数理解析研究所講究録
第 1684 巻 2010 年 36-48

離散ウェーブレット変換に伴う射影作用素の平均の平行移動不変性

Translation invariance of averages of the projection operators associated with discrete wavelet transform

大阪電気通信大学・工学部・基礎理工学科　萬代 武史 (Takeshi MANDAI)
Department of Engineering Science, Faculty of Engineering,
Osaka Electro-Communication University
E-mail: mandai@isc.osakac.ac.jp

本講演は，大阪教育大学の芦野 隆一氏，守本 晃氏との共同研究に基づくものです.

1　序

離散ウェーブレット変換（今回は直交ウェーブレットのみ考える）のコアの考えは，関数（信号）をスケールレベルに応じた近似と詳細に順次分解していくことであるが，冗長性がない反面，元の関数（データ）がずれたとき近似と詳細への分解のされ方が大きく変化する．特に応用分野では，この欠点を克服するさまざまな試みがなされてきた．章忠氏および戸田浩氏（[1, 3, 4, 2] など）は Ivan W. Selesnick の結果 ([8]) を基に，複素数値離散ウェーブレット変換の枠組みで，Meyer のウェーブレットを利用し，完全に平行移動不変性[1]を実現した．

彼らの結果の核の部分は，数学的には，射影作用素の平均を用いて表現することができる．この結果を数学的に拡張することで，彼らの結果の背後にある数学的な「からくり」をより明らかにしたい．結果を数学的に拡張し，大きな枠組みの中で位置づけることで，本質に迫れるはずである．

1 つのキーは，ヒルベルト変換を「拡張」したユニタリ作用素 $\mathscr{H}_c$ と平行移動作用素を少し「変形」したユニタリ作用素 $T_c^\dagger$ である．

[1]彼らは完全シフト不変性と呼んでいる．本稿では，シフトは，整数の平行移動の意味で使うことにする．

2 準備

まず，基本的な記号や用語などを導入しておこう．

実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とし，$\mathbb{R}_{\pm} := \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s > 0\}$ (複号同順) とする．2乗可積分，すなわち $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt < \infty$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の可測関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ には，

$$\text{内積}\ \langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \ \ \text{やノルム}\ \ \|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt}$$

が考えられる．$L^2(\mathbb{R})$ などの関数空間を考える時は，ほとんどいたるところ等しい関数[2]は同一視している．今後，本当は「ほとんどいたるところ」とつけるべきところも省略する．

関数系 $\{f_l\}_{l\in L} \subset L^2(\mathbb{R})$ に対して，これらで生成される部分空間

$$\Big\{ \sum_{l\in L} c_k f_l \mid c_l\ (l \in L)\ \text{は有限個を除いて}\ 0 \Big\}$$

の閉包を $\overline{\mathrm{Span}}\{f_l\}_{l\in L}$ と書き，$\{f_l\}_{l\in L}$ で生成される**閉**部分空間と呼ぶ．

$\langle f, g\rangle = 0$ のとき，f と g とは**直交する**と言う．$\langle f_l, f_{l'}\rangle = \delta_{l,l'}$ $(l, l' \in L)$ を満たす[3]とき，$\{f_l\}_{l\in L}$ は**正規直交系**であると言い，さらに，$\overline{\mathrm{Span}}\{f_l\}_{l\in L} = V(\subset L^2(\mathbb{R}))$ のとき，$\{f_l\}_{l\in L}$ は V の正規直交**基底**であると言う．

関数 f の平行移動を $(T_b f)(t) = f(t-b)$ $(b \in \mathbb{R})$ と定める．平行移動作用素 T_b は**ユニタリ作用素**である．すなわち，逆作用素 $T_b^{-1} = T_{-b}$ があり，任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\langle T_b f, T_b g\rangle = \langle f, g\rangle$, $\|T_b f\| = \|f\|$ となる．また，関数 f の伸張を $(D_a f)(t) = a^{-1/2} f(t/a)$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ と定める．伸張作用素 D_a もユニタリ作用素である．関数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$g_{j,k}(t) := (D_{2^{-j}} T_k g)(t) = (T_{2^{-j}k} D_{2^{-j}} g)(t) = 2^{j/2} g(2^j t - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

と書く．

関数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して，作用素 $P_j^{(g)}$ を

$$P_j^{(g)} f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, g_{j,k}\rangle g_{j,k}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.2}$$

と定める．$\{g_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が正規直交系をなすとき，$P_j^{(g)}$ は $\{g_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ で生成される閉部分空間 $V := \overline{\mathrm{Span}}\{g_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ への**直交射影作用素**である．すなわち，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$

[2] 2つの関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ において $\mu\{t \in \mathbb{R} \mid f_1(t) \neq f_2(t)\} = 0$ となるとき，$f_1(t)$ と $f_2(t)$ とは，ほとんどいたるところ (almost everywhere) 等しいと言う．ただし，μ はルベーグ測度である．

[3] $\delta_{l,l'}$ はクロネッカーのデルタ，すなわち，$\delta_{l,l'} = 0$ $(l \neq l')$, $\delta_{l,l'} = 1$ $(l = l')$ である．

に対して，$P_j^{(g)} f \in V$ であり，$f - P_j^{(g)} f$ は V と直交する：$\langle f - P_j^{(g)} f, h\rangle = 0$ $(h \in V)$.

関数 f の**フーリエ変換**を

$$\widehat{f}(\xi) = f^\wedge(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-it\xi}\, dt$$

とする．ξ の符号を $\operatorname{sgn}\xi$ とし，

$$(\mathscr{H} f)^\wedge(\xi) := -i(\operatorname{sgn}\xi)\, \widehat{f}(\xi), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{2.3}$$

で**ヒルベルト変換** $\mathscr{H}$ を定める．f が実数値関数なら，$\mathscr{H} f$ も実数値関数で f と $\mathscr{H} f$ とは直交する．ヒルベルト変換は平行移動作用素および伸張作用素と可換である[4]．すなわち，$T_b \mathscr{H} = \mathscr{H} T_b$ $(b \in \mathbb{R})$，$D_a \mathscr{H} = \mathscr{H} D_a$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ となる．ヒルベルト変換は，実解析において重要な Calderón-Zygmund 作用素の最も簡単で重要な例であるが，応用においても，実数値関数 f に対して複素数値関数 $\mathscr{A} f := f + i\mathscr{H} f$ を考えることは，よく行なわれている（たとえば瞬間周波数や包絡線の話など）．

$$(\mathscr{A} f)^\wedge(\xi) = 2Y(\xi)\widehat{f}(\xi) \tag{2.4}$$

（ただし，Y はヘビサイド関数）であり，$\mathscr{A} f$ は f に対する**解析信号**と呼ばれる．

3 直交ウェーブレット

この節では，確認のため，直交ウェーブレットについて基本的なことをまとめておく．

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなすとき，ψ や $\psi_{j,k}$ を直交ウェーブレットと呼び，ψ を直交ウェーブレット関数と呼ぶ．$W_j := \overline{\operatorname{Span}}\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$，$V_j := \bigoplus_{l<j} W_l$ とする[5]と，W_j は「レベル j のスケールの変動を表す関数の空間」，V_j は「レベル j より粗いスケールの変動を表す関数の空間」と考えることができる．このとき，$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は

(i) $V_j \subset V_{j+1}$ (ii) $f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$

(iii) $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ (iv) $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

---

[4] D_a を $a < 0$ に対しても考えることができるが，D_a $(a < 0)$ とは可換ではない．

[5] $\oplus$ は直交直和を表す．

を満たす．また，V_0 はシフト不変（$f \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0\ (k \in \mathbb{Z})$）である．

逆に，$L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が (i)〜(iv) を満たし，さらに，

(v)　ある $\phi \in V_0$ があって，$\{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交基底となる

を満たすとき，$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は MRA (multiresolution analysis) をなすといい，この ϕ をスケーリング関数と呼ぶ．このとき，

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi) \tag{3.1}$$

となる 2π 周期関数 m_0 が一意的に決まる．これをローパスフィルタと呼ぶ．

スケーリング関数に関する重要事項は以下のようにまとめられる．

定理 1.　$\phi \in L^2(\mathbb{R})$ とする．

(1) $\{\phi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系となるための必要十分条件は

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

である．このとき，任意の $j \in \mathbb{Z}$ について，$\{\phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ も正規直交系となる．

(2) ϕ がスケーリング関数になる，すなわち，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\{\phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}\ (j \in \mathbb{Z})$ が MRA をなすための必要十分条件は，以下の 3 条件を満たすことである (Cf. [9] Chapt.7, Theorem 5.2).

(A1) 等式 (3.2) が成立する．

(A2) ある 2π 周期関数 $m_0(\xi)$ があって，

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

(A3) $\lim_{j\to\infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = 1$.

等式 (3.3) はツースケール等式と呼ばれ，m_0 はローパスフィルタと呼ばれる．

(3) ϕ がスケーリング関数で，ν が $|\nu(\xi)| \equiv 1$ であるような 2π 周期関数とすると，$\widehat{\widetilde{\phi}}(\xi) = \nu(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ で定まる関数 $\widetilde{\phi}$ は同じ MRA に対するスケーリング関数である．

直交ウェーブレットの基礎理論の中心は，スケーリング関数 ϕ があると直交ウェーブレット関数 ψ が作れる，ということである．

定理 2.　ϕ をスケーリング関数，ν を $|\nu(\xi)| \equiv 1$ なる 2π 周期関数とすると，$\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\,\widehat{\phi}(\xi/2)$，$m_1(\xi) = e^{i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}\,\nu(2\xi)$ はウェーブレット関数 ψ を定める．こうして作られる ψ を，スケーリング関数 ϕ に（または MRA $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ に）付随したウェーブレット関数と呼び，$m_1(\xi)$ をハイパスフィルタと呼ぶ．

$\nu(\xi) \equiv 1$ と取って作った ψ を ϕ に「自然に」付随するウェーブレット関数と呼ぶ[6]ことにする.

4　Meyer 型ウェーブレット

我々があとで提示する条件を満たすスケーリング関数，ウェーブレット関数の族として，Meyer ウェーブレットを拡張した Meyer 型のウェーブレットを導入しておこう.

$h \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，h の台 (support)[7]を $\mathrm{supp}\, h$ と書く.

スケーリング関数 ϕ が $\mathrm{supp}\, \widehat{\phi} \subset \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ を満たすとき，ϕ やそれに付随するウェーブレット関数 ψ を Meyer 型と呼ぶ.

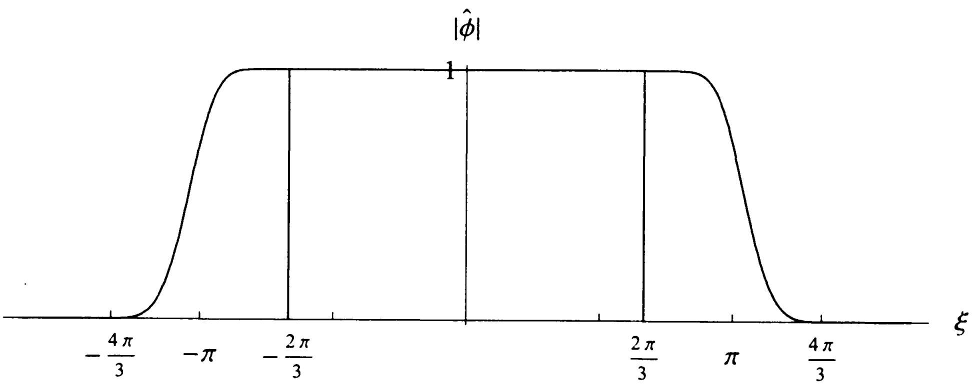

図 1: Meyer 型スケーリング関数のフーリエ変換

補題 3.　$\phi \in L^2(\mathbb{R})$ が Meyer 型スケーリング関数であるための必要十分条件は以下の 3 条件を満たすことである. (図 1 参照)

(M1) $\mathrm{supp}\, \widehat{\phi} \subset [-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]$,

(M2) $[-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ 上 $|\widehat{\phi}(\xi)| = 1$,

(M3) $[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]$ 上 $|\widehat{\phi}(\xi)|^2 + |\widehat{\phi}(\xi - 2\pi)|^2 = 1$.

---

[6]本によっては $\nu(\xi) \equiv -1$ を標準的なとり方とするものもあるが，符号が違うだけなので，どちらに決めても以下の議論にはほとんど影響しない.

[7]一般の $h \in L^2(\mathbb{R})$ に対しては，厳密には，$\{ t_0 \in \mathbb{R} \mid h(t)$ は t_0 の近くではほとんどいたるところ 0 となる $\}$ の補集合が $\mathrm{supp}\, h$ であるが，性質のよい関数（たとえば区分的に連続な関数）の場合は $\{ t \in \mathbb{R} \mid h(t) \neq 0 \}$ の閉包と思ってよい.

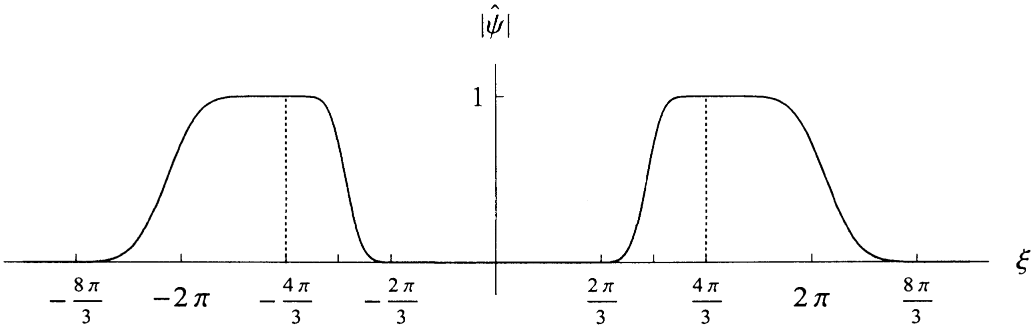

図 2:

Meyer 型ウェーブレットのフーリエ変換は

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset \left[-\frac{8}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right]$$

を満たし，図 2 のような形をしている．また，

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\widehat{\phi} \cap \mathbb{R}_\pm) \leq 2\pi, \quad \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\widehat{\psi} \cap \mathbb{R}_\pm) \leq 2\pi \tag{4.1}$$

となっている．ここで，$\operatorname{diam} A$ は集合 A の幅[8]を表す．

本来の Meyer ウェーブレットは，さらに $\widehat{\phi}(\xi) \geq 0$, $\widehat{\phi}(-\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$, $\widehat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ を満たす[9]ものを言う．このとき，ϕ や ϕ に自然に付随する ψ は実数値関数であり，$\phi, \psi \in \mathscr{S}$ となる．ここで，$\mathscr{S}$ はシュワルツクラスと呼ばれる関数空間で，$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって，任意の自然数 k, l に対して，$(1+|t|)^l|f^{(k)}(t)|$ が $\mathbb{R}$ 上有界となる関数（急減少 C^∞ 級関数という） f のなす空間である．

Daubechies の本 [5], [7] では，Meyer ウェーブレットはより具体的に

$$\widehat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{i\xi/2}\sin\big[(\pi/2)\nu\big(3|\xi|/(2\pi)-1\big)\big], & \frac{2}{3}\pi \leq |\xi \leq \frac{4}{3}\pi, \\ e^{i\xi/2}\cos\big[(\pi/2)\nu\big(3|\xi|/(4\pi)-1\big)\big], & \frac{4}{3}\pi \leq |\xi \leq \frac{8}{3}\pi, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\nu \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \nu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \qquad \nu(x) + \nu(1-x) = 1 \tag{4.3}$$

として与えられている.（ただし，フーリエ変換の定義が少し違うので，その分は変えてある.） 実際の計算では，ν は C^∞ 級 ではなく，区分的に多項式ととることも多い．

[8] A を含む区間の長さの最小を A の幅という．

[9] すべての階数の導関数が存在する関数を C^∞ 級関数と呼び，それら全体が作る関数空間を $C^\infty(\mathbb{R})$ と書く．

5 平行移動不変性の欠如

ϕ をスケーリング関数，ψ を付随する直交ウェーブレット関数とすると，f の V_j への直交射影 $P_j^{(\phi)}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \phi_{j,k}\rangle\phi_{j,k}$ は「f のレベル j の近似」であり，$P_j^{(\phi)}f \to f$ $(j\to\infty)$ in $L^2(\mathbb{R})$ となる．また，$V_j = V_{j-1}\oplus W_{j-1}$ であることから，$P_j^{(\phi)} = P_{j-1}^{(\phi)} + P_{j-1}^{(\psi)}$ となっている．

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，$f_j := P_j^{(\phi)}f$ (レベル j の近似), $g_j := P_j^{(\psi)}f$ (レベル j の詳細) と書くことにすると．直交ウェーブレットの標準的な使われ方は，与えられた f を十分大きな $j = j_0$ において f_{j_0} で近似し，これを $f_{j_0} = f_{j_0-1} + g_{j_0-1} = f_{j_0-2} + g_{j_0-2} + g_{j_0-1} = \cdots = f_{j_0-l} + g_{j_0-l} + \cdots + g_{j_0-2} + g_{j_0-1}$ というように，近似と詳細に順次直交分解していくことである．このとき，f の代わりに f の平行移動 $T_bf := f(\cdot - b)$ で始めた場合，$P_j^{(\psi)}T_bf$ と $T_bP_j^{(\psi)}f$ とが大きく食い違う（ノルムすら違う）ことが起き，応用において無視できない障害になることがある．

6 何が知りたいか

Selesnick[8] の結果を元に，章氏および戸田氏は [1, 3, 4, 2] などにおいて，複素数値離散ウェーブレット変換の平行移動不変性について精力的に調べている．彼らの結果の核の部分は，数学的には，射影作用素の平均を用いて次のように表現することができる．(彼ら以前にわかっていたこと，彼らの結果の若干の精密化も少し含む.)

定理 4. ϕ を Meyer のスケーリング関数とするとき，次が成り立つ．

(1) 任意の $\tau\in\mathbb{R}$ に対して，ϕ の平行移動 $T_\tau\phi = \phi(\cdot - \tau)$ もスケーリング関数である．

$\tau\in\mathbb{R}$ を固定し，$\phi_\tau := T_\tau\phi$ とおく．

(2) $P_j^{\mathrm{apr}} := \frac{1}{2}\left(P_j^{(\phi_\tau)} + P_j^{(T_{1/2}\phi_\tau)}\right)$ とおくと，P_j^{apr} は平行移動不変，すなわち，すべての $b\in\mathbb{R}$ に対して $T_bP_j^{\mathrm{apr}} = P_j^{\mathrm{apr}}T_b$ であり，$(P_j^{\mathrm{apr}}f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,|\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2$ となる．

(3) ψ_τ を ϕ_τ に自然に付随するウェーブレット関数とすると，ψ_τ のヒルベルト変換 $\mathscr{H}\psi_\tau$ は $T_{1/2}\phi_\tau$ に自然に付随するウェーブレット関数である．さらに，$P_j^{\mathrm{dtl}} := \frac{1}{2}\left(P_j^{(\psi_\tau)} + P_j^{(\mathscr{H}\psi_\tau)}\right)$ は平行移動不変であり，$(P_j^{\mathrm{dtl}}f)^\wedge(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,|\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$ となる．

この結果に対して，なぜ，$T_{1/2}\phi$ と $\mathscr{H}\psi$ が対応するかや，Meyer 以外のウェーブレットではどうなるのかなど，いくつかの数学的な疑問が生じる．ここでは，ヒル

ベルト変換を少し一般化した作用素や平行移動を少し「変形」した作用素を考え，射影の平均の平行移動不変性がいつ成り立つかなどを考察して，上の定理を拡張する．これにより，上の疑問にある程度答えることもできる．

7 $\mathscr{H}_c$ と $T_c^\dagger$

この節では，キーとなる2つのユニタリ作用素 $\mathscr{H}_c, T_c^\dagger$ を導入する．

7.1 $\mathscr{H}_c$

$c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(\mathscr{H}_c f)^\wedge(\xi) := e^{-ic\pi \operatorname{sgn} \xi} \widehat{f}(\xi), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{7.1}$$

でユニタリ作用素 $\mathscr{H}_c$ を定義する．

$$\mathscr{H}_c = (\cos c\pi)I + (\sin c\pi)\mathscr{H} \tag{7.2}$$

である．作用素の族 $\{\mathscr{H}_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ は，ユニタリ作用素の 1 パラメータ群をなす．すなわち，$\mathscr{H}_c\mathscr{H}_d = \mathscr{H}_{c+d}$ $(c, d \in \mathbb{R})$，$\mathscr{H}_0 = I$ (恒等作用素) となっている．また，$\mathscr{H}_{c+1} = -\mathscr{H}_c$ であり，$\mathscr{H}_{1/2} = \mathscr{H}$ はヒルベルト変換である．さらに $\mathscr{H}_c$ は，実数値関数を実数値関数に写し，平行移動作用素とも伸張作用素とも可換である．すなわち，$\mathscr{H}_c T_b = T_b \mathscr{H}_c$ $(b, c \in \mathbb{R})$，$\mathscr{H}_c D_a = D_a \mathscr{H}_c$ $(c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+)$ となる．特に，$(\mathscr{H}_c f)_{j,k} = \mathscr{H}_c(f_{j,k})$ であり，$\mathscr{H}_c$ は MRA 構造や直交ウェーブレットの構造を保つ．

実は，次の補題で分かるように，このようなユニタリ作用素は $\mathscr{H}_c$ だけである．

補題 5. $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 U が T_b $(b \in \mathbb{R})$, D_a $(a \in \mathbb{R}_+)$ と可換とすると，ある $\theta, c \in \mathbb{R}$ があって，$U = e^{i\theta}\mathscr{H}_c$ となる．

さらに U は実数値関数を実数値関数に写すとすると，ある $c \in \mathbb{R}$ があって $U = \mathscr{H}_c$ となる．

7.2 $T_c^\dagger$

$c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(T_c^\dagger f)^\wedge(\xi) := e^{-ic\tau(\xi)} \widehat{f}(\xi), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{7.3}$$

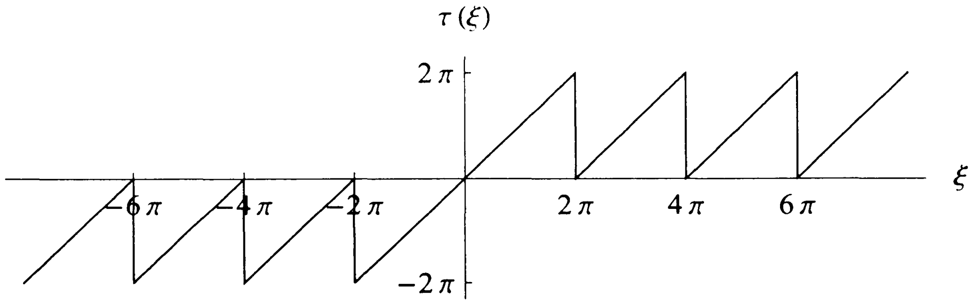

図 3: $\tau(\xi)$ のグラフ

でユニタリ作用素 $T_c^\dagger$ を定義する．ただし，$\tau(\xi)$ は図 3 の関数である．

$\{T_c^\dagger\}_{c\in\mathbb{R}}$ もユニタリ作用素の 1 パラメータ群をなす．さらに，実数値関数を実数値関数に写し，$c = k$ が整数のときは平行移動と同じである：$T_k^\dagger = T_k$ $(k \in \mathbb{Z})$．また，$\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-2\pi, 2\pi]$ なら $T_c^\dagger f = T_c f$ である．

7.3 $\mathscr{H}_c$ と $T_c^\dagger$ との関係

$\theta(\xi) := \tau(\xi) - \pi\operatorname{sgn}\xi$ とおくと，

$$(T_c^\dagger f)^\wedge(\xi) = e^{-ic\theta(\xi)}\,(\mathscr{H}_c f)^\wedge(\xi) \tag{7.4}$$

となるが，図 4 で分かるように，$\theta(\xi)$ は 2π 周期関数になる．これにより，g が (A1) を満たすなら，

$$\overline{\mathrm{Span}}\{(\mathscr{H}_c g)(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \overline{\mathrm{Span}}\{(T_c^\dagger g)(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \qquad (c \in \mathbb{R}) \tag{7.5}$$

となり，

$$P_j^{(\mathscr{H}_c g)} = P_j^{(T_c^\dagger g)}, \qquad j \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{R} \tag{7.6}$$

である．

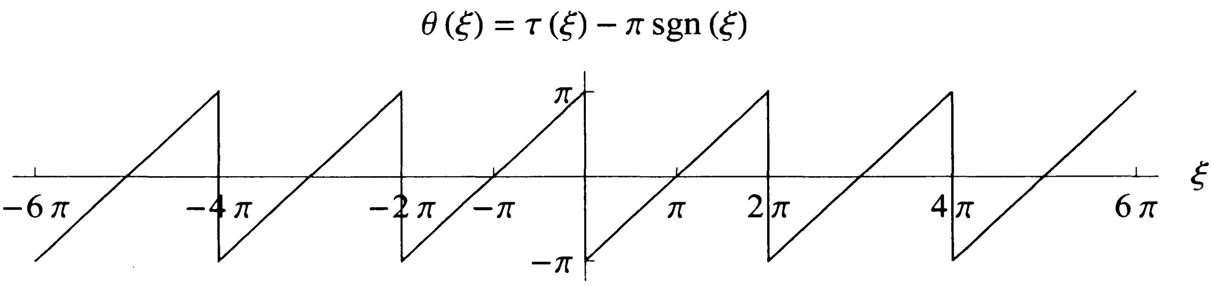

図 4: $\theta(\xi) = \tau(\xi) - \pi\operatorname{sgn}\xi$ のグラフ

8　主結果

以下では，ϕ を任意のスケーリング関数，ψ を ϕ に自然に付随するウェーブレット関数と仮定する．

まず始めの結果は，$T_c^\dagger\phi$ は常にスケーリング関数になり，$T_c^\dagger\phi$ に自然に付随するウェーブレット関数が $\mathscr{H}_c\psi$ であるということである．より詳しく言うと，

定理 6.　任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\mathscr{H}_c\phi, T_c^\dagger\phi$ は同じ MRA を定めるスケーリング関数であり，$\mathscr{H}_c\psi$ はこれら両方に自然に付随したウェーブレット関数である．$T_c^\dagger\psi$ もまた $\mathscr{H}_c\phi, T_c^\dagger\phi$ の両方に（自然にではないが）付随するウェーブレット関数になる．(図 5 参照)

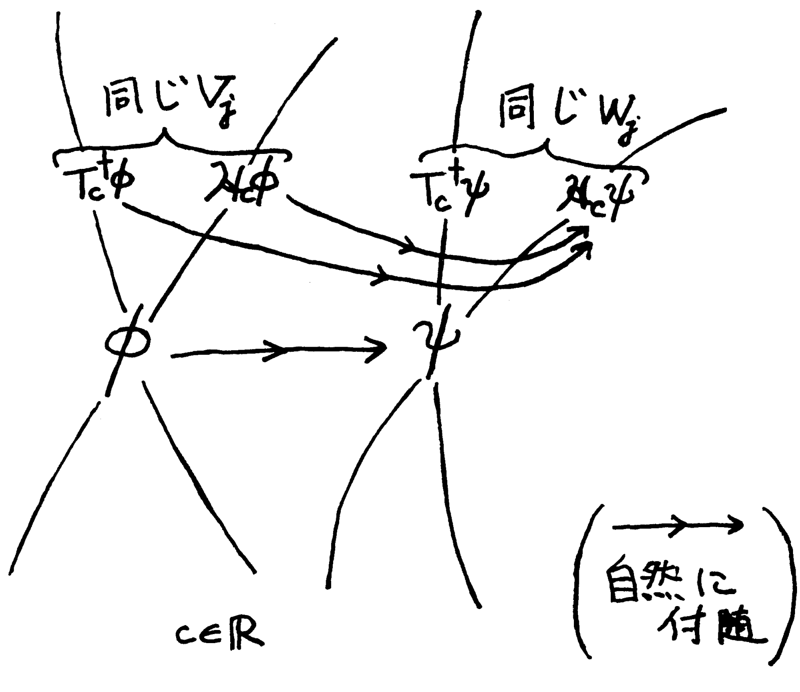

図 5: $\mathscr{H}_c\phi$, $T_c^\dagger\phi$, $\mathscr{H}_c\psi$, $T_c^\dagger\psi$ の関係

Meyer 型の場合は，$T_c^\dagger\phi = T_c\phi$ である．さらに，本来の Meyer の場合は，$T_c^\dagger\phi$, $\mathscr{H}_c\psi \in \mathscr{S}$ であるが，$\mathscr{H}_c\phi, T_c^\dagger\psi$ はあまりよい関数ではなく，$(\mathscr{H}_c\phi)^\wedge$, $(T_c^\dagger\psi)^\wedge$ は連続関数ですらない．したがって，$\int_{\mathbb{R}} |(\mathscr{H}_c\phi)(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |(T_c^\dagger\psi)(t)|\,dt = \infty$ となり，$t \to \pm\infty$ での減衰がよくない関数である．

補題 5 により $\mathscr{H}_c$ は MRA 構造などを保つので，$\mathscr{H}_c\phi$ と $\mathscr{H}_c\psi$ とが対応するのは当然だが，$T_c^\dagger\phi$ も常にスケーリング関数になり，$\mathscr{H}_c\psi$ が $T_c^\dagger\phi$ にも自然に付随するのは，不思議といえば不思議である．$\mathscr{H}_c\phi$ はあまりよい関数ではなく，よい関

数 $T_c^\dagger\phi$ がその代わりをしてくれているのである．またこの結果により，定理 4 において，実は

$$\psi_\tau = \mathscr{H}_\tau\psi, \quad \mathscr{H}\psi_\tau = \mathscr{H}_{\tau+1/2}\psi \tag{8.1}$$

であることが分かる．

次に，射影作用素の平均を定義しておこう．

定義 7. $g \in L^2(\mathbb{R})$ は (A1) を満たすとする．
(1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(P_j^{(g;n)}f)(t) := \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(P_j^{(\cdot\mathscr{H}_{m/n}g)}f)(t), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{8.2}$$

とおく．$P_j^{(g;1)} = P_j^{(g)}$ であり，定理 4 の P_j^{apr}, P_j^{dtl} はそれぞれ $P_j^{(\phi_\tau;2)}$, $P_j^{(\psi_\tau;2)}$ である．
(2)

$$(P_j^{(g;\infty)}f)(t) := \int_0^1 (P_j^{(\cdot\mathscr{H}_c g)}f)(t)\,dc, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{8.3}$$

これらの定義においては $\mathscr{H}_c$ を使っているが，§7.3 により，$P_j^{(\cdot\mathscr{H}_c g)} = P_j^{(T_c^\dagger g)}$ であり，$\operatorname{supp}\widehat{g} \subset [-2\pi, 2\pi]$ なら $P_j^{(\cdot\mathscr{H}_c g)} = P_j^{(T_c g)}$ である．

２つ目の主結果は，射影作用素の平均の平行移動不変性についてである．

定理 8. g は (A1) を満たすとし，$2 \le n \le \infty$ とする．
(1) $P_j^{(g;n)}$ の平行移動不変性とのずれは以下のように評価できる．

$$\left\|T_b\,P_j^{(g;n)} - P_j^{(g;n)}\,T_b\right\|_{\mathrm{op}} \le 2\sum_{l\ne 0}\left|\sin 2^j b\pi l\right| \max_{\epsilon=+,-}\left\|\widehat{g}_\epsilon(\cdot)\,\overline{\widehat{g}_\epsilon(\cdot+2\pi l)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \tag{8.4}$$

ただし，$\|\ \ \|_{\mathrm{op}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ における作用素ノルム[10]であり，$\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \mathrm{esssup}_{\xi\in\mathbb{R}}|h(\xi)|$ である[11]．また，$F_\pm(\xi) := F(\xi)Y(\pm\xi)$ (複号同順) である．
(2) $(\operatorname{supp}\widehat{g}) \cap \mathbb{R}_\pm$ の幅が $\pm$ どちらも 2π 以下とすると，すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して，$P_j^{(g;n)}$ は平行移動不変である．すなわち，

$$T_b P_j^{(g;n)} = P_j^{(g;n)} T_b, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

[10] $\|T\|_{op} := \sup_{f\ne 0}\dfrac{\|Tf\|}{\|f\|}$. 言い換えると $\|Tf\| \le C\,\|f\|$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ が成立する最良の C が $\|T\|_{op}$ である．

[11] esssup は本質的上限と呼ばれるもので，厳密には，$\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \min\{a \ge 0 \mid \mu\{\xi \in \mathbb{R} \mid |h(\xi)| > a\} = 0\}$ であるが，連続関数なら普通の $\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|h(\xi)|$ である．

9 可能な拡張

上の結果は，たとえば，次のような拡張を考えることができる．

(I) 2 以外の dilation factor の場合 (たとえば Auscher wavelet など)．上の結果は，j ごとの結果であり，本質的に dilation factor には依存しない．

(II) 双直交ウェーブレットの場合．$g, g^* \in L^2(\mathbb{R})$ に対して，

$$(P_j^{(g,g^*)} f)(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, g_{j,k}^* \rangle g_{j,k}(t), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{9.1}$$

と定める．$P_j^{(g)} = P_j^{(g,g)}$ である．

ある定数 M があって，
$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi + 2\pi l)|^2 \le M, \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{g^*}(\xi + 2\pi l)|^2 \le M \tag{9.2}$$

なら，$P_j^{(g,g^*)}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の有界作用素になる．

注意 9. g, g^* が (9.2) を満たすとする．

(1) $P_j^{(\mathscr{H}_c g, \mathscr{H}_c g^*)} = P_j^{(T_c^\dagger g, T_c^\dagger g^*)}$ $(c \in \mathbb{R})$ となる．

(2) $\widehat{g}(\xi)\,\overline{\widehat{g^*}(\xi + 2\pi l)} = 0$ $(|l| \ge 2)$ かつ $\widehat{g}_\pm(\xi)\,\overline{\widehat{g^*}_\pm(\xi + 2\pi l)} = 0$ (複号同順) $(l = \pm 1)$ ならば，$P_j^{(\mathscr{H}_c g, \mathscr{H}_c g^*)} = P_j^{(T_c g, T_c g^*)}$ となる．

定義 10. g, g^* が (9.2) を満たすとき，

$$(P_j^{(g,g^*;n)} f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (P_j^{(\mathscr{H}_{m/n} g, \mathscr{H}_{m/n} g^*)} f)(t) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9.3}$$

$$(P_j^{(g,g^*;\infty)} f)(t) := \int_0^1 (P_j^{(\mathscr{H}_c g, \mathscr{H}_c g^*)} f)(t)\, dc. \tag{9.4}$$

と定める．

定理 8 は以下のように拡張できる．

定理 11. $2 \le n \le \infty$ とすると，

$$\begin{aligned} &\left\| T_b P_j^{(g,g^*;n)} - P_j^{(g,g^*;n)} T_b \right\|_{\mathrm{op}} \\ &\qquad \le 2 \sum_{l\neq 0} \left| \sin 2^j b\pi l \right| \max_{\epsilon=+,-} \left\| \widehat{g}_\epsilon(\cdot)\, \overline{\widehat{g^*}_\epsilon(\cdot + 2\pi l)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

参考文献

[1] 章忠 - 戸田浩, シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換，第 1 報：複素数離散ウェーブレット変換の理論と原理，信号処理, **11**:5(2007), 387-399.

[2] 章忠 - 戸田浩, シフト不変複素数離散ウェーブレット変換, システム/制御/情報「ウェーブレット変換の展開特集号」, **53**:1(2009), 21-27.

[3] 戸田浩 - 章忠, シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換，第 2 報：直交ウェーブレットをもとにした複素数ウェーブレット設計法，第 3 報：新たな複素数離散ウェーブレット変換の計算法，信号処理, **11**:5(2007), 401-412, 413-424.

[4] 戸田浩 - 章忠, 完全シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換, 信号処理, **12**:2(2008), 155-166.

[5] ドブシィ，I., 山田・佐々木訳，ウェーブレット１０講，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003. （[7] の翻訳）

[6] ヘルナンデス，E. - ワイス, G., 芦野・萬代・浅川訳，ウェーブレットの基礎, 科学技術出版, 1999. （[9] の翻訳）

[7] Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSFR, Regional Conference Series in Applied Math., SIAM, 1992.

[8] Selesnick, Ivan W., Hilbert transform pairs of wavelet bases, IEEE Signal Processing Letters, **8**:6(2001), 170-173.

[9] Hernandez, E. - Weiss, G., *A First Cource on Wavelets*, CRC Press, 1996.