数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 32-39

RAMネットワークDEAモデルについて

長崎大学・経済学部　　丸山　幸宏 (Yukihiro Maruyama)
Faculty of Economics
Nagasaki University

1　はじめに

本論文では,部分効率性のみでなく，全体効率性を計測できるRAMネットワークDEAモデルを導入し，そのモデルの性質を調べる。

ネットワーク DEA モデルは, Fare, Grosskopf ([2], [3]) により導入され，さらに Lewis, Prieto ([4], [5])により拡張された。ただしそれらはラディアル測定により効率値が求められている。一方 Tone and Tsutui ([6]) は非ラディアル測定の効率値をもつSBMネットワーク DEAを導入した。ただし,SBMモデルでは全てのデータは正の値であることが仮定されている。

本論文では，RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルを導入しその性質を調べる。 RAM ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持ち，入力もしくは出力に負のデータを含んでいても適用できることに注意する。

2　RAM ネットワーク DEA モデル

RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルを導入し，その部分効率性および，全体効率性を定義する。

［諸記号（図 1 参照）］

$\boldsymbol{n}$: DMU の数， K : division の数，

$\boldsymbol{m_k}$: division $\boldsymbol{k}$ への入力数， $\boldsymbol{r_k}$: division $\boldsymbol{k}$ からの出力数，

D : division の全体，1 から K まで番号付けされている，

$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h})$: division $\boldsymbol{k}$ から division $\boldsymbol{h}$ へのリンク（中間生産物），

$t_{(k,h)}$: リンク $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{h})$ における項目数，

S : 入力リンクを持たない **division** の全体, T : 出力リンクを持たない **division** の全体,

L : リンクの全体

$\mathbf{x}_j^k \in \mathbb{R}^{m_k}$: **division** k での**DMU**j への入力資源 $(k=1,\ldots,K)$,

$\mathbf{y}_j^k \in \mathbb{R}^{r_k}$: **division** k での**DMU**j からの出力生産物 $(k=1,\ldots,K)$,

$\mathbf{z}_j^{(k,h)} \in \mathbb{R}^{t(k,h)}$ ：DMU$_j$ の，リンク(k,h)上での，division k からの入力資源
　　　　　＝DMU$_j$ の，リンク(k,h)上での，division h への出力生産物
ただし j は j番目$(j=1,\ldots,n)$の DMU を表す。

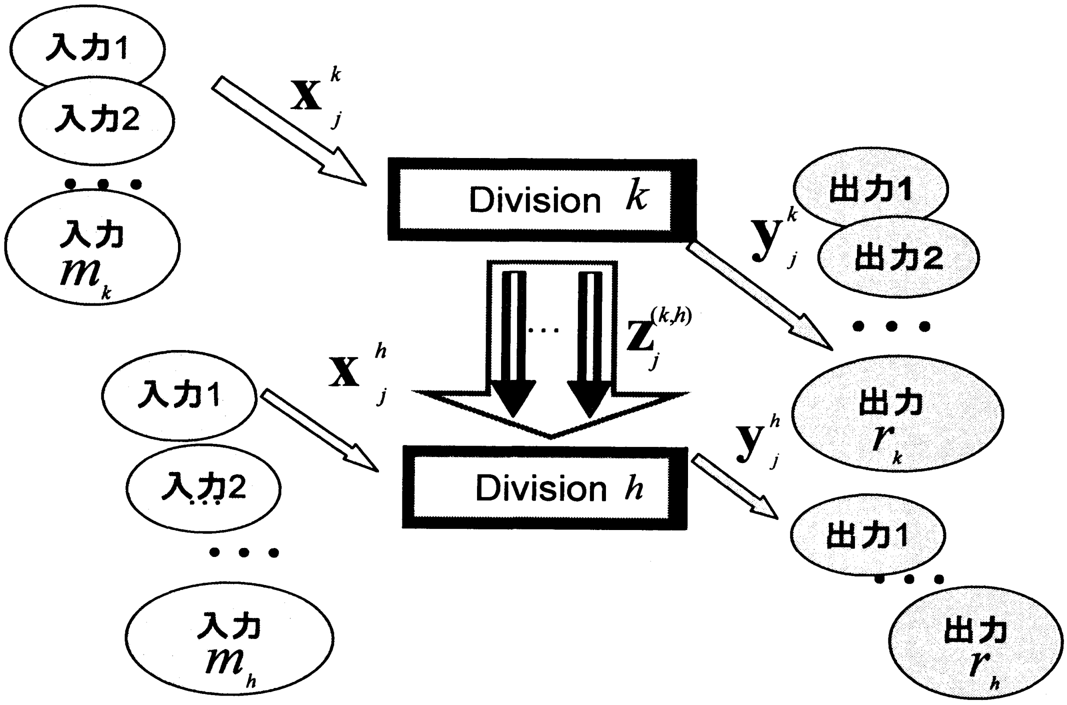

図１　DMU$_j$における諸記号

生産可能集合を下記で定義する：$\left\{(\mathbf{x}^k,\mathbf{y}^k,\mathbf{z}^{(p,k)},\mathbf{z}^{(k,q)})\right\}$

$$\mathbf{x}^k \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^k \lambda_j^k \quad (k=1,\ldots,K)$$

$$\mathbf{y}^k \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j^k \lambda_j^k \quad (k=1,\ldots,K)$$

$$\mathbf{z}^{(p,k)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(p,k)} \lambda_j^k \quad (\forall(p,k)) \quad \text{(division } k \text{へのインプットとしての制約)}$$

$$\mathbf{z}^{(p,k)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(p,k)} \lambda_j^p \quad (\forall(p,k)) \quad \text{(division } p \text{からのアウトプットとしての制約)}$$

$$\mathbf{z}^{(k,q)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(k,q)} \lambda_j^q \quad (\forall(k,q)) \quad \text{(division } q \text{へのインプットとしての制約)}$$

$$\mathbf{z}^{(k,q)} = \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j^{(k,q)} \lambda_j^k \quad (\forall(k,q)) \quad \text{(division } k \text{からのアウトプットとしての制約)}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k = 1 \ (\forall k), \ \lambda_j^k \geq 0 \ (\forall j,k).$$

RAM（Range Adjusted Measure） ネットワーク **DEA** モデルは次で定義される：

$$\rho_o^* = \mathrm{Max}\sum_{k=1}^{K} w^k \left[\frac{1}{m_k + s_k}\left(\sum_{i=1}^{m_k}\frac{s_{io}^{k-}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k}\frac{s_{ro}^{k+}}{R_r^{k+}}\right)\right],$$

$$\sum_{k=1}^{K} w^k = 1,\ w^k \geq 0\,(\forall k), \tag{1}$$

制約条件：

$$\mathbf{x}_o^k = \mathbf{X}^k \boldsymbol{\lambda}^k + \mathbf{s}_o^{k-} \quad (k = 1,\ldots,K),$$
$$\mathbf{y}_o^k = \mathbf{Y}^k \boldsymbol{\lambda}^k - \mathbf{s}_o^{k+} \quad (k = 1,\ldots,K),$$
$$\mathbf{Z}^{(k,h)} \boldsymbol{\lambda}^h = \mathbf{Z}^{(k,h)} \boldsymbol{\lambda}^k \quad (\forall (k,h)),$$
$$\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda}^k = 1 \quad (k = 1,\ldots,K),$$
$$\boldsymbol{\lambda}^k \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s}_o^{k-} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s}_o^{k+} \geq \mathbf{0},\ (\forall k)$$

ただし

$$R_i^{k-} = \overline{x}_i^k - \underline{x}_i^k,\ i = 1,\ldots,m_k,\ \ R_r^{k+} = \overline{y}_r^k - \underline{y}_r^k,\ r = 1,\ldots,r_k,$$
$$\overline{x}_i^k = \mathrm{Max}\left\{x_{ij}^k : j = 1,\ldots,n\right\},\ \ \underline{x}_i^k = \min\left\{x_{ij}^k : j = 1,\ldots,n\right\},$$
$$\overline{y}_r^k = \mathrm{Max}\left\{y_{rj}^k : j = 1,\ldots,n\right\},\ \ \underline{y}_r^k = \min\left\{y_{rj}^k : j = 1,\ldots,n\right\},$$
$$\mathbf{X}^k = (\mathbf{x}_1^k,\ldots,\mathbf{x}_n^k) \in \mathbb{R}^{m_k \times n},\ \ \mathbf{Y}^k = (\mathbf{y}_1^k,\ldots,\mathbf{y}_n^k) \in \mathbb{R}^{r_k \times n},$$
$$\mathbf{Z}^{(k,h)} = (\mathbf{z}_1^{(k,h)},\ldots,\mathbf{z}_n^{(k,h)}) \in \mathbb{R}^{t_{(k,h)} \times n},$$

ここで w^k は division k の相対的ウエイトである。本モデルは，Cooper 等（[1]）により導入された RAM モデルの一般化モデルである。

問題(1)の最適解を $(\boldsymbol{\lambda}^{*k}, \mathbf{s}_o^{k-*}, \mathbf{s}_o^{k+*})$ とするとき，各DMU$_o$ $(o = 1,\ldots,n)$ に対して，全体効率性および部分効率性を次で定義する：

定義 1.（全体 RAM 効率性）

$$\Gamma_o^* = \sum_{k=1}^{K} w^k \left(1 - \frac{1}{m_k + s_k}\left(\sum_{i=1}^{m_k}\frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k}\frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}}\right)\right)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{K} w^k \left[\frac{1}{m_k + s_k}\left(\sum_{i=1}^{m_k}\frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}} + \sum_{r=1}^{r_k}\frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}}\right)\right] = 1 - \rho_o^*.$$

とおくとき，Γ_o^* の値を全体RAM 効率性と呼ぶ。もし $\Gamma_o^* = 1$ ならば，DMU$_o$ は 全体RAM 効率的であると呼ばれる。

定義2．（部分 RAM 効率性）

$$\Gamma^*_{ko}=1-\frac{1}{m_k+s_k}\left(\sum_{i=1}^{m_k}\frac{s_{io}^{k-*}}{R_i^{k-}}+\sum_{r=1}^{r_k}\frac{s_{ro}^{k+*}}{R_r^{k+}}\right),k=1,\ldots,K.$$

とおくとき，Γ^*_{ko} の値を部分RAM効率性と呼ぶ。もし $\Gamma^*_{ko}=1$ ならば，DMU$_o$ division k でRAM 効率的であると呼ばれる。

3 RAM ネットワーク DEA モデルの性質

定義3．（データ変換に対する不変性；W. W. Cooper, L. M. Seiford, and K. Tone [4]）
DEA モデルは，与えられた問題の入出力データを平行移動させても効率値が影響を受けないとき，データ変換に対する不変性を持つと呼ばれる。

定理1．**RAM (Range Adjusted Measure) ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持つ。**

問題（1）の最適解 $(\boldsymbol{\lambda}^{*k},\mathbf{s}_o^{k-*},\mathbf{s}_o^{k+*})$ を用いて，各DMU$_o$の効率的フロンティア上への射影を次で定義する：

$$\mathbf{x}_o^{k*}\leftarrow\mathbf{x}_o^k-\mathbf{s}_o^{k-*}\quad(k=1,\ldots,K),$$
$$\mathbf{y}_o^{k*}\leftarrow\mathbf{y}_o^k+\mathbf{s}_o^{k+*}\quad(k=1,\ldots,K),$$
$$\mathbf{z}_o^{(k,h)*}\leftarrow\mathbf{Z}^{(k,h)}\boldsymbol{\lambda}^{k*}.\quad(\forall(k,h)).$$

定理2．各DMU$_o$の効率的フロンティア上への射影は全体効率的である。

定義4．各DMU$_o$のdivision k における参照集合を次で定義する：

$$\mathbf{R}_o^k=\left\{j\mid\boldsymbol{\lambda}_j^{k*}>0\right\}(j\in\{1,2,\ldots,n\}).$$

参照集合を用いて各DMU$_o$の活動（入出力）は次のように表される：

$$\mathbf{x}_o^k=\sum_{j\in R_o^k}\mathbf{x}_j^k\boldsymbol{\lambda}_j^{k*}+\mathbf{s}^{k-*},\ \mathbf{y}_o^k=\sum_{j\in R_o^k}\mathbf{y}_j^k\boldsymbol{\lambda}_j^{k*}-\mathbf{s}^{k+*}.$$

例1．本例では，各ＤＭＵ$_j$が，図２のような入出力のネットワーク構造をもつ問題を取り扱う。３つの division をもち，各 division は各々独自の入力，出力をもち，さらにそれらは２つのリンクで結合され，リンク上のインプット（でありかつアウトプットでもある）をもつ。表１は各 division およびリンクにおける入出力データを表す。Division 2の入力２および division 3の出力３の一部において負値のデータが存在することに注意する。従って表１のデータに Tone, Tsutsui [6]による SBM ネットワーク DEA モデルは（同モデルのデータは全て非負であることが仮定されているので）適用できない。しかし，本論文で提案した RAM ネットワーク DEA モデルは適用可能である。まず表１のデータの Division 2 の入力２および division 3 の出力３に一律に３を加えると表２（この表におけるデータは Tone, Tsutsui [6]の Table5 と同じものである）が得られる。表２のデータに RAM ネットワークモデルを適用すると，表 3 の全体効率値及び部分効率値(RAM 効率性)が得られる（表３ には比較のため Tone, Tsutsui [6] が表２ のデータに対して求めた SBM 効率値を併記している）。データ変換に対する不変性より，表２のデー

タに RAM ネットワーク DEA モデルを適用しても同じ効率値が得られる（が，一方 SBM ネットワーク DEA モデルは適用できない）ことに注意する。

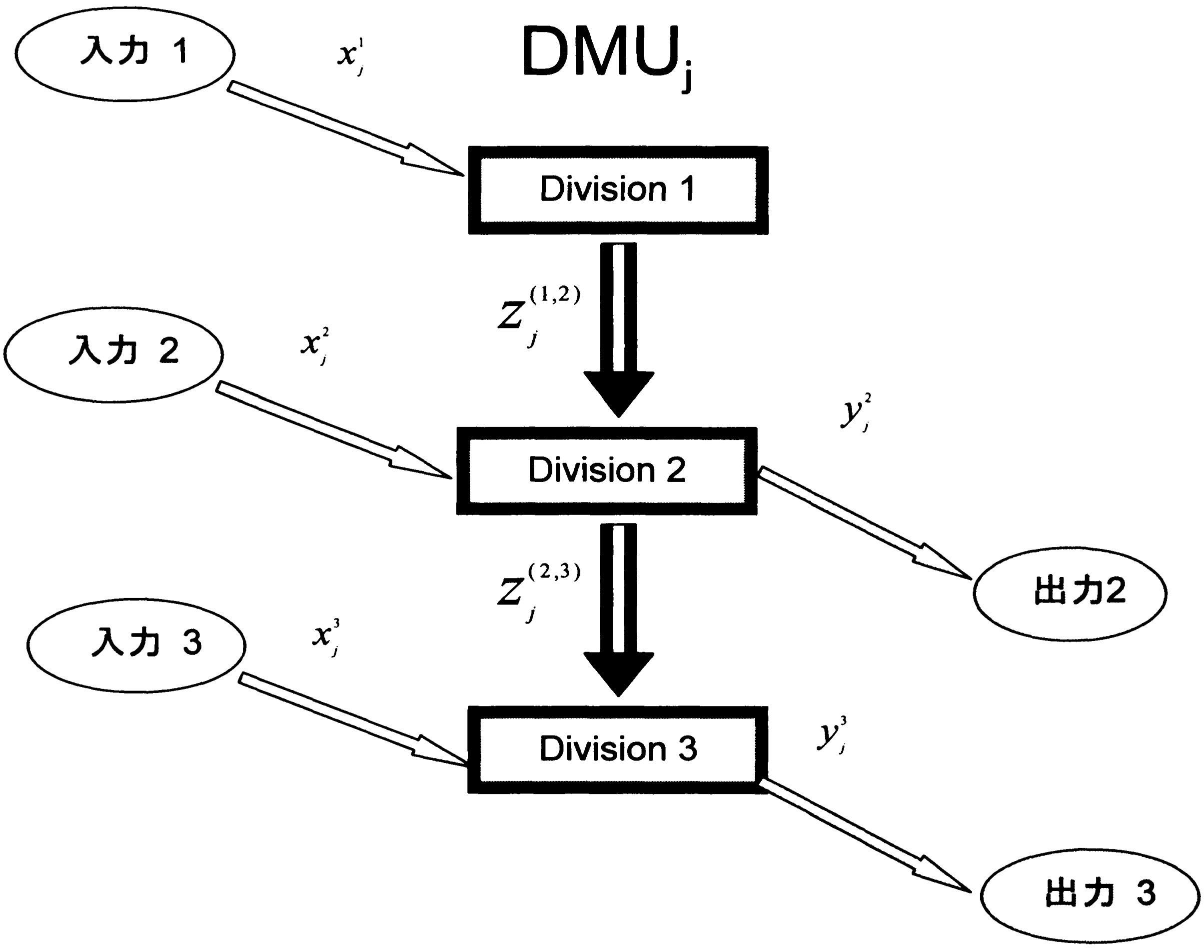

図 2　DMU におけるネットワーク構造

表 1　各 division，リンクにおける入出力データ

	Div 1	Div 2		Div 3		リンク	
DMU	入力 1	入力 2	出力 2	入力 3	出力 3	(1, 2)	(2, 3)
A	3	7	2	5	−1	8	2
B	14	−2	1	5	2	9	5
C	16	−1	2	11	1	7	4
D	19	−2.5	2	7	1	11	4

表 2　変換された入出力データ(Tone, Tsutsui [6], Table 5)

	Div 1	Div 2		Div 3		リンク	
DMU	入力 1	入力 2	出力 2	入力 3	出力 3	(1, 2)	(2, 3)
A	3	10	2	5	2	8	2
B	14	1	1	5	5	9	5
C	16	2	2	11	4	7	4
D	19	0. 5	2	7	4	11	4

表 3　全体効率値および部分効率値

DMU	全体効率値		Div1(0. 4)		Div2(0. 2)		Div3(0. 4)	
	RAM	SBM	RAM	SBM	RAM	SBM	RAM	SBM
A	0. 78	0. 71	1	0. 875	0. 56	0. 2	0. 67	0. 8
B	0. 86	0. 672	0. 65	0. 368	1	0. 625	1	1
C	0. 47	0. 299	0. 19	0. 258	0. 981	0. 25	0. 5	0. 364
D	0. 93	0. 515	1	0. 217	1	1	0. 83	0. 571

4　今後の課題

本論文では，RAM（Range Adjusted Measure）ネットワーク DEA モデルを導入し，その性質を調べた。すなわち RAM ネットワーク DEA モデルはデータ変換に対する不変性を持ち，この性質により，同モデルは入力もしくは出力に負のデータを含んでいる問題にも適用できることを例示した。

財務分析において，負値のデータを含む問題が多く見られる。例えば永田[7]により構築された，CFROA 分析において，負値の営業キャッシュ・フローをもつ企業が頻出する。そのような企業も含めた，RAM ネットワーク DEA モデルによる財務分析を今後の研究課題とする。

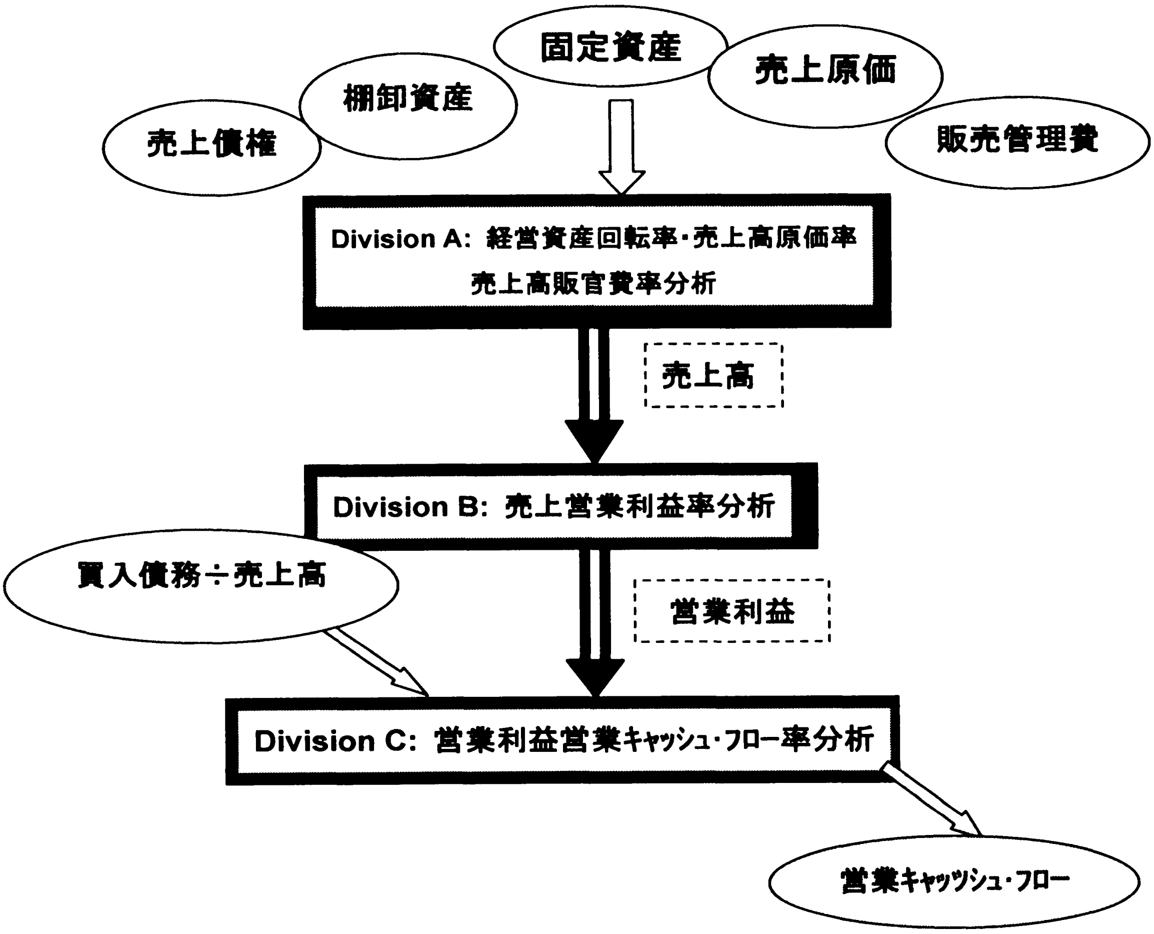

図 3　CFROA 分析のネットワーク構造（永田[7]）

参考文献

1. W.W. Cooper, K.S. Park and J.T. Pastor, "RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measures in DEA", *Journal of Productivity Analysis* **11**, pp.5-12 (1999).
2. R. Färe and S. Grosskopf, *Intertemporal Production Frontiers*: *With Dynamic* DEA, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
3. R. Färe and S. Grosskopf, "Network DEA", *Socio-Economic Planning Sciences* **34**, pp.35-49 (2000).

4. H.F. Lewis and T.R. Sexton, "Network DEA: efficiency Analysis of organizations with complex internal structure", *Computers & Operations Research* **31**, pp.1365-1410 (2004).
5. A.M. Prieto and J.L. Zofio, "Network DEA efficiency in input-output models: With an application to OECD countries", *European Journal of Operational Research* **178,** pp. 292-304 (2007).
6. K. Tone and M. Tsutsui., "Network DEA, A slack-based measure approach", Discussion Paper, 07-08, GRIPS Policy Information Center, pp.1-36 (2008).
7. 永田吉朗,「財務分析の限界とネットワーク DEA による改善に関する一考察 」, 長崎大学大学院経済学研究科経営学博士学位論文, (2009).