数理解析研究所講究録
第 1684 巻 2010 年 68-92

Daubechies Operator in Bargmann - Fock space

東京都市大学　知識工学部　吉野邦生 (Kunio Yoshnio)
Faculty of Knowledge Engineering, Tokyo City University

0. Introduction

Daubechies localization operator (ドーベシー 局在化作用素) は、 Ingrid Daubechies により 1988 年に論文
A Time Frequency Localization Operator: A Geometric Phase Space Approach,
IEEE. Trans. Inform. Theory. vol.34, pp.605 - 612(1988)
において導入された。それ以来、多くの研究者により研究されている ([12], [23], [24], [25])。私自身が Daubechies 作用素の研究を始めたきっかけは、 FBI 変換 (超局所解析, Fourier - Bros - Iagolnitzer 変換)、松澤忠人による超関数に関する熱核の方法、Bargmann (バーグマン) 変換である ([3], [9], [17])。これらの積分変換はどれも積分核がガウス関数であり、窓フーリエ変換、 Wigner(ウイグナー) 分布の理論によりこれらの積分変換の間の関係を統一的に理解する事ができる。ここで扱う Daubechies 作用素は、ガウス関数を窓とする窓フーリエ変換の変形版 (重み付きガボール変換) という事ができる。ここでは、

1. Daubechies 作用素の Bargmann - Fock (バーグマンフォック) 空間における表現、
2. Daubechies 作用素の固有値、固有関数に関する Daubechies の結果の証明の簡易化、
3. Daubechies 作用素の固有値からシンボルを構成する方法、
4. Daubechies 作用素の応用 (フーリエ変換の分数べきの構成, シュレディンガー方程式、ブロッホ方程式の解の構成)

等について報告する。
Daubechies 作用素については、上記の 1988 年の論文以外に Daubechies 自身による有名な本 ([7]) でも解説されている。、なお、本稿では、窓

フーリエ変換を基にしてDaubechies作用素を考えているが、ウエーブレット変換を基にした同様な考察は、[7], [8] で行われている。

注意 1
Daubechies 作用素の基になっている窓フーリエ変換の理論 (Gabor Analysis) は、華々しいウエーブレットの理論に比べ**古臭い鈍重な理論**という印象を持っている方が多いかもしれない。しかし、最近、窓フーリエ変換の理論は、代数化、抽象化が進み、非可換幾何学、量子トーラス、量子テータ関数、森田 - Rieffel 同値、C^* 環、Von Neumann 環などとの関連 (という筆者にとっては、かなり意外な事実) が発見され活発に研究されている ([14], [15])。

1. Bargmann 変換と Bargmann - Fock 空間

Bargmann 変換

$$A_n(z,x) = \pi^{-n/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2+x^2) + \sqrt{2}z\cdot x\right\}, \quad (z\in\mathbb{C}^n, x\in\mathbb{R}^n).$$

とおく。 $A_n(z,x)$ を核関数とする積分変換

$$B(\psi)(z) \stackrel{def}{=} \int_{R^n} \psi(x)A_n(z,x)dx, \quad (\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

を $\psi(x)$ の **Bargmann 変換** と呼び、$B(\psi)$ と表す。 $B(\psi)(z)$ は、z の整関数である。

Bargmann - Fock 空間 BF

$$BF = \{g\in H(\mathbb{C}^n) : \int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 e^{-|z|^2} dz\wedge d\bar{z} < \infty\}$$

を **Bargmann - Fock 空間**と呼び BF と表す。
$H(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の 整関数の空間である。Bargmann - Fock 空間は、整関数の作る Hilbert(ヒルベルト) 空間である。

1961 年、V. Bargmann は次を示した。
定理 1.([3])

(1)　Bargmann 変換は、$L^2(\mathbb{R}^n)$ から Bargmann - Fock 空間 BF への unitary(ユニタリー) 作用素である.

(2)　Bargmann 逆変換 B^{-1} は、次で与えられる。

$$B^{-1}(g)(x) = \pi^{-n} \int\int_{\mathbb{C}^n} g(z)\overline{A_n(z,x)}e^{-|z|^2}dz \wedge d\bar{z}, \quad (g \in BF)$$

<u>**例 1.**</u>

$\phi_{p,q}(x) = \pi^{-1/4}e^{ipx}e^{-(x-q)^2/2}$ とおく。

$B(\phi_{p,q})(z) = e^{zw-|w|^2/2+ipq/2}, \quad (w = \dfrac{q+ip}{\sqrt{2}})$

である。

注意 2.

(1)　Bargmann 変換は、$z = \dfrac{q+ip}{\sqrt{2}}$ とおくと

$B(\psi)(z) =$

$\int_{R^n} \psi(x)A_n(z,x)dx$

$= e^{ipq-|z|^2}\int_{R^n} \psi(x)e^{-1/2(x-q)^2}e^{ipx}dx, \quad (\psi \in L^2(\mathbb{R}^n))$

となる。従って、後述するガウス関数を窓とする窓フーリエ変換（ガボール変換）と考える事ができる。

(2)　Bargmann 変換は、超関数 (Gelfand - Shilov の一般化関数) に対しても定義することができる ([4], [26])

(3)　スペルと発音が似ているためか時々、Bargmann と核関数で有名な Bergman を混同する人が時々いるが、全くの別人である。

2. Hermite (エルミート) 関数

Hermite 関数の定義にはいろいろな流儀あるが、ここでは、

$h_m(x) = (-1)^m(2^m m!\sqrt{\pi})^{-1/2}exp(x^2/2)\dfrac{d^m}{dlx^m}exp(-x^2),$

を採用する。

多変数の Hermite 関数は、次の様に定義される。

$$h_{[m]}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Pi_{i=1}^{n} h_{m_i}(x_i), \quad [m] = (m_1, \ldots m_n) \in N^n$$

例 2(Hermite 関数の例)

$$h_0(x) = \pi^{-1/4} exp(-x^2/2), \quad \text{(Coherent state と呼ばれる)}$$

$$h_2(x) = \pi^{-1/4} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2}} exp(-x^2/2), \quad \text{(Mexican hat wavelet と呼ばれる)}$$

命題 1([3],[9])

$\{h_{[m]}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ は、$L^2(\mathbb{R}^n)$ における完全正規直交基底である。

例 3(Hermite 関数展開の例)
Hermite 関数の母関数展開

$$\pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \sqrt{2} z \cdot x\right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} h_m(x),$$

$(z \in \mathbb{C}^1, x \in \mathbb{R}^1)$.

左辺は、Bargmann 変換の積分核 $A_1(z, x)$ である。
注意 3
(1)　命題 1 と、次の命題 2-(ii) を組み合わせると $L^2(\mathbb{R}^n)$ における Hermite 関数展開とは、Bargmann - Fock 空間におけるテイラー展開である事が分かる。
(2)　Hermite 関数展開を緩増加超関数、Gelfand - Shilov の一般化関数等に拡張する事は、例えば、[22], [27] においてなされている。次は、その様な緩増加超関数の Hermite 関数展開の例である。
Dirac のデルタ関数 $\delta(x)$ の Hermite 関数展開 [19]

$$\delta(x) = \pi^{-1/4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!} h_{2m}(x),$$

(3)　Hermite 関数と Hermite 多項式は、異なる。

命題 2([3],[9])

(i) $\quad (-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1)h_m(x) = mh_m(x),$

(ii) $\quad B(h_m)(z) = \frac{z^m}{\sqrt{m!}}, \quad (z \in \mathbb{C})$

(iii) $\quad \mathfrak{F}(h_m)(x) = (-i)^m h_m(x),$

ここで、$\mathfrak{F}$ は、フーリエ変換である。

<u>**命題 3**</u>([3],[9])

(i) $\quad (B \circ L \circ B^{-1})g(z) = z\frac{\partial}{\partial z}g(z),$

$(L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1)$

(ii) $\quad (B \circ \mathfrak{F} \circ B^{-1})g(z) = g(-iz),$

$\mathfrak{F}$ は、フーリエ変換であり、$g(z)$ は Bargmann - Fock 空間 BF の元である.

命題 3 の可換図式による表示

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF \\
{\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B\circ T\circ B^{-1}} \\
L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF
\end{array}
$$

$T = \mathfrak{F}$ 又は

$T = L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1.$

3. Gabor(ガボール) 変換

$\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$\phi_{p,q}(x) = \pi^{-n/4}e^{-ipx}\phi(x-q), \quad (x, p, q \in \mathbb{R}^n).$$

とおく。これは、Weyl - Heisenberg (ワイルーハイゼンベルグ) 群の $L^2(\mathbb{R}^n)$ への unitary 表現である ([9], [24]).

特に、$\phi(x)$ としてガウス関数 $\pi^{-n/4}e^{-x^2/2}$ を取り、

$$\pi^{-n/4}\int e^{-ipx}e^{-(x-q)^2/2}f(x)dx, \quad (f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n))$$

とおく。

この積分変換を $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の **Gabor 変換** と呼ぶ.

窓関数としてガウス関数を採用した窓フーリエ変換 (短時間フーリエ変換) である。

$L^2(\mathbb{R}^n)$ における内積を
$< f, g >= \int_{R^n} \overline{f(x)} g(x) dx$
とおくと Gabor 変換は

$$\pi^{-n/4} \int e^{-ipx} e^{-(x-q)^2/2} f(x) dx =< \phi_{p,q}, f >$$

となる。

Gabor 変換の反転公式としては、次が知られている。

命題 4(Gabor 変換の反転公式 [6], [12])
$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\int \phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq.$

命題 5(Gabor 変換の反転公式の一般化 [12])
$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\int h_{p,q}(x) < g_{p,q}, f > dpdq,$
但し、 $< h, g >= 1, \quad (h, g \in L^2(\mathbb{R}^{2n}))$

注意 4
(1) 命題 4, 命題 5 における等式は、 **Resolution of Identity** と呼ばれる事もある。

(2) Bargamnn 変換と Gabor 変換の関係 (注意 2-(1)) に注意すると、Bargamnn 逆変換の公式 (定理 1-(2)) を命題 4 から導く事ができる。

4. Daubechies (局在化) 作用素

Daubechies 作用素 P_F は、次の様に Gabor 変換を用いて定義される。
定義 2([6])
$\phi_{p,q}(x) = \pi^{-n/4} e^{ipx} e^{-(x-q)^2/2}, \quad (x, p, q \in \mathbb{R}^n)$ とおき、

$$P_F(f)(x) \stackrel{def}{=} (2\pi)^{-n} \int\int F(p,q) \phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq,$$

と定義する。但し、$F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

$F(p,q)$ は、Daubechies 作用素 P_F のシンボル関数と呼ばれる.

注意 5

(1) Daubechies 作用素 P_F は、Gabor 変換の反転公式に現れる積分に重み関数 $F(p,q)$ をつけたものである。

(2) 特に、$F(p,q) = 1$ であると反転公式により $f(x) = P_F(f)(x)$ となる。ただし、この場合
$F(p,q) = 1 \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$
である。

Daubechies 作用素の局在性

$\chi_S(p,q)$ を相空間 $\mathbb{R}^{2n}$ における集合 S の特性関数とする。$\chi_S(p,q)$ をシンボルとする Daubechies 作用素 P_S を考える。

$$
\begin{aligned}
P_S(f)(x) &= (2\pi)^{-n} \int\int \chi_S(p,q)\phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq \\
&= (2\pi)^{-n} \int\int_S \phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq.
\end{aligned}
$$

である。次が成立する。

命題 6([6]) $0 < a < 1$ である任意の正数 a に対し次が成立する。

$$
|(\phi_{p,q}, P_S f)| \leq a^{-n/2} ||f||_{L^2} \exp(-\frac{1-a}{4} d((p,q),S)^2).
$$

ここで、$d((p,q),S)$ は、点 (p,q) と集合 S の間の距離を表す.

注意 6

量子光学、量子力学では、p は運動量、q は位置を表し、時間周波数解析では p は時間、q は周波数を表す.

ここで Daubechies が得た結果を列挙しよう。

命題 7([6])

$F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする。

(i) $F(p,q) \geq 0$ であると P_F は、正値作用素である.

(ii) $||P_F(f)||_{L^2} \leq (2\pi)^{-n/2} ||f||_{L^2} ||F||_{L^1}$.

(iii) P_F は、トレースクラスに属する。

__定理 2__([6], [7]). $F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ であり、$F(p,q)$ は次の意味で、各2変数 (p_i, q_i), $(1 \le i \le n)$ について回転対称性を持つとする。*i.e.*
$F(p_1, q_1, ...p_n, q_n) = \tilde{F}(r_1{}^2, ..., r_n{}^2)$, $(r_i{}^2 = p_i{}^2 + q_i{}^2, 1 \le i \le n)$.
次が成立する。

(i) *Hermite* 関数 $h_{[m]}(x)$ は、*Daubechies* 作用素の固有関数である。
$P_F(h_{[m]})(x) = \lambda_{[m]} h_{[m]}(x)$, $([m] \in \mathbb{N}^n)$,

(ii) 固有値 $\lambda_{[m]}$ は、次の積分表示を持つ

$$\lambda_{[m]} = \frac{1}{[m]!} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Pi_{i=1}^n e^{-s_i} s_i{}^{m_i} \tilde{F}(2s_1, ..., 2s_n) ds_1 ... ds_n.$$

5. Daubechies 作用素の固有値の解析接続

簡単のため、$n = 1$ とする。

$\lambda_m = \dfrac{1}{m!} \displaystyle\int_0^\infty e^{-s} s^m \tilde{F}(2s) ds$ は、*Daubechies* 作用素の固有値である。

固有値 λ_m の解析接続 $\lambda(z)$ を

$$\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_0^\infty e^{-s} s^z \tilde{F}(2s) ds, \quad (Re(z) > -1).$$

で定義する。$\Gamma(z)$ は、*Euler*(オイラー)の Γ(ガンマ)関数である。
次が成立する。

__命題 8__

(i) $\exists C > 0$, *s.t.*

$$|\lambda(z)| \le \frac{C}{\sqrt{|z|}} e^{\frac{\pi}{2}|Im(z)|}, \quad (Re(z) > 0)$$

(ii) $\lambda(z)$ は、右半平面 $Re(z) > 0$ で正則.

(iii) $\lambda(m) = \lambda_m$, $(m \in \mathbb{N})$

(iv) $\lambda(z)$ は λ_m の唯一つの解析接続

(証明)

(i) は Γ 関数に関する *Stirling(スターリング)* の公式で示す事ができ、(iv) は、次の *Carlson*(カールソン) の定理により証明される。

Carlson の定理 ([5], [18])

(1)　$f(z)$ は右半平面 $Re(z) > 0$ で正則.

(2)　$|f(z)| \leq Ce^{ax+b|y|}, (z \in \mathbb{C}, x > 0)$

(3)　$f(n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

もし $0 \leq b < \pi$ であると、$f(z)$ は恒等的にゼロである.

注意 7
(1)　$\sin \pi z$ は、*Carlson* の定理における条件 (1), (2), (3) 全てを満たすが, $\sin \pi z$ は、恒等的にはゼロではない。
$\sin \pi z$ の場合、$b = \pi$ である。従って、*Carlson* の定理における条件 $0 \leq b < \pi$ を緩めることはできない.

(2)　**Fritz Carlson について**
Fritz David Carlson (1888 - 1952)
Carleson 測度で有名な *L. Carleson* とは別人である。

固有値 の解析接続 $\lambda(z)$ を使うと次のシンボルの再構成公式を得る。

命題 9(第一再構成公式)

$$\tilde{F}(2s) = \frac{e^s}{s}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \lambda(z)\Gamma(z+1)s^{-z}dz.$$

(証明)

$$\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\int_0^\infty e^{-s}s^z\tilde{F}(2s)ds.$$

であるので　*Mellin(メリン)* 逆変換の公式により, 第一再構成公式を得る。

6. Daubechies 作用素の固有値の母関数 (Z 変換)

Daubechies 作用素の固有値 $\{\lambda_{[m]}\}$ に対し, $\Lambda(w) = \sum_{[m]=0}^{\infty} \lambda_{[m]}w^{[m]}$ とおく。

$\Lambda(w)$ を **Daubechies 作用素の固有値の母関数**と呼ぶ.
以下、次を仮定する。

(i) $F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$.

(ii) $F(p,q)$ は、各 2 変数について回転不変。

$i.e.$ $F(p_1,q_1,...p_n,q_n) = \tilde{F}({r_1}^2,...,{r_n}^2)$, $({r_i}^2 = {p_i}^2 + {q_i}^2, \quad 1 \leq i \leq n)$.

命題 10
$\lambda_{[m]}$ を P_F の固有値とする。このとき

(i) $\exists C > 0 \ s.t.$
$|\lambda_{[m]}| \leq \dfrac{C}{\sqrt{|m|}}$, $([m] \in \mathbb{N}^n)$.

(ii) $\Lambda(w)$ は、多重円板 $\Pi_{i=1}^n\{w \in \mathbb{C}^n : |w_i| < 1\}$ で正則.

(iii) $\Lambda(w) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Pi_{i=1}^n e^{-s_i(1-w_i)}\tilde{F}(2s_1,...,2s_n)ds_1...ds_n$.

(iv) $\Lambda(w)$ は、$\Pi_{i=1}^n\{w \in \mathbb{C}^n : Re(w_i) < 1\}$ で正則であり、この領域の境界をこめて有界 .

(v) $\Lambda(iv) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $(v \in \mathbb{R}^n)$.
$i.e.$ $\Lambda(iv) \in C(\mathbb{R}^n)$ であり $\lim_{|v|\to\infty} \Lambda(iv) = 0$.

(証明)
簡単のために $n = 1$ とする.
(i) 定理 2 により,
$\lambda_m = \dfrac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-s}\tilde{F}(2s)s^m ds$.
$e^{-s}s^m \leq e^{-m}m^m$ なので,
$|\lambda_m| \leq \dfrac{1}{m!}e^{-m}m^m \int_0^\infty |\tilde{F}(2s)|ds$.
$Stirling$ の公式 : $m! \sim \sqrt{2\pi m}e^{-m}m^m$ により,
$|\lambda_m| \leq C\dfrac{1}{\sqrt{m}}$
が成立する.
(ii) は (i) から分かる。
(iii)

$$\Lambda(w)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m w^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m}{m!}\int_0^{\infty}e^{-s}s^m\tilde{F}(2s)ds=$$
$$\int_0^{\infty}e^{-s}\tilde{F}(2s)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ws)^m}{m!}ds=\int_0^{\infty}e^{-s(1-w)}\tilde{F}(2s)ds.$$

(iv)
$Re(w)\leq 1$ に対し
$|\Lambda(w)|\leq\int_0^{\infty}|e^{-s(1-w)}||\tilde{F}(2s)|ds\leq||\tilde{F}||_{L^1}.$
(v)
$\Lambda(iv)$ は、L^1- 関数のフーリエ変換であるので, *Riemann-Lebesgue* (リーマンルベーグ) の定理により $C_0(\mathbb{R}^n)$ に属することが判る。

命題 11 $F\in L^1(\mathbb{R}^1)$ は、回転不変且つ正とする。*i.e.*
$F(p_1,q_1)=\tilde{F}(r^2)\geq 0,\quad ({p_1}^2+{q_1}^2=r^2)$

$\limsup_{m\to\infty}{\lambda_m}^{1/m}=1$ であると $w=1$ は $\Lambda(w)$ の特異点である。

(証明) F は、正値関数であるので, P_F は、正作用素である。*(命題 2)*.
従って、 P_F の固有値 λ_m は、全て非負である。収束半径に関する *Cauchy-Hadamard(コーシーアダマール)* の公式により、冪級数 $\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m w^m$ の収束半径は、1 である. 冪級数の特異点に関する *Vivanti(ビバンティ)* の定理により, $w=1$ は、$\Lambda(w)$ の特異点である。

命題 12 $F(p,q)$ は、有界な台を持つ L^1- 関数とする。この時、次を満たす
正の定数 $a>0,C>0$ が存在する。

$(i)\quad |\lambda_m|\leq C\dfrac{a^m}{m!},\quad (m\in\mathbb{N}^n)$

$(ii)\quad \Lambda(w)$ は 指数型整関数である。

$|\Lambda(w)|\leq Ce^{au},\quad (w=u+iv\in\mathbb{C}^n).$

(証明) 簡単のために $n=1$ とする.
$F(p,q)$ は、有界な台を持つので, 定理 2 の *(ii)* により, 正数 a が存在し次を満たす。
$\lambda_m=\dfrac{1}{m!}\int_0^a e^{-s}\tilde{F}(2s)s^m ds.$

従って $|\lambda_m| \le C\dfrac{a^m}{m!}$.
$|\Lambda(w)| \le \int_0^a |\tilde{F}(2s)||e^{-s(1-w)}|ds$ であるので,
$|\Lambda(w)| \le Ce^{au}, \quad (w = u + iv \in \mathbb{C})$.

ここで *Daubechies* 作用素 の例を示す。
例 3.
$F_a(p,q) = e^{\frac{a-1}{2a}(p^2+q^2)} = e^{\frac{a-1}{2a}r^2}, \quad (0 < a < 1)$
とおく。 *Daubechies* 作用素 P_{F_a} の固有値、及び固有値の母関数に関して次の結果を得る。

$$\lambda_m = a^{m+1}, \quad \lambda(z) = a^{z+1}, \quad \Lambda(w) = \frac{a}{1-aw},$$
$$\Lambda(iv) = \frac{a}{1-iav}, \quad (v \in \mathbb{R})$$

固有値の母関数からシンボル関数を構成する事ができる。

定理 3(第 2 再構成公式)

$$\tilde{F}(2s) = (2\pi)^{-n}e^s\mathfrak{F}(\Lambda(iv))(s),$$

が超関数として成立する.
但し、$\mathfrak{F}$ はフーリエ変換である.
形式的に表示すると

$$\tilde{F}(2s_1,...,2s_n) = (2\pi)^{-n}e^{s_1+...+s_n}\int e^{-ivs}\Lambda(iv)dv,$$

となる。
(証明) 命題 $10-(iii)$ により,

$$\Lambda(iv) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Pi_{k=1}^n e^{-s_k(1-iv_k)}\tilde{F}(2s_1,...,2s_n)ds_1...ds_n.$$

これは、$\Lambda(iv)$ が $e^{-s}\tilde{F}(2s)$ の逆フーリエ変換である事を意味する.
$\tilde{F}(2s)$ は L^1-関数. 従って $e^{-s}\tilde{F}(2s)$ は緩増加超関数である.
$\Lambda(iv), (v \in \mathbb{R}^n)$ は有界連続関数であるので, $\Lambda(iv)$ は緩増加超関数である. 故に緩増加超関数として
$\tilde{F}(2s) = e^s\mathfrak{F}(\Lambda(iv))(s)$.
が成立する。

<u>系 1</u>
$e^{-s}\tilde{F}(2s) \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.
であると

$$\tilde{F}(2s) = (2\pi)^{-n} e^s \mathfrak{F}(\Lambda(iv))(s), \quad (s \in \mathbb{R}^n_+)$$

が成立する.

(証明) これは、*Plancherel* の定理に他ならない.

<u>**Daubechies 作用素の固有値の Z 変換**</u>

$\{\lambda_{[m]}\}$ を *Daubechies* 作用素の固有値とし,
$\widetilde{\Lambda}(\zeta) = \sum_{[m]=0}^{\infty} \lambda_{[m]} \zeta^{-[m]-1}$.
とおく。
$\widetilde{\Lambda}(\zeta)$ は、**Daubechies 作用素の固有値 の Z 変換** である。
母関数 $\Lambda(w)$ と Z 変換 $\widetilde{\Lambda}(\zeta)$ の関係は

$\widetilde{\Lambda}(\zeta) = \zeta^{-1}\Lambda(\zeta^{-1})$.

である。固有値の解析接続 $\lambda(z)$ と固有値の Z 変換 $\widetilde{\Lambda}(\zeta)$ の関係は、次で与えられる。

<u>**定理 4**</u> **($\lambda(z)$ と $\widetilde{\Lambda}(\zeta)$ の関係 [2], [18])**

$$\lambda(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \widetilde{\Lambda}(\zeta) \zeta^{-z-1} d\zeta$$

但し、$D_\varepsilon = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : |arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2} + \varepsilon, |\zeta| \le \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}$

7. Daubechies 作用素の Bargmann - Fock 空間における実現

<u>**補題 1**</u>**([3])**

$$g(w) = (2\pi i)^{-n} \int\int_{\mathbb{C}^n} e^{w\bar{t}} g(t) e^{-|t|^2} d\bar{t} \wedge dt, \quad (g \in BF)$$

この補題は、$e^{w\bar{t}}$ が $Bargmann$ - $Fock$ 空間における再生核である事を示している。次が、この節での主要な結果である。

定理 5

$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z)$
$$= (2\pi i)^{-n} \int\int_{\mathbb{C}^n} F\left(\frac{\overline{w}-w}{\sqrt{2}i}, \frac{w+\overline{w}}{\sqrt{2}}\right) e^{z\overline{w}} g(w) e^{-|w|^2} dw \wedge d\overline{w},$$

$(\forall g \in BF)$

$$\begin{array}{ccc} L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF \\ {\scriptstyle P_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B\circ P_F\circ B^{-1}} \\ L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF \end{array}$$

(**証明**) 簡単のために $n=1$ とする。
$Bargmann$ 変換は、$unitary$ 変換であるので,
$$P_F(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)\phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq,$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)\phi_{p,q}(x) < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$

例 1 により,
$B \circ P_F(f)(z)$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)B\phi_{p,q}(z) < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)e^{zw-1/2|w|^2+1/2ipq} < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$

が分かる。故に

$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z)$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)e^{zw-1/2|w|^2+1/2ipq} < B\phi_{p,q}, g > dpdq,$$

一方 補題 1 により,

$< B\phi_{p,q}, g >$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int e^{\bar{t}\bar{w}-1/2|w|^2-1/2ipq} g(t)e^{-|t|^2} dt d\bar{t},$$
$$= e^{-1/2|w|^2-1/2ipq} g(\bar{w})$$

これと
$$p = \frac{\overline{w} - w}{\sqrt{2}i}, \quad q = \frac{w + \overline{w}}{\sqrt{2}}$$
を
$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z)$
の右辺の積分表示式に代入すると所望の結果を得る。

8. Daubechies 作用素の応用

ここでは、*Daubechies* 作用素の応用について述べる。まず、定理 5 を用いて定理 2 の別証明を与える。

定理 2([6]). $F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 且つ $F(p,q)$ は、各 2 変数につき回転対称とする, *i.e.*
$F(p_1, q_1, ...p_n, q_n) = \tilde{F}({r_1}^2, ..., {r_n}^2)$, $({r_i}^2 = {p_i}^2 + {q_i}^2, 1 \leq i \leq n)$.
このとき

(i) Hermite 関数 $h_m(x)$ は、Daubechies 作用素の固有関数である。
$P_F(h_{[m]})(x) = \lambda_{[m]} h_{[m]}(x), \quad ([m] \in \mathbb{N}^n),$

(ii) $\lambda_{[m]} = \dfrac{1}{m!} \displaystyle\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Pi_{i=1}^n e^{-s_i} {s_i}^{m_i} \tilde{F}(2s_1, ..., 2s_n) ds_1 ... ds_n.$

(定理 5 による証明)
定理 5 により,
$(B \circ P_F \circ B^{-1})(z^m)$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} F(2|w|^2) e^{z\overline{w}} w^m e^{-|w|^2} dw \wedge d\overline{w},$$
ここで $e^{z\overline{w}}$ をテイラー展開し、極座標変換 $w = re^{i\theta}$ をした後、 $s = r^2$ とおくと,
$$= z^m \frac{1}{m!} \int_0^\infty e^{-s} s^m \tilde{F}(2s) ds.$$
$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(z^m) = z^m \frac{1}{m!} \int_0^\infty e^{-s} s^m \tilde{F}(2s) ds.$$

命題 2 – (ii) により、これは、Daubechies の結果

定理 2

(i) $P_F(h_m)(x) = \lambda_m h_m(x), \quad (m \in \mathbb{N}),$

$$(ii) \quad \lambda_m = \frac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-s}s^m\tilde{F}(2s)ds.$$

を意味する。

P_F を線積分を用いて表現する事もできる。

定理 6 シンボル関数 $F(p,q)$ が、各 2 変数につき回転不変であると

$$(B\circ P_F\circ B^{-1})(g)(z) = (2\pi i)^{-n}\oint g(t)\Lambda(\frac{z_1}{t_1},...,\frac{z_n}{t_n})\frac{dt_1...dt_n}{t_1...t_n},$$

$(\forall g\in BF)$

系 3
回転不変なシンボルを持つ Daubechies 作用素は、調和振動子作用素と可換である。

系 4
回転不変なシンボルを持つ Daubechies 作用素は、フーリエ変換と可換である。
(**定理 6 の証明**)
簡単のために 1 次元とする. Bargmann - Fock 空間の元 $g(z)$ のマクローリン展開

$$g(z) = \sum_{m=0}^\infty a_m z^m$$

を考える。命題 2-(ii) と 定理 2 により,

$$(B\circ P_F\circ B^{-1})(z^m) = \lambda_m z^m.$$

従って

$$(B\circ P_F\circ B^{-1})(g)(z) = (B\circ P_F\circ B^{-1})(\sum_{m=0}^\infty a_m z^m) =$$

$$\sum_{m=0}^\infty a_n\lambda_m z^m = (2\pi i)^{-1}\oint g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}.$$

故に

$$(B\circ P_F\circ B^{-1})(g)(z)=(2\pi i)^{-1}\oint g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}.$$

(系 3 の証明)

命題 $3-(i)$ と定理 6 における等式を使う。

$(B\circ P_F\circ B^{-1})(z\frac{\partial}{\partial z}g)=(2\pi i)^{-1}\oint t\frac{\partial}{\partial t}g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}=$

$(2\pi i)^{-1}\oint \frac{\partial}{\partial t}g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}.$

他方,

$z\frac{\partial}{\partial z}(B\circ P_F\circ B^{-1})(g)(z)=(2\pi i)^{-1}\oint g(t)\frac{sz}{t^2}\Lambda(\frac{z}{t})dt=$

$(2\pi i)^{-1}\oint g(t)(-\frac{\partial}{\partial t})\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}=(2\pi i)^{-1}\oint \frac{\partial}{\partial t}g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t}.$

(系 4　の証明)

命題 $3-(ii)$ を使う。

$(B\circ P_F\circ B^{-1})(g)(iz)=(2\pi i)^{-1}\oint g(t)\Lambda(\frac{iz}{t})\frac{dt}{t}$

一方,

$(2\pi i)^{-1}\oint g(-it)\Lambda(\frac{z}{t})dt=(2\pi i)^{-1}\oint g(s)\Lambda(\frac{z}{is})\frac{ds}{s}=$

$(2\pi i)^{-1}\oint g(t)\Lambda(\frac{-iz}{t})\frac{dt}{t}$

特別な Daubechies 作用素 P_{F_a}

例 3 で導入した Daubechies 作用素について考える。

$F_a(p,q)=e^{\frac{a-1}{2a}(p^2+q^2)}=e^{\frac{a-1}{2a}r^2},\quad (0<a<1)$

とおくと

$$\lambda_m=a^{m+1},\quad \Lambda(w)=\frac{a}{1-aw}.$$

$$P_{F_a}(h_m)(x)=a^{m+1}h_m(x).$$

である。 従って、命題 1 により、作用素として P_{F_a} を次の形に表示できる。

$$P_{F_a}=\sum_{m=0}^{\infty}a^{m+1}h_m(x)h_m(y).$$

$$(P_{F_a} = \sum_{m=0}^{\infty} a^{m+1}|h_m><h_m|, \quad \text{Dirac の記法.})$$

$a = 2^{-1}$ の時は, これは、P_{F_a} の Schatten(シャッテン) 分解であり、量子統計力学、量子光学の分野では、 密度演算子、又は、密度行列と呼ばれる ([10]), [11]).

命題 13 (Mehler(メラー) の公式 [9],[23])

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+1} h_m(x)h_m(y) = \frac{a}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} e^{\frac{-1}{4}(\frac{1-a}{1+a}(x+y)^2+\frac{1\pm a}{1-a}(x-y)^2)}, \quad (|a|<1).$$

系 5

(i) $\quad P_{F_a}(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{a}{\sqrt{\pi(1-a^2)}} e^{\frac{-1}{4}(\frac{1-a}{1+a}(x+y)^2+\frac{1\pm a}{1-a}(x-y)^2)} f(y)dy,$
$(f \in L^2)$.

(ii) $\quad a \in \mathbb{C}, |a| < 1$ であると

$$P_{F_a} : L^2 \longrightarrow L^2$$

は、有界作用素。

(証明) (i) は Mehler の公式から分かる。
(ii) $\quad |a| < 1$ であると, $\dfrac{1-a}{1+a} + \dfrac{1+a}{1-a}$ の実部は正である。従って P_{F_a} は L^2 から L^2 への有界作用素である。

P_{F_a} の Bargmann- Fock 空間における実現

次が成り立つ。

命題 14

(i) $\quad B \circ P_{F_a} \circ B^{-1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+1} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \frac{\bar{w}^m}{\sqrt{m!}}.$

(ii) $\quad (B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g)(z) = \dfrac{ia}{2} \displaystyle\int\int_{\mathbb{C}} e^{az\bar{w}} g(w) e^{-|w|^2} dw \wedge d\bar{w},$
$(g \in BF)$

(証明)

$B \circ P_{F_a} \circ B^{-1}$ の固有関数は $\dfrac{z^m}{\sqrt{m!}}$.
従って
$B \circ P_{F_a} \circ B^{-1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+1} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \frac{\bar{w}^m}{\sqrt{m!}}$.
特に、

$B \circ P_{F_a} \circ B^{-1} = e^{az\overline{w}}$

命題 15 $|a| < 1$ に対し、

$$(B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g)(z) = ag\,(az)\,, \quad (g \in BF).$$

(証明) 例 3 の結果を用いる。
$(B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g)(z) = (2\pi i)^{-1} \displaystyle\oint g(t)\Lambda(\frac{z}{t})\frac{dt}{t} =$
$(2\pi i)^{-1} \displaystyle\oint g(t)\frac{a}{t-az}dt = ag(az)$.
命題 16 $f \in L^2$ とする。次が成り立つ。

(i) $\lim_{a\to 1} P_{F_a}(f) = f$,

(ii) $\lim_{a\to -i} P_{F_a}(f) = (-i)\mathfrak{F}f$,

(iii) $\lim_{a\to i} P_{F_a}(f) = i\mathfrak{F}^{-1}f$,

$\mathfrak{F}$ はフーリエ変換である。

(証明)
(i) $\lim_{a\to 0}(B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g) = \lim_{a\to 1} ag(az) = g(z)$.
これは $\lim_{a\to 1} P_{F_a}$ が恒等作用素であることを意味する.
(ii) $\lim_{a\to -i}(B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g) = \lim_{a\to -i} ag(az) = (-i)g(-iz)$.
命題 1 の (v) により, これは $\lim_{a\to -i} P_{F_a} = (-i)\mathfrak{F}$ を意味する.
(iii) の証明は (ii) と同じである.

命題 17
$G = \{PF_a : a \in \mathbb{C}, |a| < 1\} \cup \{I_d\}$ は、次の意味で半群である:

$P_{F_a} \circ P_{F_a} = P_{F_{ab}}$.

(証明)　命題 14 により,
$(B \circ P_{F_a} \circ B^{-1})(g)(z) = ag(az), \quad g(z) \in BF$
従って
$(B \circ P_{F_a} \circ P_{F_b} \circ B^{-1})(g)(z) = bag\,(baz)$
故に
$P_{F_b} \circ P_{F_a} = P_{F_{ab}}$.

注意 8
単位円 $\{a \in \mathbb{C} : |a| < 1\}$ の境界 $|a| = 1$ の上に特に重要な 3 点がある:
(i) $a = 1$,　この場合, $F_0(p,q) = 1$.
P_{F_0} は恒等作用素.
(ii) $a = +i$,　この場合, $F_i(p,q) = e^{\frac{(1+i)(p^2+q^2)}{2}}$.
$iP_{F_{-1+i}}$ はフーリエ変換 .
(iii) $a = -i$,　この場合, $F_{-i}(p,q) = e^{\frac{(1-i)(p^2+q^2)}{2}}$.
$(-i)P_{F_{-i}}$ は逆フーリエ変換.

これらの場合, $F_a(p,q) \notin L^1$ であるが、これらの作用素は、全て L^2 から L^2 への有界作用素である.
命題 16 から分かるように, これらの作用素は $PF_a, (F_a \in L^1)$ の極限として得られる. この現象を解析する.

定理 7

$$\partial G = \{P_{F_a} : a \in \mathbb{C} : |a| = 1\}$$

はアーベル群である.
(証明)　$a = e^{it}$ とおく。メラーの公式により、

$$P_{F_a}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i e^{it}(\sin t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2+y^2)\cot t - \frac{ixy}{\sin t}} f(y)dy$$

$$= \frac{e^{\frac{ix^2}{2}\cot t}}{\sqrt{2\pi i e^{it}(\sin t)}} \mathfrak{F}(e^{\frac{iy^2}{2}\cot t} f(y))(\frac{x}{\sin t}).$$

もし $f \in L^2$ であると, $e^{\frac{i}{2}\cot t y^2} f(y) \in L^2$ である。
プランシェル (Plancherel) の定理により, P_{F_a} は L^2 から L^2. への有界作用素である。
P_{F_a} の逆作用素は P_{F_b},　$(b = \frac{1}{a} = \bar{a})$ である.
$a \in \partial A$ であると, b も ∂A　に属する.

Daubechies 作用素によるフーリエ変換の分数幂の表現

$$P_{F_a}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i e^{it}(\sin t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x^2+y^2)\cot t - \frac{ixy}{\sin t}} f(y)dy$$

$$= \frac{e^{\frac{ix^2}{2}\cot t}}{\sqrt{2\pi i e^{it}(\sin t)}} \mathfrak{F}(e^{\frac{iy^2}{2}\cot t} f(y))(\frac{x}{\sin t}).$$

$f \in L^2$ であると、 $e^{\frac{i}{2}\cot t y^2} f(y) \in L^2$ である。
命題 17 と注意 8 から分かるように P_{F_a} はフーリエ変換の分数幕を表していると考える事ができる。例えば

$P_{F_a} \circ P_{F_a} = P_{F_{-i}} = (-i)\mathfrak{F}f, \quad (a = e^{-\pi/4i})$ である。

フーリエ変換の分数幕と Wigner(ウイグナー) 分布の関係

量子統計力学、量子光学で重要な Wigner 分布関数を定義する ([9], [10], [11], [12])。 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し、 Wigner 分布 $W(f,g)(x,\xi)$ を次の様に定義する。

$$W(f,g)(p,q) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iqx} f(p+\frac{t}{2})\overline{g(p-\frac{t}{2})}dt$$

変数変換により、$g(x)$ を窓関数とする窓フーリエ変換である事が分かる。特に、$g(x)$ がガウス関数であるとこれは $f(x)$ の Gabor 変換である。又、$f(x) = g(x)$ のときは $W(f,f)(p,q)$ を $W(f)(p,q)$ と略記する。フーリエ変換の分数幕を用いて、Wigner 分布関数と相平面での回転の関係を実現する事ができる。次が成立する。

命題 18 ([20])

$(i) \quad W(f)(R_t(p,q)) = W(P_{F_a}(f))(p,q), \quad a = e^{it}$

R_t : 相平面 (ウイグナー平面) における回転

特に $a = e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$ の時は

$(ii) \quad W(f)(-q,p)) = W(\mathfrak{F}(f))(p,q),$

注意 9
命題 18 -(ii) を応用して、Wigner 分布を Sobolev(ソボレフ) 空間の元に定義し、その相空間における局在性について議論する事ができる ([13])。

Schrödinger(シュレディンガー) 方程式、Bloch(ブロッホ) 方程式の解の構成

命題 19 $u(x,t) = P_{F_{e^{it}}}(f)(x), \quad (f \in L^2)$ とおく。

(i) $u(x,t)$ は、調和振動子ポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式

$$-i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right) u(x,t)$$

の解であり、次の初期条件を満たす。

(ii) $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$

(証明)

Bargmann 変換を利用する. $u(x,t)$ の代わりにそれの Bargmann 変換像について考える. $B \circ P_{F_{e^{it}}} \circ B^{-1}(g)(z) = e^{it}g(e^{it}z)$. $v(t,z) = e^{it}g(e^{it}z)$. とおく

$$\frac{\partial v(t,z)}{\partial t} = iv + i(e^{it})^2 zg'(e^{it}z).$$

他方,

$$z\frac{\partial v(t,z)}{\partial z} = (e^{it})^2 zg'(e^{it}z).$$

故に

$$-i\frac{\partial v}{\partial t} = v + z\frac{\partial v}{\partial z}.$$

命題 3-(i) により,

$$-i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right) u(x,t)$$

命題 20 $u(x,t) = P_{F_{e^{-t}}}(f)(x), \quad (f \in L^2, t > 0)$ とおく。

(i) $u(x,t)$ は Bloch 方程式 (Hermite 熱方程式)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right) u(x,t)$$

の解であり、次の初期条件を満たす。

(ii) $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$

証明は、命題 19 とほぼ同様なので省略する.

参考文献

[1] R. Ashino, P. Boggiatto and M.W. Wong(Editors): *Advanced in Pseudo-Differential Operators* , Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin, Boston(2000)

[2] V. Avanissian amd R. Gay : Sur une transformation des fonctionnlles analytiques et ses applications aux fonctions entières des plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France 103, pp. 341 - 384(1975)

[3] V. Bargmann : *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform Part I,* Comm. Pure. Appl. Math, pp. 187-214(1961)

[4] V. Bargmann : *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform Part II, A Family of Related Function Spaces Application to Distribution Theory,* Comm. Pure. Appl. Math, pp.1-101(1967)

[5] R. P. Boas : *Entire Functions,* Academic Press, New York (1954)

[6] I. Daubechies : *A time frequency localization operator: A geometric phase space approach,* IEEE. Trans. Inform. Theory. vol.34, pp.605-612(1988)

[7] I. Daubechies : *Ten Lectures on Wavelets,* Rutgers University and AT & T Bell Laboratories.(1992)

[8] I. Daubechies and T. Paul: *A Time frequency localization operator: A geometric phase space approach II, The use of dilation and translations,* Inverse Prob. Theory. vol. 4, pp.661-680(1988)

[9] G. B. Folland : *Harmonic Analysis in Phase Space,* Princeton Univ. Press (1989)

[10] A. Furusawa : *Quantum Optics and Quantum Information,* Suurikougakusha (2005)

[11] K. Husimi : *Quantum Statistical Mechanics,* Kyoritu Shuppan(1948)

[12] K. Gröhenig: *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin, Boston(2000)

[13] M. Iwata : *Support Properties of Wigner Distributions* , Master Thesis, Sophia Universtity, Tokyo(2009)

[14] F. Luef : *Projective modules over noncommutative tori are multi-window Gabor frames for modulatoion spaces,* J. Func. Anal, vol. 257, pp.1921-1946, (2009)

[15] F. Luef and Yu. Manin : *Quantum theta functions and Gabor frames for modulatoion spaces,* Lett. Math. Phys., vol.88, pp.131-161, (2009)

[16] A. Martinez : *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis,* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg(2001)

[17] T. Matsuzawa : *A calculus approach to the hyperfunctions I,* Nagoya Math. J. 108, pp.55 - 67(1987)

[18] M. Morimoto and K. Yoshino : *A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponentila type,*
Hokkaido Math. J. 7, pp.259 - 270(1978)

[19] Y. Oka : *N - Representation for S and S',* Master Thesis, Sophia University(2002)

[20] Patrick J. Oonincx and Hennie G. ter Morsche : *Fractional Fourier transform and its Applications to Energy Localization Problems,*
Journal on Applied Signal Processing vol.7, pp.1257 - 1264(2003)

[21] W. Rudin : *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company. New York(1987)

[22] B. Simon : *Disrtribution and their Hermite expansions,*
J. Math. Phys. vol. 12, pp.140 - 148(1971).

[23] M. W. Wong : *Weyl Transforms,* Springer-Verlag. New York. (1998)

[24] M. W. Wong : *Localization Operators on the Weyl-Heisenberg Group,* Geometry, Analysis and Applications, Proceedings of the International Conference (editor:P.S.Pathak) 303-314(2001)

[25] M. W. Wong : *Wavelet Transforms and Localization Operator,* Birkhäuser-Verlag. Basel, Berlin, Boston. (2002)

[26] Y. Yoshimura : *A Characterization of Gelfand - Shilov spaces by Bargmann transform,* Master Thesis, Sophia University(2006)

[27] Z. G-Zhing : *Theory of Distributions of S type and Pansions,* Chinese Math.-Acta. pp.211-221(1963)