数理解析研究所講究録
第 1685 巻 2010 年 50-58

縮小射影法と堅非拡大写像
Shrinking projection methods and firmly nonexpansive mappings

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. shrinking projection method, 堅非拡大写像, 不動点.

1 序論

本稿では, 文献 [3] の紹介を行い, そこには述べなかった関連する結果を取り扱う。

文献 [3] では, 最近 [21] で導入された縮小射影法 (shrinking projection method) を使い, 堅非拡大 (firmly nonexpansive) 写像の不動点定理および堅非拡大写像の族に関する収束定理を証明した。我々が非拡大写像ではなく堅非拡大写像に注目した主な理由は次の二つである。

1. 非拡大写像の代表例は堅非拡大である。例えば, Hilbert 空間上の閉凸集合の上への距離射影および単調作用素のリゾルベントは堅非拡大である。
2. 非拡大写像の不動点問題は, 堅非拡大写像の不動点問題に書き換えられる。実際, S を非拡大写像とすると, $T=(I+S)/2$ は堅非拡大であり, S と T の不動点集合が一致する。ここで, I は恒等写像である。

2 準備

本稿を通して, H は実 Hilbert 空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H の内積, $\|\cdot\|$ は H のノルム, C は H の空でない部分集合, $\mathbb{N}$ は正の整数の集合とする。H の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n\to x$ と表し, 弱収束することを $x_n\rightharpoonup x$ と表す。

C を H の空でない部分集合とし, T を C から H への写像とする。写像 T の不動点の集合を $F(T)$ で表す。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x,y\in C$ に対して $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$ が成り立つときをいう。C が閉凸で T が非

拡大であるとき, $F(T)$ は閉凸であることが知られている。非拡大写像 T が強非拡大 (strongly nonexpansive) であるとは, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が C の点列で, $\{x_n - y_n\}$ が有界かつ $\|x_n - y_n\| - \|Tx_n - Ty_n\| \to 0$ を満たすならば

$$\|x_n - y_n - (Tx_n - Ty_n)\| \to 0$$

が成り立つときをいう [5]。二つの強非拡大写像の合成は, 強非拡大であることが知られている。強非拡大写像について詳しくは [5] を参照するとよい。写像 T が堅非拡大 (firmly nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - y - (Tx - Ty)\|^2$$

が成り立つときをいう。堅非拡大写像は強非拡大であることが, 定義より容易にわかる。T が非拡大のとき, $(I + T)/2$ は堅非拡大であることが知られている。ここで, I は恒等写像である。堅非拡大写像について詳しくは, [6] を参照するとよい。

C を H の空でない閉凸部分集合とする。各 $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

を満たす点 $z \in C$ が唯一存在する。この z を $P_C x$ で表し, P_C は H から C の上への距離射影と呼ばれる。P_C は堅非拡大であることが知られている。

H から H への多価写像 A を, そのグラフと同一視し $A \subset H \times H$ で表す。$A \subset H \times H$ を極大単調作用素 (定義については [20] を参照), I を恒等写像, $r > 0$ とする。このとき, $(I + rA)^{-1}$ は H から $\mathrm{dom}(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ の上への 1 価写像であり, A のリゾルベントと呼ばれ, J_r と表される。A のリゾルベント J_r は堅非拡大であり, $F(J_r) = A^{-1}0 = \{x \in H : Ax \ni 0\}$ であることが知られている。

非拡大写像および極大単調作用素の周辺の基本事項について詳しくは, 例えば [20] を参照するとよい。

$\{T_n\}$ を共通不動点を持つ C から H への写像の列とする。このとき, $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $T_n x_n - x_n \to 0$ を満たす C の有界点列 $\{x_n\}$ の弱収積点がすべて $\{T_n\}$ の共通不動点になるときをいう。

例 2.1. C を H の閉凸集合, $T\colon C \to H$ を不動点を持つ非拡大写像とするとき, 写像列 $\{T, T, T, \ldots\}$ は条件 (Z) を満たす。

証明. $\{x_n\}$ を $x_n - Tx_n \to 0$ を満たす C の有界点列とし, $x_{n_i} \rightharpoonup u$ とする。このとき, $\{Tx_{n_i}\}$ は有界で $x_{n_i} - Tx_{n_i} \to 0$ であることから, $u \in F(T)$ である。実際, もし $u \neq Tu$

とすると

$$
\begin{aligned}
\liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - u\|^2 &< \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - u\|^2 + \|u - Tu\|^2 \\
&= \liminf_{i\to\infty} \Big(\|x_{n_i} - u\|^2 + \|u - Tu\|^2 + 2\langle x_{n_i} - u, u - Tu \rangle \Big) \\
&= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - u + u - Tu\|^2 \\
&= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - Tu\|^2 \\
&= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - Tx_{n_i} + Tx_{n_i} - Tu\|^2 \\
&= \liminf_{i\to\infty} \Big(\|x_{n_i} - Tx_{n_i}\|^2 + \|Tx_{n_i} - Tu\|^2 \\
&\qquad + 2\langle x_{n_i} - Tx_{n_i}, Tx_{n_i} - Tu \rangle \Big) \\
&= \liminf_{i\to\infty} \|Tx_{n_i} - Tu\|^2 \\
&\le \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - u\|^2
\end{aligned}
$$

となり, 矛盾が生じる。ゆえに, $u = Tu$ であり, $\{T, T, T, \dots\}$ が条件 (Z) を満たすことがわかった。 □

文献 [3] より, いくつか補助定理を引用する。

補助定理 2.2 ([3, Lemma 2.1]). H を Hilbert 空間, $A \subset H \times H$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素, $\{r_n\}$ を $\inf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする。このとき, $\{J_{r_n}\}$ は条件 (Z) を満たす。

補助定理 2.3 ([3, Lemma 2.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ C から H への写像の列とし, $\{\alpha_n\}$ を $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < 1$ を満たす $[0,1)$ の数列とする。さらに, C から H への写像列 $\{T_n\}$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n = \alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n$ で定義する。ここで, I は C 上の恒等写像である。このとき, $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすならば, $\{T_n\}$ も条件 (Z) を満たす。

補助定理 2.4 ([3, Lemma 2.3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ C から C への強非拡大写像の列とする。さらに写像 $T_n \colon C \to C$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n = S_1 S_2 \cdots S_n$ で定義する。このとき, $\{T_n\}$ は (Z) を満たす。

3 堅非拡大写像および非拡大写像の不動点定理

この節では, 松下-高橋 [13] を参考にして得られた堅非拡大写像の不動点定理および非拡大写像の不動点定理を紹介する。

次の補題によって, 縮小射影法による点列が, 写像の不動点の存在を仮定することなく定義できることがわかる。

補助定理 3.1 ([3, Lemma 4.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を堅非拡大写像とし, x を H の点とする。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle Tx_n - z, x_n - Tx_n \rangle \geq 0\} \end{cases} \tag{3.1}$$

で定義する。このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_n \neq \emptyset$ である。つまり, 点列 $\{x_n\}$ が定義できる。

補題 3.1 を踏まえて, 次の堅非拡大写像の不動点定理を得る。

定理 3.2 ([3, Theorem 4.3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $T\colon C \to C$ を堅非拡大写像とし, x を H の点とする。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.1) で定義する。このとき, 以下の三つは同値である。

1. T は不動点を持つ;
2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
3. $\{x_n\}$ は有界である。

定理 3.2 から次の非拡大写像の不動点定理を示すことができる。

定理 3.3. H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $S\colon C \to C$ を非拡大写像とし, x を H の点とする。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - Sx_n\| \leq \|z - x_n\|\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, 点列 $\{x_n\}$ は定義できて, 以下の三つは同値である。

1. S は不動点を持つ;
2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$;
3. $\{x_n\}$ は有界である。

証明. 写像 $T\colon C \to C$ を $T = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}S$ で定義する。ここで, I は恒等写像である。このとき, T は堅非拡大であり, $F(S) = F(T)$ である。さらに, 等式

$$\begin{aligned} 4\langle Tx_n - z, x_n - Tx_n\rangle &= 4\left\langle \frac{x_n + Sx_n}{2} - z, x_n - \frac{x_n + Sx_n}{2}\right\rangle \\ &= \langle x_n + Sx_n - 2z, x_n - Sx_n\rangle \\ &= \langle (x_n - z) + (Sx_n - z), (x_n - z) - (Sx_n - z)\rangle \\ &= \|x_n - z\|^2 - \|Sx_n - z\|^2 \end{aligned}$$

より

$$C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle Tx_n - z, x_n - Tx_n\rangle \geq 0\}$$

が成り立つ。したがって, 補助定理 3.1 より $\{x_n\}$ は定義できて, 定理 3.2 より結論を得る。 □

最近, 松下-高橋 [14] によって, 定理 3.3 と似た次の結果が示された。

定理 3.4 ([14, Corollary 2.1]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $S\colon C \to C$ を非拡大写像とし, x を C の点とする。C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \|z - Sx_n\| \leq \|z - x_n\|\}; \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x - x_n\rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。このとき, 点列 $\{x_n\}$ は定義できて, $\{x_n\}$ は有界であることと S が不動点を持つことは同値である。

4　堅非拡大写像族に関する収束定理

この節では, 堅非拡大写像の族に関する次の強収束定理を紹介し, さらにその応用を議論する。

定理 4.1 ([3, Theorem 3.2]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, x を H の点とし, $\{T_n\}$ を C から H への堅非拡大写像の列とする。さらに, $\{T_n\}$ は共通不動

点を持ち, 条件 (Z) を満たすと仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle T_n x_n - z, x_n - T_n x_n \rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。ただし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である。

補助定理 2.2 および定理 4.1 の直接的な結果として, 極大単調作用素のリゾルベントに関する次の収束定理を得る。同種の結果が [17], [16], [7] および [21] にある。

系 4.2 ([3, Corollary 3.3]). H を Hilbert 空間, $A \subset H \times H$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ を満たす極大単調作用素, $\{r_n\}$ を $\inf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とし, x を H の点とする。H の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸部分集合の列 $\{C_n\}$ を $C_1 = H$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle J_{r_n} x_n - z, x_n - J_{r_n} x_n \rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。ここで, $J_{r_n} = (I + r_n A)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ に強収束する。

次に, 定理 4.1 を使って, 非拡大写像の族に関する収束定理を示す。

定理 4.3 ([3, Theorem 3.4]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, x を H の点, $\{S_n\}$ を C から H への非拡大写像の列, $\{\alpha_n\}$ を $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < 1$ を満たす区間 $[0,1)$ の数列とする。さらに, $\{S_n\}$ は共通不動点を持ち, 条件 (Z) を満たすと仮定する。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S_n x_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \end{cases} \tag{4.1}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。ただし, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ である。

証明. 写像列 $\{T_n\}$ を, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_n = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(\alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n) = \frac{1 + \alpha_n}{2} I + \frac{1 - \alpha_n}{2} S_n$$

で定義する。ただし, I は恒等写像である。このとき $F(T_n) = F(S_n)$ であるから, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F$ が成り立つ。$\alpha_n I + (1 - \alpha_n) S_n$ は非拡大であるから, 各 $n \in \mathbb{N}$ につい

て T_n は堅非拡大である。また, 等式

$$\begin{aligned}\|z-x_n\|^2-\|z-y_n\|^2 &= \|x_n\|^2-2\langle z,x_n\rangle-\|y_n\|^2+2\langle z,y_n\rangle\\ &= \langle x_n+y_n-2z, x_n-y_n\rangle\\ &= 4\langle T_nx_n-z, x_n-T_nx_n\rangle\end{aligned}$$

より, $C_{n+1}=\{z\in C_n : \langle T_nx_n-z, x_n-T_nx_n\rangle\geq 0\}$ であることがわかる。補助定理 2.3 より $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすから, 定理 4.1 により結論を得る。 □

定理 4.3 は文献 [21] の次の定理と似ているが, 両者にどのような関係があるか, 今のところ著者にはわからない。

定理 4.4 ([21, Theorem 3.3]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, x を H の点, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ C から C への非拡大写像の列, $\mathcal{T}$ を共通不動点を持つ C から C への非拡大写像の族, $\{\alpha_n\}$ を $\sup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n<1$ を満たす区間 $[0,1)$ の数列とする。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を $C_1=C$ および $n\in\mathbb{N}$ に対して (4.1) で定義する。さらに, 次の二つの条件を仮定する。

1. $\{z_n\}$ が $z_n-S_nz_n\to 0$ を満たす C の有界点列ならば, すべての $T\in\mathcal{T}$ に対して $z_n-Tz_n\to 0$;
2. $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)=\bigcap_{T\in\mathcal{T}}F(T)$。

このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。

定理 4.3 から次の結果も得られる。

系 4.5 ([3, Corollary 3.6]). H を Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, x を H の点, $\{S_n\}$ を共通不動点を持つ C から H への強非拡大写像の列, $\{\alpha_n\}$ を $\sup_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n<1$ を満たす区間 $[0,1)$ の数列とする。C の点列 $\{x_n\}$ および H の閉凸集合列 $\{C_n\}$ を $C_1=C$ および $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x);\\ y_n=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)S_1S_2\cdots S_nx_n;\\ C_{n+1}=\{z\in C_n:\|z-y_n\|\leq\|z-x_n\|\}\end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。ただし, $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)$ である。

証明. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, $T_n=S_1S_2\cdots S_n$ とおくと, 写像 T_n は非拡大であり, 強非拡大写像の性質 [5, Lemma 2.1] を使うと, $F(T_n)=\bigcap_{i=1}^{n}F(S_i)$ であることがわかる。ゆえ

に, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F \neq \emptyset$ となる。補助定理 2.4 により, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすことがわる。したがって, 定理 4.3 より結論を得る。 $\square$

参考文献

[1] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[3] ———, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis **71** (2009), e1626–e1632.

[4] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *A weak-to-strong convergence principle for Fejér-monotone methods in Hilbert spaces*, Math. Oper. Res. **26** (2001), 248–264.

[5] R. E. Bruck and S. Reich, *Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces*, Houston J. Math. **3** (1977), 459–470.

[6] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[8] Y. Kimura and W. Takahashi, *A generalized proximal point algorithm and implicit iterative schemes for a sequence of operators on Banach spaces*, Set-Valued Anal. **16** (2008), 597–619.

[9] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[10] ———, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[11] C. Martinez-Yanes and H.-K. Xu, *Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 2400–2411.

[12] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[13] ———, *A proximal-type algorithm by the hybrid method for maximal monotone operators in a Banach space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2007, pp. 355–365.

[14] ———, *The sequence by the hybrid method and the existence of fixed points of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publishers, Yokohama, 2008, pp. 109–113.

[15] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[16] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[17] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[19] 高橋渉, 『凸解析と不動点近似』, 横浜図書, 2000.

[20] ———, 『非線形・凸解析学入門』, 横浜図書, 2005.

[21] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.