数理解析研究所講究録
第1683巻 2010年 39-44

バナッハ空間の幾何学的定数に関する最近の話題

岡山県立大学情報工学部　高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
九州工業大学工学研究院　加藤幹雄 (Mikio Kato)

バナッハ空間 X の幾何学的性質を記述するために種々の幾何学的定数が用いられる．特に James 定数 $J(X)$ と von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ は多くの研究者によって重点的に取り扱われてきた．小論では2つの定数 $J(X)$ と $C_{NJ}(X)$ の関係を中心にこれらの定数に関する研究の進展状況のあらましを説明し，最後に最新の成果を紹介する．以下 X は2次元以上の実バナッハ空間とし，その単位球面, 閉単位球をそれぞれ S_X, B_X で表す．James 定数 $J(X)$ は non-squareness の度合いを表し

$$J(X)=\sup\{\min(\|x+y\|,\|x-y\|):\ x,y\in S_X\}$$

で定義される．一般に $\sqrt{2}\leq J(X)\leq 2$ であり，$J(X)<2$ のとき，X は uniformly non-square (UNS と略記) という．X が内積空間のとき $J(X)=\sqrt{2}$ であるが，その逆は成立しない．また von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ は

$$C_{NJ}(X)=\sup\left\{\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}:\ x\in S_X, y\in B_X\right\}$$

で定義される．一般に $1\leq C_{NJ}(X)\leq 2$ である．$C_{NJ}(X)=1$ は内積空間を特徴付け，$C_{NJ}(X)<2$ は UNS 性を特徴付ける．$J(X)$ と $C_{NJ}(X)$ の関係について 2001 年に Kato-Maligranda-Takahashi [16] によって最初の結果が与えられた：

$$\frac{J(X)^2}{2}\leq C_{NJ}(X)\leq\frac{J(X)^2}{1+(J(X)-1)^2}. \tag{1}$$

ここで左側の不等式は最良である．実際，$\sqrt{2}\leq t\leq 2$ で定義された実数値関数 $f(t)$ について，任意の X に対し $f(J(X))\leq C_{NJ}(X)$ が成り立つとき，$f(t)\leq t^2/2$ が示される．また多くの空間で等号が成立することが知られている．

右側の不等式で等号が成立するのは X が UNS でない場合，すなわち $J(X)=2$ の場合に限ることが分かる．2004 年に Nikolova-Persson-Zachariades [22] は右側の不等式を次のように改良した：

$$C_{NJ}(X)\leq\frac{J(X)^2}{4}+1+\frac{J(X)}{4}(\sqrt{J(X)^2-4J(X)+8}-2). \tag{2}$$

Maligranda も独立に同じ結果を得たが，彼はより強い次の不等式を予想した：

$$C_{NJ}(X)\leq\frac{J(X)^2}{4}+1. \tag{3}$$

Maligranda 予想とその周辺　2006年，Saejung [6] は Maligranda 予想に挑戦するも失敗に終わる．2008年に Alonso-Martín-Papini [2] は新たな定数 $C'_{NJ}(X)$ を導入し，(3) より強い不等式を証明することによって Maligranda 予想を肯定的に解決した．この定数は von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ を単位球面上で考えたもので

$$C'_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} :\ x, y \in S_X\right\}$$

で定義される．明らかに $J(X)^2/2 \le C'_{NJ}(X) \le C_{NJ}(X) \le 2$ である．$C'_{NJ}(X) = 1$ は内積空間を特徴付け，$C'_{NJ}(X) < 2$ は UNS 性を特徴付けることが知られている．この定数は 2006年に Takahashi [25] によって独立に導入され

$$C'_{NJ}(X) \le 1 + \rho_X(1)^2 \tag{4}$$

が示された ([25, Theorem 20])．$\rho_X(\tau)$ は X の modulus of smoothness である．この不等式の応用として

$$C'_{NJ}(X^*) \le 1 + \left[\sqrt{2C'_{NJ}(X)} - 1\right]^2 \tag{5}$$

が容易に示される ([25, Theorem 21])．ただし X^* は X の双対空間である．ここで $\rho_X(1) = \rho_{X^*}(1)$ が成り立つことに注意しよう．2008年に Alonso たちは

$$C_{NJ}(X) \le 1 + \left[\sqrt{2C'_{NJ}(X)} - 1\right]^2 \tag{6}$$

を示した ([2, Theorem 1])．$C'_{NJ}(X^*) \le C_{NJ}(X)$ が成り立つから，(6) は (5) の改良である．次に彼らは重要な不等式

$$C'_{NJ}(X) \le J(X) \tag{7}$$

を示した ([2, Theorem 2])．この不等式を証明するために X の modulus of convexity $\delta_X(\epsilon)$ が用いられたが，かなりハードな計算である．(6), (7) を用いると

$$C_{NJ}(X) \le 1 + \left[\sqrt{2J(X)} - 1\right]^2 \le \frac{J(X)^2}{4} + 1 \tag{8}$$

が容易に示される ([2, Theorem 3])．かくして Maligranda 予想は証明された．2009年，Yang [Y] は類似の手法を用いて Maligranda 予想の別証明を与えた．まず

$$\sup\{\|x+y\| + \|x-y\| :\ x, y \in S_X\} \le J(X) + \sqrt{4J(X) - J(X)^2} \tag{9}$$

を示し，それを用いて次の不等式を証明した：

$$\sup\left\{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 :\ \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\right\} \le J(X)^2 + 4. \tag{10}$$

彼は (10) から Maligranda 予想 (3) が導かれることを示したが，それ以上のものではない．実は (10) と (3) は同値であることが分かる．(9) の証明は (7) に比べてはるかに簡単であるが，(9) から (7) が導かれるわけではない．ここで，(9) の改良版から (7) が導かれることを示す．

2009 年，Wang-Pang [27, Theorem 1] は

$$A_2(X) \leq 1 + \sqrt{J(X) - 1} \tag{11}$$

を示した．$A_2(X)$ は Baronti-Casini-Papini [3] が導入した定数で

$$A_2(X) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} : x, y \in S_X \right\}$$

で定義される．明らかに $\rho_X(1) = A_2(X) - 1$ である．したがって (11) は

$$\rho_X(1) \leq \sqrt{J(X) - 1} \tag{12}$$

と同値である．(11) から (9) が導かれ，また (12) と (4) から容易に (7) が導かれる．Wang-Pang はこの事実には気がついていないようである．

Alonso-Martín-Papini の問い [2, Qestion 1] In all examples we know the inequality

$$C_{NJ}(X) \leq J(X) \tag{13}$$

holds. Does it hold for any Banach space? Does equality hold only when X is not uniformly non-square?

2009 年に Wang-Pang [27, Theorem 4] は (7) と (11) を用いて

$$C_{NJ}(X) \leq J(X) + \sqrt{J(X) - 1}\left[\sqrt{1 + (1 - \sqrt{J(X) - 1})^2} - 1\right] \tag{14}$$

を証明した．(14) は (8) の改良ではあるが，(13) との間には大きな隔たりがある．ここで彼らと別の方法で (14) を示そう．2006 年に Takahashi [25, Theorem 13] は

$$C_{NJ}(X) \leq 1 + \rho_X(1)(\sqrt{(1 - \rho_X(1))^2 + 1} - (1 - \rho_X(1))) \tag{15}$$

を示している (証明は [26, Theorem 2] にある)．

$$f(t) = 1 + t(\sqrt{(1-t)^2 + 1} - (1-t)) \tag{16}$$

が狭義の増加関数であることに注意すると

$$C_{NJ}(X) \leq f(\rho_X(1)) \leq f(\sqrt{J(X) - 1}) \tag{17}$$

が成り立つので，(14) が示される．この手法を用いて Alonso たちの問いに答えよう．2009 年に Takahashi-Kato [26, Theorem 1] は (12) の改良として

$$\rho_X(1) \le \left(1 - \frac{1}{J(X)}\right) \tag{18}$$

を示した．この不等式は

$$\frac{2}{2-\rho_X(1)} \le J(X) \tag{19}$$

と同値である．また (15) から

$$C_{NJ}(X) \le f(\rho_X(1)) \le \frac{2}{2-\rho_X(1)} \tag{20}$$

が示される．右側の不等式で等号成立は X が UNS，すなわち $\rho_X(1) = 1$ の場合に限る．この事実と (19) から次の結果が得られる ([26, Theorem 3])．

Theorem 1. *Let X be a Banach space. Then*

$$C_{NJ}(X) \le J(X), \tag{21}$$

where inequality holds only when X is not uniformly non-square.

この結果は，$C_{NJ}(X)$ と $J(X)$ の関係に関する最も単純で，かつ既知のすべての結果を改良するものであり，Alonso たちの問いにも答える．次に (7) を改良しよう．

Theorem 2. *Let X be a Banach space. Then*

$$C'_{NJ}(X) \le \frac{(1+\sqrt{J(X)-1})^2}{2} \le J(X), \tag{22}$$

where both inequalities are strict if X is uniformly non-square.

(6) と (22) から (21) の別証明が得られる．

Corollary 3. *Let X be a Banach space. Then*

$$C_{NJ}(X) \le 1 + (\sqrt{2C'_{NJ}} - 1)^2 \le J(X), \tag{23}$$

where the second inequality is strict only when X is uniformly non-square.

最後に (21) より強い不等式を紹介する．

Theorem 4. *Let X be a Banach space. Then*

$$C_{NJ}(X) \leq \frac{\left[\sqrt{2}(J(X)-1)+\sqrt{(J(X)-1)^2+1}\right]^2}{J(X)^2} \leq J(X),$$

where the second inequality is strict only when X is uniformly non-square.

参考文献

[1] J. Alonso and E. Llorens-Fuster, Geometric mean and triangles inscribed in a semicircle in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1271-1283.

[2] J. Alonso, P. Martin and P. L. Papini, Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach spaces, Studia Math. **188** (2008), 135-150.

[3] M. Baronti, E. Casini and P. L. Papini, Triangles inscribed in a semicircle, in Minkowski planes, J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 124-146.

[4] E. Casini, About some parameters of normed linear spaces, Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **80** (1986), 11-15.

[5] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[6] M. M. Day, Some characterizations of inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 320-337.

[7] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao and S. Tasena, On a generalized James constant, J. Math. Anal. Appl. **285** (2003), 419-435.

[8] T. Figiel, On the moduli of convexity and smoothness, Studia Math. **56** (1976), 121-155.

[9] J. Gao, A Pythagorean approach in Banach spaces, J. Inequal. Appl. **2006**: Article ID 94982 (2006), 1-11.

[10] J. Gao and K. S. Lau, On two classes of Banach spaces with uniform normal structure, Studia Math. **99** (1991), 41-56.

[11] J. Gao and S. Saejung, Remarks on a Pythagorean approach in Banach spaces, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), 213-220.

[12] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990.

[13] H. Ishihara and W. Takahashi, Modulus of convexity, characteristic of convexity and fixed point theorems, Kodai Math. J. **10** (1987), 197-208.

[14] R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.

[15] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36** (1935), 719-723.

[16] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James, Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficients of Banach spaces, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[17] M. Kato and Y. Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1055-1062.

[18] M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces, J. Inequal. Appl. **2** (1998), 89-97.

[19] J. Lindenstrauss, On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J. **10** (1963), 241-252.

[20] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II. Function Spaces, Springer, Berlin, 1979.

[21] L. Maligranda, L. I. Nikolova, L. E. Persson and T. Zachariades, On n-th James and Khinchine constants of Banach spaces, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), 1-22.

[22] L. Y. Nikolova, L. E. Persson and T. Zachariades, A study of some constants for Banach spaces, C. R. Acad. Bulg. Sci. **57** (2004), 5-8.

[23] S. Saejung, On James and von Neumann-Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), 1018-1024.

[24] M. A. Smith and B. Turett, Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), 105-118.

[25] Y. Takahashi, Some geometric constants of Banach spaces, A unified approach, In: Banach and Function Spaces II, eds. M. Kato and L. Maligranda, Yokohama Publishers, Yokohama, pp. 191-220, 2007.

[26] Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), 602-609.

[27] F. Wang and B. Pang, Some inequalities concerning the James constant in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), 305-310.

[28] F. Wang and C. Yang, Uniform non-squareness, uniform normal structure and Gao's constants, Math. Inequal. Appl. **11** (2008), 607-614.

[29] C. Yang, A note on Jordan-von Neumann constant and James constant, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 98-102.

[30] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 555-565.

Yasuji Takahashi
Department of System Engineering
Okayama Prefectural University
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp

Mikio Kato
Department of Basic Sciences
Kyushu Institute of Technology
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp