図 1．海域図

船舶は，各セルから 1 時点の間に 2 つ隣のセルまで移動することができるが，島を通り抜けることはできない．１つ隣のセルへ移動するよりは，２つ隣のセルへ移動する方がより大きな速度を使用するため，1 隣接セルへの移動にはエネルギー 1 を消費し，２隣接セルへの移動にはエネルギー 4 が必要であるとする．もちろん，同一セルに停止する場合はエネルギー消費はない．時点数 11 の間に，総消費移動エネルギー 10

以下で入口と出口を結ぶすべてのパスを実現可能な航路全体 Ω としよう．例えば，時点 $t=1,2,\cdots,8$ において，セル $24,15,14,13,11,10,9,8$ を通過するパスは，エネルギー 10 を消費し尽くした後，時点 8 で出口セル 8 に到達する実現可能なパスの 1 つである．この場合の全航路数は $|\Omega|=2982$ となる．

島にある３つの基地が３人のプレイヤー N を表し，右からプレイヤー１，２，３とする．基地の規模に応じて船舶襲撃時に動員できる人数，装備の量が異なり，プレイヤー k の時点 t での動員資源量 $\Phi_k(t)$ は，プレイヤー $k=1,3$ に関しては $\Phi_k(t)=2,\ t=2,\cdots,10$ であり，プレイヤー $k=2$ に関しては $\Phi_k(t)=3,\ t=2,\cdots,10$ である．ただし，時点 1 には船舶は入口セル 24 におり，時点 11 では出口セルにいるから，海賊行為は働けず強襲資源は使えない．強襲資源を用いて船舶を捕獲できる効率を表すセル i での係数 α_i はすべて同じ $\alpha_i=1$ とするが，上述したように入口セル及び出口セル k においては海賊行為が不可能であるため $\alpha_k=0$ と置こう．また，α の重み付き強襲資源総量 x による船舶の捕獲確率関数は $f(x)=1-\exp(-x)$ である．船舶はこの海域を通過する際に海賊からできるだけ捕獲されないような航路を選択しようとし，海賊はできるだけ捕獲確率を大きくするように，手持ちの強襲資源を持ち寄り使用する．

(1) ケース１：各基地からどの地点の船舶も襲撃可能である場合

上の状況設定で問題 (D_N) を解き，定理 1 によるコアの点 $\{x_1,x_2,x_3\}$ を求めた．船舶による航路の最適選択確率が $1/|\Omega|$ より大きな航路数は４８本あり，そのうちの大きな選択確率をもつ１２本により選択確率の総和が７０％を超える．この１２本の主要航路では，島の北を迂回しできるだけ早く出口セルに到達できるように，パス $\{13,12,11,10\}$ を含んだ航路が，出発セル 24 から時間差をもたせて出発したり，また２隣接セルへの移動を利用するなど，バリエーションを持たせた形で多用されている．同じく，出発時間に時間差を持たせた南廻りの航路も使用されており，海賊による航路予想を困難にしている．

各時点 t，各セル i における最適な目標存在確率 $\sum_{k\in\Omega_{it}}\pi(\omega)$ 及び海賊による強襲資源の最適投入量 $\varphi(i,t)$ についてはその詳細を表示しないが，１２本の主要航路に沿って船舶の存在確率も分布しており，また強襲資源投入もなされている．特に時点 2 における船舶存在確率及び強襲資源分布は，24 以外のセル 14,15,23,33 において完全に一様化される．このセル 24 は強襲不可能なセルであり，主要航路へ船出する前の時間差出発の待機セルとして利用されるため，しばらくの間高い船舶の存在確率をもつ．

表 1 は各時点における強襲資源の潜在価値 $\nu(t)$ を示している．問題 (D_N) の制約条件式 (6) から分かるように，この価値は各時点における船舶の存在確率の最大値，すなわち選択航路の集中度を示しており，船舶側からすればこれをできるだけ低く抑えることで，強襲資源投入の効率化を妨げようとする．時点 $t=6$ での資源価値が他の時点に比べ若干高くなっているものの，全体的にはほぼ均一化されていて，海賊側の使用できる強襲資源総量が常時 $\sum_k\Phi_k(t)=7$ であることを考慮し，船舶側は存在確率の均一化を常に心掛けていることが分かる．このとき，３人のプレイヤーに対するコアの点は $\{x_1,x_2,x_3\}=\{1.74,2.61,1.74\}$ となり，各プレイヤーがもつ強襲資源量の比 2:3:2 に一致するが，これはこの点の計算法からも自明である．この場合のゲームの値，あるいは海賊の全体提携による擬特性関数値は $w(N)=6.10$ となる．因みに，$a=e$ とした (3) 式を用いると，捕獲した拿捕品を３つの海賊で分配する比率は，$\{\beta(1),\beta(2),\beta(3)\}=\{0.313,0.373,0.313\}$ となる．

表１　強襲資源の価値（ケース１）

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\nu(t)$	0.096	0.095	0.095	0.095	0.104	0.097	0.097	0.097	0.095	0

(2) ケース２：強襲資源の使用領域に制限のある場合

ここではケース１の設定に対し，海域が広大でプレイヤー 1,2,3 が手持ちの強襲資源を使用できる領域が，自分の基地の近郊にのみ制限されている次のような場合を考えよう．すなわち，各プレイヤーは基地の存在するセルから２隣接セルまでの範囲でしか手持ち資源を使用できない．例えば，プレイヤー１にとっては島を省く１５個のセル $A_1(t)=\{5,6,7,12,13,14,15,20,23,24,32,33,39,40,41\}$ が資源の使用可能領域であ

り，プレイヤー２は１５個のセル，プレイヤー３は１７個のセルから成る資源使用可能領域をもつ．この $A_k(t)$ を用いて問題 (P_N^M) または (D_N^M) を解いた．

船舶による航路の最適選択確率が $1/|\Omega|$ より大きな航路数は６９本あり，そのうちの１４本により選択確率の総和が７０％を超える．その詳細は紙数の制限から表１のようには表示しないが，主要航路の中には，どの海賊からも襲撃されない位置にあるセル４や４８を通過する航路が含まれるようになる．ただし，航路の多様性を確保する意味からも，襲撃不可能なセルを通過する航路もあまり多くはない．表２は，各プレイヤー k の各時間 t における手持ち資源の価値 $\nu_k(t)$ を表示したものである．

表２　強襲資源の価値（ケース２）

players	time points									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0.131	0.131	0.119	0.119	0.119	0.071	0.024	0	0	0
2	0	0.036	0.071	0.095	0.095	0.095	0.095	0	0	0
3	0	0	0	0.071	0.083	0.119	0.119	0.119	0.119	0

これから分かるとおり，前半の時点 $t=2,3,4$ では船舶の航路を襲撃可能な基地１が持つ資源の地政学的価値は高く，後半の時点 $t=9,10$ では基地３の資源価値が高い．通過可能航路における船舶の移動形態を考慮すれば，この特徴は容易に想像できる自明な性質であるが，表２はそれに対する定量的な分析結果を与えてくれる．また，中間の時点においては基地２の価値も高いが，いずれの時点でも価値のより大きな他の基地が存在する．これは一つには基地２が多量の資源を保有していることにも原因がある．この値 $\nu_k(t)$ がゼロである場合，例えばプレイヤー $k=2,3$ が時点 $t=2$ で持っている強襲資源は，船舶の現実的な移動を考えれば実際には使用できず，その価値は皆無である．

さて，このケースにおけるコアの点は $\{x_1,x_2,x_3\}=\{1.43,1.46,1.26\}$ となり，ケース１において手持ち資源総量の比率がコアの点を決定したようには，大きな差は生じない．また，前半の時点での資源保有の有用性が後半での有用性にまさり，プレイヤー３よりはプレイヤー１の値が大きい．ゲームの値は $w(N)=4.15$ となり，強襲資源がどこでも使用可能なケース１の値 6.10 に比べ大きく減少する．このケースでは，捕獲品に関する各基地の分配比率は $\{\beta(i)\}=\{0.341,0.346,0.313\}$ であり，プレイヤー１の比率はプレイヤー２のそれに迫るようになる．

(3) ケース３：１人のプレイヤーによる強襲資源の独占的使用

ケース２における各時点での全プレイヤーの手持ち資源総量 $\Phi(t)=7$ を１人のプレイヤーがコントロールできるとして，問題 (P^I) を解いたのがこのケースである．この１人の意思決定者のコントロール下にある基地１，２，３からの各時点 t における最適な資源使用総量 $\sum_{i\in A_k(t)}\varphi_k(i,t)$, $k=1,2,3$, は表３のようになる．この表により，基地の地理的条件を考慮して，各時点における手持ち資源量 $\Phi(t)=7$ を各基地にどのように分割して配備しておくべきかが分かる．すなわち，初期時点において船舶の大半の航路を制圧できる位置にある基地１には多量の資源を配備しておくべきであり，出口セルに収れんしようとする多くの航路をカバーする基地３にも，後半の時点で多量の資源を集中して配備しておくべきである．また，航路の中間地点をカバーできる位置にある基地２には，中間時点における資源配備を行っておくべきであるものの，基地１，２がもつ特徴的な資源配備ほど目立った傾向はない．

表３　最適な資源投入総量（ケース３）

bases	time points									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	7	6	4.19	3.90	4.55	0.78	0.52	0	0	0
2	0	1	2.81	2.99	2.23	1.05	1.26	0.79	0	0
3	0	0	0	0.11	0.22	5.17	5.22	6.21	7	0

このような資源の配備計画は，ケース２の表２からも予想される．すなわち，より価値の高い資源を提供できる基地にはより多くの資源を他の基地から輸送して配備すべきであり，例えば，表２の時点 $t=5$ では基地１，２，３の順に資源価値が高く，各基地にあるこの時点での保有資源量 $\Phi_1(5)=2$, $\Phi_2(5)=3$, $\Phi_3(5)=2$ から，この順序に従って再配分を行ってゆく．すなわち，最も価値の低い基地３の資源を基地１に少しずつ回送してゆくことになるが，その過程で問題 (D_N^M) を解いた場合，基地１の資源の価値は相対的に下がってゆき，基地３の資源のそれは上昇する．資源回送の過程でそれまでの各基地の資源価値の順番が逆転した場合は，上と同様に最も低い価値の資源を最も高い価値を持つ基地に回送する．このような仮想的過程を繰り返せば，最終的にはすべての基地の資源は同じ価値を有することになるが，その資源配備の結果が表３に他ならない．また最終的に得られる価値はすべての基地で同じ値となるが，その値は問題 (P^I) の制約式 (8) に対応する双対変数 $\nu(t)$ として得られる．その $\nu(t)$ を表４に掲載したが，表２における各時点の最大価値と最小価値の間にあることが分かる．さらに，強襲資源使用に関し地理的制限を受けないケース１の表１と比較すると，両者の値はかなり近く，仮に資源使用が地理的制約を受ける場合であっても，使用基地間における資源の再配備により，その制約をかなり緩和できていることが分かる．因みに，このケースのゲームの値 $w(N)=6.09$ は，ケース１の値 6.10 よりやや小さいだけである．

表４　強襲資源の価値（ケース３）

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\nu(t)$	0.096	0.095	0.095	0.094	0.104	0.096	0.098	0.096	0.095	0

6　おわりに

この報告では，１人の目標とみずからの手持ち資源を提供することで協力する複数捜索者の参加する協力捜索配分ゲームについて論じた．その結果，擬特性関数に優加法性が成立することから，全体提携が生じる可能性のあることを確認した．その後，全メンバー間での分配に関しコアの点が容易に導出できることを見た．その際，コアに影響を及ぼす手持ち資源の価値の定量的評価を，資源使用のタイムリー性に依存するケース，使用可能範囲に依存して地政学的価値をもつケースについて考えた．最後に，資源を独占し，資源の地政学的価値を自由に操作できるケースについても論じ，資源の最適配置に関する知見も得た．

参考文献

[1] J.M. Danskin, A helicopter versus submarine search game, *Operations Research*, **16**, pp.509–517, 1968.

[2] R. Hohzaki, Search allocation game, *European Journal of Operational Research*, **172**, pp.101–119, 2006.

[3] R. Hohzaki, A cooperative game in search theory, *Naval Research Logistics*, **56**, pp.264–278, 2009.

[4] 宝崎隆祐, 協力的捜索ゲームに関する一提案, 数理解析研究所講究録 1636, pp.142–149, 2009.

[5] P.M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.

[6] A.R. Washburn, Search-evasion game in a fixed region, *Operations Research*, **28**, pp.1290–1298, 1980.

[7] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The diesel submarine flaming datum problem, *MOR*, **4**, pp.19–30, 2001.