数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 9-16

非拡大型非線形写像に関する不動点定理とその応用
(FIXED POINT THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPINGS OF NONEXPANSIVE TYPE AND THEIR APPLICATIONS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
名古屋大学情報連携統括本部
(INFORMATION AND COMMUNICATIONS HEADQUARTERS, NAGOYA UNIVERSITY)

1. はじめに

C を実ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことと定義する. 同様に, T が堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$$

が成り立つことと定義する. 堅非拡大写像ならば非拡大写像であることは容易にわかる. このとき, T の不動点 (fixed point) 全体の集合を $F(T)$ で表すこととする. ヒルベルト空間の非拡大写像に関する次の不動点定理は良く知られた結果である.

定理 1.1 ([25]). C をヒルベルト空間 H の空でない有界閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. このとき, T は C の中に不動点をもつ.

ヒルベルト空間の非拡大写像の不動点問題 (fixed point problem) は極大単調作用素 (maximal monotone operator) の零元問題 (zero point problem) にも関係している. 零元問題とは極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対して,

$$0 \in Au \tag{1.1}$$

を満たす元 u を求める問題である. この問題を解く代表的な手法に近接点法 (proximal point algorithm) がある: 初期点を $x_1 \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

で点列を構成する. ただし, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ であり, 任意の $r > 0$ に対して $J_r = (I + rA)^{-1}$ である. このような J_r は T のリゾルベント (resolvent) と呼ばれる ([22, 27] を参照). この J_r が一価の堅非拡大写像かつ $A^{-1}0 = F(J_r)$ を満たすことは良く知られた事実である. このように, 極大単調作用素の零元問題は堅非拡大写像の不動点問題に帰着することができる.

ヒルベルト空間のリゾルベントの概念をバナッハ空間で論じる場合, 4 つのリゾルベントが知られている. ヒルベルト空間での極大単調作用素をバナッハ空間で論じる場合, 極大単調作用素と m-増大作用素 (m-accretive operator) に分かれる. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とし, $T \subset E \times E^*$ と

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H10, Secondary 47H09, 47H07.
Key words and phrases. 準非拡型大写像, 堅準非拡型大写像, 不動点, 準漸近的不動点, 非線形射影, バナッハ空間.

$B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. このとき, $x \in E$ と $r > 0$ に対して, 4つのリゾルベントは以下で定義される ([5,10,16,26,28,29] を参照).

距離リゾルベント (metric resolvent)	$P_r x$	$=$	$\{z \in E : 0 \in J(z-x) + rTz\}$,
擬リゾルベント (accretive resolvent)	$\Pi_r x$	$=$	$\{z \in E : 0 \in (Jz - Jx) + rTz\}$,
増大リゾルベント (relative resolvent)	$Q_r x$	$=$	$\{z \in E : 0 \in (z-x) + rAz\}$,
準リゾルベント (generalized resolvent)	$R_r x$	$=$	$\{z \in E : 0 \in (z-x) + rBJz\}$.

ただし, J は E の双対写像 (duality mapping) である. また, ヒルベルト空間の堅非拡大写像の概念をバナッハ空間で論じる場合も4つの写像が存在し, バナッハ空間での4つのリゾルベントと関連している. ([2,4,13,19–21,31,32] を参照).

距離リゾルベント	$\Rightarrow$	堅距離写像 (firmly metric operator)
擬リゾルベント	$\Rightarrow$	堅非拡大型写像 (firmly nonexpansive type mapping)
増大リゾルベント	$\Rightarrow$	堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping)
準リゾルベント	$\Rightarrow$	堅準非拡大型写像 (firmly generalized nonexpansive type mapping)

一方, バナッハ空間の非拡大写像に関する不動点定理として以下の定理はよく知られた結果である ([6,28] も参照).

定理 1.2 ([3,7,17]). *C を一様凸なバナッハ空間 E の空でない有界閉凸集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. このとき, T は C の中に不動点をもつ.*

バナッハ空間においても, 堅非拡大写像ならば非拡大写像になるのでこの定理は堅非拡大写像に関しても成立する. 2008年には高阪-高橋 [21] が堅非拡大型写像に対する以下の不動点定理を得た.

定理 1.3 ([21]). *C を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への堅非拡大型写像とする. このとき次の条件は同値になる.*

(1) *T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;*
(2) *C のある元 x に対して, $\{T^n x\}$ は有界である.*

本論文では, 2008年の高阪-高橋 [20,21] の研究を動機として, バナッハ空間の堅準非拡大型写像に関する不動点定理の研究を行う. まず, 始めにバナッハ空間での新しい非線形写像である堅準非拡大型写像及び準非拡大型写像を定義し, その性質を議論する. 次に, これら新しい非線形写像に関する不動点定理と弱収束定理を議論する. 最後に, これらの結果を利用して, 準リゾルベントに関する極大単調作用素の零元問題も議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, E^* をその共役空間とする. E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $\|x\| = \|y\| = 1$ となる E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, つねに $\|x+y\| < 2$ が成り立つことである. 同様に, 一様凸 (uniformly convex) であるとは, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ となる E の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, つねに $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ となることである.

バナッハ空間 E の元 x に対して, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを, E の双対写像 (duality mapping) と呼ぶ.

この双対写像 J は E のノルムの微分可能性とも大いに関わりをもつ. いま $S(E) := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とするとき, $S(E)$ の元 x, y に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

バナッハ空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能 (Gâteaux differentiable) であるとは, $S(E)$ の元 x, y に対して, つねに (2.1) が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の $S(E)$ の元 y に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. 任意の $S(E)$ の元 x に対して, (2.1) が $S(E)$ の元 y に関して一様に収束するとき, E のノルムが Fréchet 微分可能 (Fréchet differentiable) であるという. (2.1) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様 Fréchet 微分可能 (uniformly Fréchet differentiable) であるという. このとき, 空間 E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう.

多価写像 $T \subset E \times E^*$ に対して, T の定義域 (domain) と T の値域 (range) は

$$D(T) = \{x \in E : Tx \neq \emptyset\}, \ R(T) = \cup\{Tx : x \in D(T)\}$$

で定義される. 多価写像 $T \subset E \times E^*$ が単調作用素 (monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

がつねに成り立つことと定義する. 多価写像 T が狭義単調作用素 (strictly monotone operator) であるとは, 任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in T (x \neq y)$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$$

がつねに成り立つことと定義する. また, 単調作用素 T が極大 (maximal) であるとは, T を真に含む単調作用素 $S \subset E \times E^*$ が存在しないときいう. すなわち, $S \subset E \times E^*$ が単調作用素で, かつ $T \subset S$ であるならば, $T = S$ となるときをいう. T が極大単調作用素ならば, $T^{-1}0 = \{u \in E : 0 \in Tu\}$ は閉凸集合となる. E が回帰的で狭義凸ならば, 単調作用素 T が極大になる必要十分条件は, 任意の $\lambda > 0$ に対して, $R(J + \lambda T) = E^*$ となることである ([5,29] を参照).

バナッハ空間 E での双対写像 J とノルムの微分可能性に関しては次の性質が知られている ([5,28,29] を参照).

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合である;
(2) J は単調作用素である;
(3) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が 1 対 1 となることである.
すなわち, $x \neq y \ \Rightarrow \ Jx \cap Jy = \emptyset$;
(4) E が狭義凸であるための必要十分条件は J が狭義単調作用素となることである;
(5) E が回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間なら, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる.
すなわち, $J_* = J^{-1}$ である;
(6) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射となることである;
(7) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである.

E を滑らかなバナッハ空間とする. このとき, 双対写像 J が弱点列連続 (weakly sequentially continuous) であるとは, E の点列 $\{x_n\}$ が E の元 x に弱収束するならば, E^* の点列 $\{Jx_n\}$ が E^* の元 Jx に弱 * 位相の意味で収束することと定義する.

3. 堅準非拡大型写像に関する不動点定理

本節では, 堅準非拡大型写像の不動点定理を議論する. まず始めに, それに必要な堅準非拡大型写像と準非拡大型写像を定義し, その性質に関して議論する.

E を滑らかなバナッハ空間とし, J を E の双対写像とする. このとき, E の元 x, y に対して,

$$V(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を定義する. この関数 V に関しては次のような性質が知られている ([1,15,24] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq V(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ である;

(2) E の元 x, y, z に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle$ である;
(3) E が狭義凸ならば, E の元 x, y に対して $V(x,y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.

C を E の空でない閉凸集合とする. このとき, C から C への写像 T が堅準非拡大型写像 (firmly generalized nonexpansive type mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して,

$$V(x,Tx) + V(y,Ty) + V(Tx,Ty) + V(Ty,Tx) \leq V(y,Tx) + V(x,Ty)$$

がつねに成り立つことと定義する ([13] を参照). また, T が準非拡大型写像 (generalized nonexpansive type mapping) であるとは, 任意の C の元 x, y に対して,

$$V(Tx,Ty) + V(Ty,Tx) \leq V(y,Tx) + V(x,Ty)$$

がつねに成り立つことと定義する ([13] を参照). 同様に, T が準非拡大写像 (generalized nonexpansive mapping) であるとは, $F(T)$ が空集合でなく, かつ任意の C の元 x と $F(T)$ の元 y に対して,

$$V(Tx,y) \leq V(x,y)$$

がつねに成り立つことと定義する ([8,10] を参照). ただし, $F(T)$ は写像 T の不動点の集合, すなわち $F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$ である. これらの写像に関しては次のような結果が得られている.

補助定理 3.1 ([13]). C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への堅準非拡大型写像とする. このとき, T は準非拡大型写像である.

補助定理 3.2 ([13]). C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C への準非拡大型写像とする. このとき, T の不動点集合 $F(T)$ が空でなければ, T は準非拡大写像になる.

補助定理 3.3 ([13]). C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸集合とし, T を C から C へ写像とする. このとき, T が堅準非拡大型写像であることの必要十分条件は, 任意の C の元 x, y に対して,

$$\langle (x - Tx) - (y - Ty), JTx - JTy\rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

が成り立つことである.

C の元 p が T の 準漸近的不動点 (generalized asymptotic fixed point) であるとは, $\{Jx_n\}$ が Jp に弱 * 位相の意味で収束し $\lim_{n\to\infty}(Jx_n - JTx_n) = 0$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が存在することと定義する. このとき, T の準漸近的不動点の集合を $\check{F}(T)$ で表す. 準漸近的不動点の集合に関しては次の補助定理が知られている.

補助定理 3.4 ([14,23]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, C から C への写像 T を非拡大写像で $F(T)$ が空集合でないとする. このとき, T は準非拡大写像かつ $F(T) = \check{F}(T)$ となる.

近年, 茨木-高橋 [13] は準非拡大型写像に関する以下の不動点を得た.

定理 3.5 ([13]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大型写像とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;
(2) E のある元 x に対して, $\{T^n x\}$ は有界である.

定理 3.5 と補助定理 3.1 の直接的な結果として, 茨木-高橋 [13] は堅準非拡大型写像に関する以下の不動点も得た.

定理 3.6 ([13]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への堅準非拡大型写像とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;
(2) E のある元 x に対して, $\{T^n x\}$ は有界である.

さらに, 茨木-高橋 [13] は準非拡大型写像の不動点集合に関して次の結果を得た.

定理 3.7 ([13]). E を回帰的で滑らかなバナッハ空間とし, 共役空間 E^* が一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つものとする. T を E から E への準非拡大型写像とする. このとき T の不動点集合 $F(T)$ が空でなければ, $\check{F}(T) = F(T)$ が成立する.

4. サニー準非拡大射影と弱収束定理

本節では, 堅準非拡大型写像の弱収束定理を議論する. まず, 始めにヒルベルト空間の距離射影のバナッハ空間への拡張概念であるサニー準非拡大射影を定義し, その性質に関して議論する.

E をバナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき, E から D への写像 R がサニー (sunny) であるとは, 任意の E の元 x と $t \geq 0$ に対して

$$R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$$

が成り立つことである. 同様に, E から D への写像 R が射影 (retraction) であるとは, 任意の D の元 x に対して, $Rx = x$ が成り立つことである. これらの写像に関して次の補助定理が知られている.

補助定理 4.1 ([8, 10]). E を滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. また R を E から D の上への射影とする. このとき, R がサニーかつ準非拡大写像になる必要十分条件は, 任意の E の元 x と D の元 y に対して,

$$\langle x - Rx, JRx - Jy \rangle \geq 0$$

となることである. ただし, J は E の双対写像である.

E が滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を空でない集合とする. このとき, E から D の上へのサニー準非拡大射影 (sunny generalized nonexpansive retraction) は一意に決まる. そこで, 滑らかな狭義凸バナッハ空間の場合に, E から D の上へのサニー準非拡大射影を R_D で表すことにする. D を E の空でない集合とする. このとき, D が E のサニー準非拡大レトラクト (sunny generalized nonexpansive retract) であるとは, E から D の上へのサニー準非拡大射影が存在するときと定義する. サニー準非拡大射影の不動点集合はもちろん D である ([8, 10] を参照). サニー準非拡大射影とサニー準非拡大レトラクトに関しては次の3つの結果が知られている.

定理 4.2 ([18]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でない集合とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) D はサニー準非拡大レトラクトである;
(2) JD は閉凸集合である.

このとき, D は閉集合となる.

補助定理 4.3 ([14]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, D を E の空でないサニー準非拡大レトラクトとする. また R_D を E から D の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, $\check{F}(R_D) = F(R_D) = D$ が成り立つ.

補助定理 4.4 ([14]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像する. このとき, $F(T)$ は E のサニー準非拡大レトラクトである.

堅準非拡大型写像に関する弱収束定理を得るために, サニー準非拡大射影に関する次の補助定理が必要となる.

補助定理 4.5 ([13]). E が滑らかで一様凸なバナッハ空間とし, T を E から E への準非拡大写像とする. R を E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影とする. このとき, 任意の E の元 x に対して, 点列 $\{RT^n x\}$ は $F(T)$ の元へ強収束する.

茨木-高橋 [13] は堅準非拡大写像に関する次の弱収束定理を得た.

定理 4.6 ([13]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムをもつ一様凸なバナッハ空間とし, T を E から E への堅準非拡大型写像とする. このとき, E の双対写像 J が弱点列連続であれば, 次の条件は同値になる.

(1) T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;
(2) E の任意の元 x に対して, $\{T^n x\}$ は弱収束する.

このとき, 点列 $\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元へ弱収束する.

さらに, 茨木-高橋 [13] は補助定理 4.5 と定理 4.6 より, 次の堅準非拡大写像に関する弱収束定理を得た.

定理 4.7 ([13]). E を一様凸で一様に滑らかなバナッハ空間とし, T を E から E への堅準非拡大型写像とする. このとき, E の双対写像 J が弱点列連続であれば, 次の条件は同値になる.

(1) T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;
(2) E の任意の元 x に対して, $\{T^n x\}$ は弱収束する.

このとき, 点列 $\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元 $p = \lim_{n\to\infty} RT^n x$ へ弱収束する. ただし, R は E から $F(T)$ の上へのサニー準非拡大射影である.

5. 極大単調作用素の零元問題

本節では, バナッハ空間における極大単調作用素の零元問題を議論する. まず始めに, バナッハ空間のリゾルベントの一つである準リゾルベントに関して議論を行う. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, その共役空間を E^* とする. このとき, 単調作用素 $B \subset E^* \times E$ が極大ならば, 任意の $r > 0$ に対して, $E = R(I + rBJ)$ である ([10] の命題4.1 を参照). ここで, 任意の $r > 0$ と $x \in E$ に対して

$$R_r x = \{z \in E : x \in z + rBJz\}$$

とすると, R_r は一価写像となる. このとき, R_r は

$$(I + rBJ)^{-1}$$

で記述される. このような R_r を B の準リゾルベント (generalized resolvent) を呼ぶこととする ([10, 12] を参照). 準リゾルベントに関しては以下の結果が知られている.

補助定理 5.1 ([10, 11]). E が回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, 次の性質が成立する.

(1) $r > 0$ に対して, $D(R_r) = E$;
(2) $r > 0$ に対して, $(BJ)^{-1}0 = F(R_r)$;
(3) $(BJ)^{-1}0$ は閉集合;
(4) $r > 0$ に対して, $R_r : E \to E$ は準非拡大写像.

定理 5.2 ([10, 18]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素とする. このとき, $(BJ)^{-1}0$ はサニー準非拡大レトラクトになる.

補助定理 5.3 ([13]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, R_r は E から E への堅準非拡大型写像になる.

補助定理 5.3 と定理 3.6 の直接的な結果から次の極大単調作用素の零元の存在性に関する次の結果を得ることができる.

系 5.4. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき次の条件は同値になる.

(1) B の零元の集合 $B^{-1}0$ は空でない;

(2) E のある元 x に対して, $\{R_r{}^n x\}$ は有界である.

また, 補助定理 5.3 と定理 3.7 の直接的な結果から次の極大単調作用素の零元集合に関する次の結果を得ることができる.

系 5.5. E を回帰的で滑らかなバナッハ空間とし, 共役空間 E^* が一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムを持つものとする. $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき B の零元の集合 $B^{-1}0$ が空でなければ, $\check{F}(R_r) = F(R_r) = (BJ)^{-1}0$ が成立する.

最後に, 助定理 5.3 と定理 4.7 の直接的な結果から次の極大単調作用素の零元への収束性に関する次の結果を得ることができる.

系 5.6. E を一様凸で一様に滑らかなバナッハ空間とし, $B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする. $r > 0$ に対して, $R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする. このとき, E の双対写像 J が弱点列連続 であれば, 次の条件は同値になる.

(1) B の零元の集合 $B^{-1}0$ は空でない;

(2) E の任意の元 x に対して, $\{R_r{}^n x\}$ は弱収束する.

このとき, 点列 $\{R_r{}^n x\}$ は $(BJ)^{-1}0$ の元 $p = \lim_{n\to\infty} RR_r{}^n x$ へ弱収束する. ただし, R は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である.

References

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[4] R. E. Bruck, *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[5] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems* Kluwer Academic Publishers, Dordecht, 1990.

[6] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. **30** (1965), 251–258.

[8] 茨木貴徳・高橋渉, 「バナッハ空間における新しい射影に関する収束定理」京都大学数理解析研究所講究録 **1484** (2006), 150–160.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Adv. Math. Econ. **10** (2007), 51–64.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 71–81.

[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retracts and convergence theorem for generalized resolvents in a Banach space*, in Fixed Point theory and its Applications (S. Dhompongsa, K. Goebel, W. A. Kirk, S. Plubtieng, B. Sims and S. Suantai, eds.), Yokohama Publishers, 2008, 83–93.

[13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by a hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.

[14] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, Nonlinear Analysis and Optimization, Contemp. Math. , AMS, to appear.

[15] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[16] K. Kido, *Strong convergence of resolvents of monotone operators in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 755–758.

[17] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.

[18] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[19] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strongly convergent net given by a fixed point theorem for firmly nonexpansive type mappings*, Appl. Math. Comput. **202**, (2008), 760–765.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[21] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[22] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles **4** (1970), 154–158.

[23] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37–47.

[24] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[25] A. Pazy, *Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space*, Israel J. Math. **9** (1971) 235–240.

[26] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[27] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. **14** (1976), 877–898. **4** (1953), 506–510.

[28] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[29] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[30] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[31] W. Takahashi, *Proximal point algorithms and four nonlinear mappings in Banach spaces*, The 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, March 27 - 31, 2009.

[32] W. Takahashi, *Equilibrium problems, nonlinear operators and fixed point theorems*, The 9th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, National Changhua University of Education, Changhua, Taiwan, July 16 - 22, 2009.