数理解析研究所講究録
第 1683 巻 2010 年 62-77

バナッハ空間における凸最小化問題と関連する不動点定理
(Fixed point theorems related to convex minimization problems in Banach spaces)

大分大学 工学部 知能情報システム工学科 高阪 史明*
(KOHSAKA, Fumiaki,
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University)

概要

バナッハ空間における堅非拡大型の写像 ((P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像) に対する基本性質，不動点定理及び連続性定理を述べる．これらの非線形写像は，ヒルベルト空間における堅非拡大写像 (firmly nonexpansive 写像) のバナッハ空間における一般化である．

1 はじめに

ヒルベルト空間における凸最小化問題 (より一般には，極大単調作用素に対する零点問題) は，堅非拡大写像 (firmly nonexpansive 写像) [5] に対する不動点問題と捉えられる．また，堅非拡大写像のクラスはバナッハ空間においてより一般的に定義がなされている [6]．バナッハ空間の場合，堅非拡大写像に対する不動点問題は増大作用素に対する零点問題と関連することがよく知られている [7].

文献 [2] において，バナッハ空間における三種類の非線形写像 ((P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像)) が導入された．これらは，バナッハ空間における凸最小化問題と関わりの深い写像である．特に，空間がヒルベルト空間であれば，これらのクラスは堅非拡大写像のクラスと一致する．また，(Q) 型の写像は，[18] において堅非拡大型写像 (firmly

* 〒870-1192 大分県大分市旦野原 700 (Dannoharu 700, Oita-shi, Oita 870-1192, Japan); email: f-kohsaka@csis.oita-u.ac.jp

nonexpansive-type mapping) として定義されたものであり，このクラスは Bregman 距離 D を用いて定義された D-firm operator [4] のクラスに含まれる．

本稿では，(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像に対する基本性質，不動点定理及び連続性定理を述べる．本論文の構成は以下の通りである．§2 で基本概念の定義や用語の解説を行う．§3 では，ヒルベルト空間における堅非拡大写像と凸最小化問題の関連を述べる．§4 で，バナッハ空間における堅非拡大写像の基本性質を述べ，§5 では，(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像の定義を述べるとともにそれらの基本性質をまとめる．§6 において，(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像に対する不動点定理及び連続性定理を述べる．§7 では，凸最小化問題，変分不等式問題及びミニ・マックス問題への応用を議論する．

2 準備

本稿で扱う線形空間は全て実線形空間とする．$\mathbb{R}$ で実数全体の集合を表す．E をバナッハ空間とするとき，E^* でその双対空間を表す．E と E^* のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．空間 E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に強収束すること及び弱収束することをそれぞれ $x_n \to x$ 及び $x_n \rightharpoonup x$ で表す．$x \in E$ 及び $x^* \in E^*$ に対し，$\langle x, x^* \rangle$ で $x^*(x)$ を表す．$S(E)$ で E の単位球面 $\{x \in E : \|x\| = 1\}$ を表す．E から E^* への双対写像 $J\colon E \to 2^{E^*}$ は

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in E)$$

で定義される．

バナッハ空間 E が滑らかであるとは，任意の $x, y \in S(E)$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在することを言う．E のノルムが Fréchet 微分可能 (resp. 一様に Gâteaux 微分可能) であるとは，任意の $x \in S(E)$ に対して (resp. 任意の $y \in S(E)$ に対して)，(2.1) が $y \in S(E)$ に関して (resp. $x \in S(E)$ に関して) 一様収束することを言う．また，E が一様に滑らかであるとは，(2.1) が $x, y \in S(E)$ に関して一様収束することを言う．

バナッハ空間 E が狭義凸であるとは，$x, y \in S(E)$ かつ $x \neq y$ ならば $\|(x + y)/2\| < 1$ が成り立つことを言う．また，E が一様凸であるとは，任意の $\varepsilon \in (0, 2]$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$x, y \in S(E)$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$ が成り立つことを言う．さらに，E が Kadec–Klee 条件を満たすとは，E の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \rightharpoonup x \in E$ 及び $\|x_n\| \to \|x\|$ を満たすとき，$x_n \to x$ が成り立つことを言う．

バナッハ空間の幾何学及び以下の基本性質については，[8, 29, 30] を参照すると良い．

補題 2.1. E をバナッハ空間とするとき，次が成り立つ.

(1) E が回帰的であるとき，E が滑らかであることは E^* が狭義凸であることに同値である.

(2) E が滑らかであることは J が一価写像であることに同値である．このとき，J は E のノルム位相及び E^* の弱*位相に関して連続である.

(3) E が滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間であるとき，J は E から E^* への全単射であり，J^{-1} は E^* から E への双対写像と一致する.

(4) E が一様凸であるとき，E は狭義凸かつ回帰的であり，Kadec–Klee 条件を満たす.

(5) E が一様に滑らかであることは E^* が一様凸であることに同値である.

(6) E が Fréchet 微分可能なノルムを持つとき，J はノルムの意味で連続である.

(7) E が一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つとき，J は E の任意の空でない有界部分集合上で，E のノルム位相及び E^* の弱*位相に関して一様連続である.

(8) E が一様に滑らかであるとき，J は E の任意の空でない有界部分集合上で，ノルムの意味で一様連続である.

E をバナッハ空間とし，$A\colon E \to 2^E$ とするとき，A のグラフ $G(A)$，定義域 $D(A)$ 及び値域 $R(A)$ は次で定義される.

$$\begin{aligned} G(A) &= \{(x, x') \in E \times E : x' \in Ax\} \\ D(A) &= \{x \in E : Ax \neq \emptyset\} \\ R(A) &= \bigcup_{x \in D(A)} Ax. \end{aligned}$$

A が増大作用素 (accretive operator) であるとは，任意の $(x, x'), (y, y') \in G(A)$ に対して，ある $j \in J(x-y)$ が存在して，$\langle x' - y', j\rangle \geq 0$ が成り立つことを言う．A が m-増大作用素 (m-accretive operator) であるとは，A が増大作用素であり，$R(I + rA) = E$ が任意の $r > 0$ に対して成り立つことを言う.

また，$B\colon E \to 2^{E^*}$ とするとき，B のグラフ $G(B)$，定義域 $D(B)$ 及び値域 $R(B)$ は次で定義される.

$$\begin{aligned} G(B) &= \{(x, x^*) \in E \times E^* : x^* \in Bx\} \\ D(B) &= \{x \in E : Bx \neq \emptyset\} \\ R(B) &= \bigcup_{x \in D(B)} Bx. \end{aligned}$$

B が単調作用素 (monotone operator) であるとは，任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in G(B)$ に

対して，$\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0$ が成り立つことを言う．B が極大単調作用素 (maximal monotone operator) であるとは，B が単調作用素であり，$G(B) \subsetneq G(B')$ となる単調作用素 $B'\colon E \to 2^{E^*}$ が存在しないことを言う．

E がヒルベルト空間の場合，$E = E^*$ 及び $J = I$ (E 上の恒等写像) が成り立つため，増大性と単調性は一致する．また，m-増大性と極大単調性が一致することも知られている [30,31].

E をバナッハ空間とし，$f\colon E \to (-\infty, \infty]$ とするとき，f が proper であるとは，$f(x) \in \mathbb{R}$ となる $x \in E$ が存在することを言う．また，f が下半連続であるとは，任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して，$\{x \in E : f(x) \leq r\}$ が E の閉集合となることを言う．さらに，f が凸であるとは，任意の $x, y \in E$ と $t \in (0,1)$ に対して，

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことを言う．$\operatorname{argmin}_{y\in E} f(y)$ で集合 $\{x \in E : f(x) = \inf f(E)\}$ を表す．Rockafellar の定理 [23,24] によって，f が proper で下半連続な凸関数であるとき，

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle y-x, x^*\rangle \leq f(y) \quad (\forall y \in E)\} \quad (\forall x \in E)$$

で定義される f の劣微分作用素 (subdifferential operator) $\partial f\colon E \to 2^{E^*}$ は極大単調作用素である．この場合，$(\partial f)^{-1}(0) = \operatorname{argmin}_{y\in E} f(y)$ が成り立つ．非線形関数解析学及び凸解析学に関しては [29–31] を参照すると良い．

C をバナッハ空間 E の空でない部分集合とし，$T\colon C \to E$ とするとき，$F(T)$ で T の不動点全体の集合を表す．すなわち，$F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ である．また，I で C 上の恒等写像を表す．点 $u \in C$ が T の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) [22] であるとは，ある C の点列 $\{z_n\}$ で $z_n \rightharpoonup u$ かつ $z_n - Tz_n \to 0$ を満たすものが存在することを言う．$\widehat{F}(T)$ で T の漸近的不動点全体の集合を表す．本稿を通して，$\phi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ で

$$\phi(u,v) = \|u\|^2 - 2\langle u, Jv\rangle + \|v\|^2 \quad (\forall u, v \in E)$$

により定義される関数を表す．また，T が relatively nonexpansive 写像 [20,21] であるとは，$F(T) = \widehat{F}(T) \neq \emptyset$ かつ

$$\phi(u, Tx) \leq \phi(u, x) \quad (\forall u \in F(T),\ x \in C)$$

が成り立つことを言う．さらに，relatively nonexpansive 写像 T が strongly relatively nonexpansive [22] であるとは，$\{z_n\}$ が C の有界列で，ある $u \in F(T)$ に対して

$$\phi(u, z_n) - \phi(u, Tz_n) \to 0$$

が成り立つとき，$\phi(Tz_n, z_n) \to 0$ となることを言う．

E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，D を E の空でない部分集合で JD が E^* の閉凸集合であるものとする．このとき，E から C 上への距離射影 P_C 及び E から C 上への generalized projection Π_C [1,14] はそれぞれ次で定義される．

$$P_C x = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \|y - x\| \quad (\forall x \in E), \quad \Pi_C x = \operatorname*{argmin}_{y \in C} \phi(y, x) \quad (\forall x \in E).$$

また，E から D 上への sunny generalized nonexpansive retraction R_D [11] は次を満たす写像である．

- $R_D \colon E \to D$ は上への写像で，$R_D^2 = R_D$ を満たす．
- $\phi(R_D x, u) \le \phi(x, u) \quad (\forall x \in E, u \in D)$.
- $R_D(R_D x + t(x - R_D x)) = R_D x \quad (\forall x \in E, t > 0)$.

このような写像 R_D は，存在すれば一意であることが知られている [11]．また，上記の仮定の下では，R_D が存在して $R_D = J^{-1}\Pi_{JD}J$ が成り立つことも知られている [17]．

3 ヒルベルト空間における堅非拡大写像

E をヒルベルト空間とし，C を E の空でない部分集合とする．このとき，写像 $T \colon C \to E$ が堅非拡大 (firmly nonexpansive) [5] であるとは，

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \langle Tx - Ty, x - y \rangle \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つことを言う．Schwarz の不等式により，堅非拡大写像 $T \colon C \to E$ は非拡大 (nonexpansive) である．つまり，$\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ $(\forall x, y \in C)$ が成り立つ．

また，$g \colon E \to \mathbb{R}$ を連続な凸関数し，C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，次の問題を考える．

$$\text{(P1)} \quad g(u) = \min g(C) \text{ となる } u \in C \text{ を求めよ．}$$

この問題に対し，

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \in E \setminus C) \end{cases}$$

により proper で下半連続な凸関数 $f \colon E \to (-\infty, \infty]$ を定めると，問題 (P1) は次の問題と等価である．

(P2) $f(u) = \min f(E)$ となる $u \in E$ を求めよ.

ここで，各 $x \in E$ に対して，

$$h_x(y) = f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \quad (\forall y \in E)$$

により proper で下半連続な凸関数 $h_x \colon E \to (-\infty, \infty]$ を定めると，h_x は E 上でただ一つの最小点を持つ．つまり，

$$f(z_x) + \frac{1}{2}\|z_x - x\|^2 = \min\left\{f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2 : y \in E\right\}$$

となる $z_x \in E$ がただ一つ存在する．そこで，$Sx = z_x$ $(\forall x \in E)$ によって写像 $S \colon E \to E$ (∂f のリゾルベント) を定義することが出来る．言い換えると，

$$Sx = \operatorname*{argmin}_{y \in E}\left\{f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\right\} = (I + \partial f)^{-1}x \quad (\forall x \in E)$$

となる．この写像は堅非拡大であり，

$$Su = u \Longleftrightarrow f(u) = \min f(E)$$

が成り立つ．よって，問題 (P1) (又は問題 (P2)) は堅非拡大写像 S に対する不動点問題である．詳しくは，[31] を参照すると良い．

4 バナッハ空間における堅非拡大写像

E をバナッハ空間とし，$J \colon E \to E^*$ を双対写像とする．また，C を E の空でない部分集合とし，$T \colon C \to E$ とする．このとき，T が堅非拡大写像 (firmly nonexpansive) [6] であるとは,

$$\|Tx - Ty\| \le \|r(x - y) + (1 - r)(Tx - Ty)\| \quad (\forall r > 0,\ x, y \in C)$$

が成り立つことを言う．堅非拡大写像については [7, 9, 10] を参照すると良い．以下の補題 4.1 によって, T が堅非拡大であることは, 任意の $x, y \in C$ に対して，ある $j \in J(Tx - Ty)$ が存在して,

$$\langle x - Tx - (y - Ty), j\rangle \ge 0$$

が成り立つことに同値である．よって，E が滑らかな場合，J は一価写像であるので，T が堅非拡大であることは

$$\langle x - Tx - (y - Ty), J(Tx - Ty)\rangle \ge 0 \quad (\forall x, y \in C) \tag{4.1}$$

と同値である.

補題 4.1 **([29, 30]).** E をバナッハ空間とし, $J: E \to E^*$ を双対写像とする. また, $u, v \in E$ とする. このとき, 次は同値である.

(1) $\|u\| \leq \|u + rv\| \quad (\forall r > 0)$.
(2) $\langle v, j \rangle \geq 0$ となる $j \in Ju$ が存在する.

また, [7] で述べられているように, 堅非拡大写像のクラスは増大作用素のリゾルベントのクラスと一致する.

補題 4.2. E をバナッハ空間とし, C を E の空でない部分集合とする. また, $T: C \to E$ とする. このとき, 次は同値である.

(1) T が堅非拡大である.
(2) ある増大作用素 $A: E \to 2^E$ が存在して, $Tx = (I + A)^{-1}x \ (\forall x \in C)$ となる.

このとき, $F(T) = A^{-1}0$ が成り立つ.

5 バナッハ空間における (P) 型, (Q) 型及び (R) 型の写像

E を滑らかなバナッハ空間とし, $J: E \to E^*$ を双対写像とする. また, C を E の空でない部分集合とし, $T: C \to E$ とする. このとき, 次の定義を与える [2].

- T が (P) 型の写像 (mapping of type (P)) であるとは,
$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C)$$
が成り立つことを言う.
- T が (Q) 型の写像 (mapping of type (Q)) であるとは,
$$\langle Tx - Ty, Jx - JTx - (Jy - JTy) \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C)$$
が成り立つことを言う. これは, 次と同値である.
$$\begin{aligned} &\phi(Tx, Ty) + \phi(Ty, Tx) + \phi(Tx, x) + \phi(Ty, y) \\ &\quad \leq \phi(Tx, y) + \phi(Ty, x) \quad (\forall x, y \in C). \end{aligned}$$
- T が (R) 型の写像 (mapping of type (R)) であるとは,
$$\langle x - Tx - (y - Ty), JTx - JTy \rangle \geq 0 \quad (\forall x, y \in C)$$

が成り立つことを言う．これは，次と同値である．

$$\begin{aligned}\phi(Tx,Ty)+\phi(Ty,Tx)+\phi(x,Tx)+\phi(y,Ty)&\\ \leq \phi(x,Ty)+\phi(y,Tx) \quad (\forall x,y\in C).&\end{aligned}$$

補足 5.1. §1 で述べたように，[18] において，(Q) 型の写像は堅非拡大型写像 (firmly nonexpansive-type mapping) と呼ばれていた．この写像のクラスは，より一般の D-firm operator [4] のクラスに含まれる．また，[12] において，(R) 型の写像は mapping of firmly generalized nonexpansive type と呼ばれている．

これらの写像のクラスは，それぞれ，単調作用素の三種類のリゾルベントのクラスと一致する．

命題 5.2 ([2])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$S\colon C\to E$ とする．このとき，次は同値である．

(1) S が (P) 型である．

(2) ある単調作用素 $A\colon E\to 2^{E^*}$ が存在して，$Sx=(I+J^{-1}A)^{-1}x$ $(\forall x\in C)$ が成り立つ．

このとき，$F(S)=A^{-1}0$ が成り立つ．

命題 5.3 ([19])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$T\colon C\to E$ とする．このとき，次は同値である．

(1) T が (Q) 型である．

(2) ある単調作用素 $A\colon E\to 2^{E^*}$ が存在して，$Tx=(J+A)^{-1}Jx$ $(\forall x\in C)$ が成り立つ．

このとき，$F(T)=A^{-1}0$ が成り立つ．

命題 5.4 ([2])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$U\colon C\to E$ とする．このとき，次は同値である．

(1) U が (R) 型である．

(2) ある単調作用素 $A\colon E^*\to 2^{E}$ が存在して，$Ux=(I+AJ)^{-1}x$ $(\forall x\in C)$ が成り立つ．

このとき，$F(U)=(AJ)^{-1}0$ が成り立つ．

これら三つの写像には，次の相互関係がある．

命題 5.5 ([2])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$T\colon C \to E$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) T が (P) 型であることは，$I - T\colon C \to E$ が (R) 型であることに同値である．
(2) T が (Q) 型であることは，$JTJ^{-1}\colon JC \to E^*$ が (R) 型であることに同値である．
(3) T が (R) 型であることは，$JTJ^{-1}\colon JC \to E^*$ が (Q) 型であることに同値である．

また，次の例も重要である．詳しくは，[2] を参照すると良い．

例 5.6. E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，D を E の空でない部分集合で，JD が E^* の閉凸集合であるものとする．このとき，次が成り立つ．

(1) E から C 上への距離射影 $P_C\colon E \to C$ は (P) 型であり，$F(P_C) = C$ が成り立つ．
(2) E から C 上への generalized projection $\Pi_C\colon E \to C$ は (Q) 型であり，$F(\Pi_C) = C$ が成り立つ．
(3) E から D 上への sunny generalized nonexpansive retraction $R_D\colon E \to D$ は (R) 型であり，$F(R_D) = D$ が成り立つ．

例 5.7. E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，$f\colon E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．また，$g\colon E^* \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $Sx = \operatorname{argmin}_{y\in E} \left\{ f(y) + \|y - x\|^2/2 \right\}$ $(\forall x \in E)$ で定義される写像 $S\colon E \to E$ は (P) 型であり，$F(S) = \operatorname{argmin}_{y\in E} f(y)$ が成り立つ．
(2) $Tx = \operatorname{argmin}_{y\in E} \{ f(y) + \phi(y, x)/2 \}$ $(\forall x \in E)$ で定義される写像 $T\colon E \to E$ は (Q) 型であり，$F(T) = \operatorname{argmin}_{y\in E} f(y)$ が成り立つ．
(3) $Ux = J^{-1}\left(\operatorname{argmin}_{y^*\in E^*} \left\{ g(y^*) + \left(\|y^*\|^2 - 2\langle x, y^* \rangle + \|x\|^2 \right)/2 \right\} \right)$ $(\forall x \in E)$ で定義される写像 $U\colon E \to E$ は (R) 型であり，$F(U) = J^{-1}\left(\operatorname{argmin}_{y^*\in E^*} g(y^*) \right)$ が成り立つ．

(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像に関して，次が成り立つ．

補題 5.8 ([3])**.** E を滑らかなバナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$S\colon C \to E$ を (P) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) C が閉凸であれば，$F(S)$ も閉凸である．
(2) $F(S) = \widehat{F}(S)$.
(3) $t \in [0,1]$ とするとき，$tI + (1-t)S\colon C \to E$ も (P) 型の写像である．

補題 5.9 ([18])**.** E を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ狭義凸バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$T\colon C \to E$ を (Q) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $F(T) = \widehat{F}(T)$.
(2) $F(T) \neq \emptyset$ のとき，T は strongly relatively nonexpansive 写像である．

補足 5.10. 補題 5.9 において，C が閉凸であれば $F(T)$ も閉凸となる [21].

補題 5.11 ([2])**.** E を滑らかなバナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$U\colon C \to E$ を (R) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) C が閉凸であれば，$U^{-1}0$ も閉凸である．
(2) $\{x_n\}$ が C の点列で，$x_n \rightharpoonup p$ かつ $Ux_n \to 0$ を満たすとき，$p \in U^{-1}0$ が成り立つ．
(3) E が回帰的で E^* が一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つとする．$\{z_n\}$ が C の点列で，$Jz_n \rightharpoonup u^* \in JC$ かつ $Jz_n - JUz_n \to 0$ を満たすとき，$J^{-1}u^* \in F(U)$ となる．

6 不動点定理と連続性定理

まず，(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像に対する不動点定理を述べる．

定理 6.1 ([2])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない有界閉凸集合とする．また，$S\colon C \to E$ を (P) 型の写像とし，$P_C\colon E \to C$ を C 上への距離射影とする．このとき，$P_C S$ は不動点を持つ．特に，$S(C) \subset C$ であれば，S は不動点を持つ．

定理 6.2 ([18])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，$T\colon C \to C$ を (Q) 型の写像とする．このとき，T が不動点を持つことは，$\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在することに同値である．特に，C が有界であれば，T は不動点を持つ．

定理 6.2 は，[28] における手法を参考にして証明した次の nonspreading 写像に対する不動点定理の系である．

定理 6.3 ([19]). E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，$T\colon C \to C$ を nonspreading 写像とする．すなわち，

$$\phi(Tx,Ty)+\phi(Ty,Tx)\leq \phi(Tx,y)+\phi(Ty,x) \quad (\forall x,y\in C)$$

が成り立つとする．このとき，T が不動点を持つことは，$\{T^n x\}$ が有界となるような $x\in C$ が存在することに同値である．特に，C が有界であれば，T は不動点を持つ．

補題 5.5 と定理 6.2 の系として，次の (R) 型の写像に対する不動点定理を得ることが出来る．

定理 6.4 ([2]). E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合で JC が E^* の閉凸集合であるものとする．また，$U\colon C\to C$ を (R) 型の写像とする．このとき，U が不動点を持つことは，$\{U^n x\}$ が有界となるような $x\in C$ が存在することに同値である．特に，C が有界であれば，U は不動点を持つ．

次に，(P) 型，(Q) 型及び (R) 型の写像に対する連続性定理を述べる．

定理 6.5 ([2]). E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$S\colon C\to E$ を (P) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) C の任意の空でない有界集合 X に対し，$S(X)$ は有界である．
(2) $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n\to x\in C$ であるとき，$Sx_n \rightharpoonup Sx$，$J(x_n-Sx_n)\rightharpoonup J(x-Sx)$ 及び $\|x_n-Sx_n\|\to\|x-Sx\|$ となる．
(3) $J(I-S)\colon C\to E^*$ は単調で demicontinuous である．すなわち，$J(I-S)$ は単調作用素であり，また，C の点列 $\{x_n\}$ が $x_n\to x\in C$ を満たすとき，$J(I-S)x_n\rightharpoonup J(I-S)x$ が成り立つ．
(4) E が Kadec–Klee 条件を満たすとき，S はノルムの意味で連続である．
(5) E が一様凸であるとき，S は C の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である．
(6) E が一様に滑らかで一様凸であるとき，$J(I-S)$ は C の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である．

定理 6.6 ([2]). E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$T\colon C\to E$ を (Q) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) C の任意の空でない有界集合 X に対し，$T(X)$ は有界である．
(2) E のノルムが Fréchet 微分可能であり，$\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \to x \in C$ を満たすとき，$Tx_n \rightharpoonup Tx$，$JTx_n \rightharpoonup JTx$ 及び $\|Tx_n\| \to \|Tx\|$ が成り立つ．
(3) E のノルムが Fréchet 微分可能であり E が Kadec–Klee 条件を満たすとき，T はノルムの意味で連続である．
(4) E が一様に滑らかで一様凸であるとき，T は C の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である．

定理 6.7 ([2])**.** E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない部分集合とする．また，$U: C \to E$ を (R) 型の写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) C の任意の空でない有界集合 X に対し，$U(X)$ は有界である．
(2) $\{x_n\}$ が C の点列で $x_n \to x \in C$ であるとき，$Ux_n \rightharpoonup Ux$，$JUx_n \rightharpoonup JUx$，及び $\|Ux_n\| \to \|Ux\|$ が成り立つ．
(3) $JU: C \to E^*$ は単調で demicontinuous である．
(4) E が Kadec–Klee 条件を満たすとき，U はノルムの意味で連続である．
(5) E が一様凸であるとき，U は C の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である．
(6) E が一様に滑らかで一様凸であるとき，JU は C の任意の空でない有界集合上でノルムの意味で一様連続である．

7 応用

本節では，§6 で得た (Q) 型の写像に対する不動点定理 (定理 6.2) をより具体的な問題へ適用する．まず，次の凸最小化問題への系を得ることが出来る．

系 7.1. E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，$f: E \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．また，$T: E \to E$ を

$$Tx = \operatorname*{argmin}_{y \in E} \left\{ f(y) + \frac{1}{2}\phi(y, x) \right\} \quad (\forall x \in E)$$

で定義する．このとき，$\operatorname{argmin}_{y \in E} f(y)$ が空でないことは，$\{T^n x\}$ が有界となるような $x \in C$ が存在することに同値である．

証明. 例 5.7 より，写像 $T: E \to E$ は (Q) 型の写像であり，$F(T) = \operatorname{argmin}_{y \in E} f(y)$ が

成り立つ．よって，定理 6.2 から結論を得る． □

同様に，変分不等式問題への系を得ることが出来る．

系 7.2. E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C を E の空でない有界閉凸集合とする．また，$A\colon C \to E^*$ を hemicontinuous な単調写像とする．このとき，ある $u \in C$ が存在して，$\langle y-u, Au\rangle \geq 0$ $(\forall y \in C)$ が成り立つ．

証明. 写像 A に対する C 上の変分不等式問題の解集合を

$$VI(C,A) = \{u \in C : \langle y-u, Au\rangle \geq 0 \quad (\forall y \in C)\}$$

で表す．写像 $B\colon E \to 2^{E^*}$ を

$$Bx = \begin{cases} (A+N_C)(x) & (x \in C) \\ \emptyset & (x \notin C) \end{cases}$$

により定義すると，B は極大単調作用素であり，$B^{-1}0 = VI(C,A)$ が成り立つ [26] ([13, 15, 27] においても同様の応用が議論されている)．ただし，$N_C(x)$ は C の $x \in C$ における正規錐 (normal cone) である．すなわち，

$$N_C(x) = \{x^* \in E^* : \langle y-x, x^*\rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C)\}$$

である．そこで，$Tx = (J+B)^{-1}Jx$ $(\forall x \in E)$ で B のリゾルベントを定義すると，補題 5.3 より，$T\colon E \to E$ は (Q) 型の写像であり，$F(T) = B^{-1}0 = VI(C,A)$ が成り立つ．また，C が有界であり，$T(E) \subset C$ であるので，任意の $x \in E$ に対して $\{T^n x\}$ は有界である．よって，定理 6.2 から結論を得る． □

最後に，ミニ・マックス問題への系を得る．

系 7.3. E と F を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とし，C と D をそれぞれ E と F の空でない有界閉凸集合とする．また，$L\colon C \times D \to \mathbb{R}$ が次を満たすとする．

(1) 任意の $x \in C$ に対して，$y \mapsto L(x,y)$ が下半連続な凸関数である．
(2) 任意の $y \in D$ に対して，$x \mapsto L(x,y)$ が上半連続な凹関数である．

このとき，

$$\max_{x\in C}\min_{y\in D} L(x,y) = \min_{y\in D}\max_{x\in C} L(x,y)$$

が成り立つ．

証明. $E\times F$ のノルムを

$$\|(x,y)\|_{E\times F}=\sqrt{\|x\|_E^2+\|y\|_F^2}\quad (\forall(x,y)\in E\times F)$$

で定義すると，

$$(E\times F,\|\cdot\|_{E\times F})^*=(E^*\times F^*,\|\cdot\|_{E^*\times F^*})$$

となる．ただし，$E^*\times F^*$ のノルムは

$$\|(x^*,y^*)\|_{E^*\times F^*}=\sqrt{\|x^*\|_{E^*}^2+\|y^*\|_{F^*}^2}\quad (\forall(x^*,y^*)\in E^*\times F^*)$$

で定義する．仮定より，$E\times F$ は回帰的であり，$E\times F$ 及び $E^*\times F^*$ が狭義凸となる．よって，$E\times F$ は滑らかでもある．さらに，双対写像 $J\colon E\times F\to E^*\times F^*$ は

$$J(x,y)=(J_Ex,J_Fy)\quad (\forall(x,y)\in E\times F)$$

で与えられる．ここで，$J_E\colon E\to E^*$ 及び $J_F\colon F\to F^*$ は双対写像である．また，$K\colon E\times F\to[-\infty,\infty]$ を

$$K(x,y)=\begin{cases}L(x,y) & ((x,y)\in C\times D)\\ \infty & (x\in C,\ y\in F\setminus D)\\ -\infty & (x\in E\setminus C)\end{cases}$$

により定義し，$A_L\colon E\times F\to 2^{E^*\times F^*}$ を

$$A_L(x,y)=\begin{cases}\partial(-K(\cdot,y))(x)\times\partial K(x,\cdot)(y) & ((x,y)\in C\times D)\\ \emptyset & ((x,y)\notin C\times D)\end{cases}$$

により定義すると，A_L は極大単調作用素となり，$A_L^{-1}(0,0)$ は L の鞍点全体の集合 S_L と一致する [25] (文献 [16,31] も参照すると良い)．ここで，$(x_0,y_0)\in S_L$ は

$$L(x,y_0)\le L(x_0,y_0)\le L(x_0,y)\quad (\forall(x,y)\in C\times D)$$

が成り立つことを意味する．そこで，$T(x,y)=(J+A_L)^{-1}J(x,y)$ $(\forall(x,y)\in E\times F)$ により，A_L のリゾルベントを定義することが出来る．補題 5.3 より，この写像 $T\colon E\times F\to E\times F$ は (Q) 型の写像であり，$F(T)=A_L^{-1}(0,0)=S_L$ が成り立つ．仮定より，$C\times D$ は有界であり，$T(E\times F)\subset C\times D$ であるので，任意の $(x,y)\in E\times F$ に対して，$\{T^n(x,y)\}$ は有界である．よって，定理 6.2 により，T の不動点すなわち L の鞍点 (x_0,y_0) が存在する．C と D が弱コンパクト集合であり，L が第一変数について弱上半連続かつ第二変数について弱下半連続であることに注意して，

$$L(x_0,y_0)=\min_{y\in D}L(x_0,y)\le\max_{x\in C}\min_{y\in D}L(x,y)$$

$$L(x_0, y_0) = \max_{x \in C} L(x, y_0) \geq \min_{y \in D} \max_{x \in C} L(x, y)$$

を得る．これより，

$$\max_{x \in C} \min_{y \in D} L(x, y) \geq \min_{y \in D} \max_{x \in C} L(x, y)$$

が成り立つ．逆の不等号が成立することは自明である．以上より，結論を得る． □

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 1–17.

[4] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes, *Bregman monotone optimization algorithms*, SIAM J. Control Optim. **42** (2003), 596–636 (electronic).

[5] F. E. Browder, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[6] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[7] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[8] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[9] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[10] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[12] ———, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.

[13] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[16] ———, *Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 203–215.

[17] ———, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[18] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[19] ———, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[20] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[21] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[22] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[23] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[24] ———, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.

[25] ———, *Monotone operators associated with saddle-functions and minimax problems*, Nonlinear Functional Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVIII, Part 1, Chicago, Ill., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 241–250.

[26] ———, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[27] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[28] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[29] ———, *Nonlinear Functional Analysis. -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[30] ———, *Convex Analysis & Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[31] ———, *Introduction to Nonlinear & Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.