数理解析研究所講究録
第 1687 巻 2010 年 63-70

q-HOOK FORMULA OF GANSNER TYPE FOR A GENERALIZED YOUNG DIAGRAM

KENTO NAKADA

1. INTRODUCTION

E. R. Gansner は, 論文 [3] で, 与えられたヤング図形 Y の**多変数** *q-hook formula* を証明した:

$$\sum_{\sigma:\text{reverse plane partition over } Y} \mathbf{q}^{\sigma} = \prod_{v\in Y} \frac{1}{1-\mathbf{q}^{\mathrm{H}_Y(v)}}, \tag{1.1}$$

ここで, $\mathrm{H}_Y(v)$ は, 箱 $v \in Y$ の *hook* である (詳細な定義は section 2, 3). この等式 (1.1) から, J. S. Frame, G. de B. Robinson, R. M. Thrall によるよく知られた *hook length formula* [2] が導ける

$$\#\mathrm{STab}(Y) = \frac{(\#Y)!}{\prod_{v\in Y}\#\mathrm{H}_Y(v)}. \tag{1.2}$$

本稿では, この結果の (D. Peterson, R. A.Proctor の意味の)generalized Young diagram への一般化を紹介する. なお, 本稿の主結果は未発表の Peterson, Proctor による結果と同値である [11].

2. $(P;\leq)$-PARTITIONS AND $(c;I)$-TRACE GENERATING FUNCTIONS

以下, $P=(P;\leq)$ を有限な半順序集合とする.

Definition 2.1. 写像 $\sigma : P \to \mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ は次の条件を満たすとき $(P;\leq)$-partition と呼ばれる:

$$u \leq v \Rightarrow \sigma(u) \geq \sigma(v), \qquad u, v \in P$$

$(P;\leq)$*-partitions* 全体の集合を $\mathsf{A}(P;\leq)$ と書く.

集合 I と写像 $c : P \to I$ が与えられているとする. このとき, I を *color-set*, I の元を *color*, c を *coloring* と呼ぶ. q_i を $i \in I$ で添え字づけられた不定元とする. このとき, 各 $\sigma \in \mathsf{A}(P;\leq)$ に対して, q_i の単項式 $\mathbf{q}^{\sigma}$ を次で定義する:

$$\mathbf{q}^{\sigma} := \prod_{v\in P} q_{c(v)}^{\sigma(v)}.$$

また, q_i の形式冪級数 $T(P;\leq)$ を次で定義する:

$$T(P;\leq) := \sum_{\sigma\in\mathsf{A}(P;\leq)} \mathbf{q}^{\sigma}.$$

形式冪級数 $T(P;\leq)$ を $(c;I)$*-trace generating function of* $(P;\leq)$ と呼ぶ.

Key words and phrases. Generalized Young diagrams, Trace generating functions, q-hook formula, Kac-Moody Lie algebra, P. MacMahon's identity.

Definition 2.2. $d := \#P$ とおく. 全単射 $L : \{1, \cdots, d\} \to P$ は, 次の条件を満たすとき $(P; leq)$ の linear extension と呼ばれる:

$$L(k) \leq L(l) \Rightarrow k \leq l, \quad k, l \in \{1, \cdots, d\}.$$

$(P; \leq)$ の *linear extensions* 全体の集合を $\mathcal{L}(P; \leq)$ と書く.

q をべつの不定元とする. すべての q_i を q に特殊化 $(q_i \longmapsto q\ (i \in I))$ したときの $T(P; \leq)$ を $U(P; \leq)$ と書く.

$$U(P; \leq) = T(P; \leq)\Big|_{q_i = q\ (i \in I)}.$$

このとき, 次の Stanley の結果は基本的である:

Proposition 2.3 (R. P. Stanley [12]). $U(P; \leq)$ は次のように書ける:

$$U(P; \leq) = \frac{W(P; q)}{\prod_{k=1}^{d}(1 - q^k)},$$

ここで, $W(P; q)$ はある整数係数の多項式 $W(P; q) \in \mathbb{Z}[q]$ である. さらに, $W(P; 1) = \#\mathcal{L}(P; \leq)$ が成り立つ.

3. Case of Young diagrams

Definition 3.1. 集合 $\mathbb{Y} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に次で半順序を入れる:

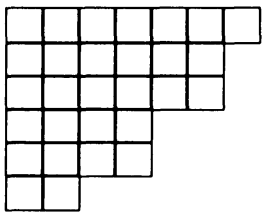
$$(i, j) \leq (i', j') \iff i \geq i' \text{ and } j \geq j'.$$

集合 $\mathbb{Y}$ の有限な *order filter* Y を Young diagram と呼ぶ. *FIGURE 3.1 (左)* を見よ.

Definition 3.2. *color-set* を $I := \mathbb{Z}$ とおく. 各箱 $v = (i, j) \in Y$ に対して, *color* $c(v)$ を次で定める:

$$c(v) := j - i \in I.$$

FIGURE 3.1 (右) を見よ. *color* $c(v)$ は v の content として知られている量である.



0	1	2	3	4	5	6
-1	0	1	2	3	4	
-2	-1	0	1	2	3	
-3	-2	-1	0			
-4	-3	-2	-1			
-5	-4					

Figure 3.1. a Young diagram and its coloring

Definition 3.3. Y を *Young diagram* とし, $v = (i, j) \in Y$ とする. Y の部分集合 $\mathrm{H}_Y(v)$ を次で定義する:

$$\mathrm{Arm}_Y(v) := \left\{ (i', j') \in Y \,\middle|\, i = i' \text{ and } j < j' \right\}.$$

$$\mathrm{Leg}_Y(v) := \left\{ (i', j') \in Y \,\middle|\, i < i' \text{ and } j = j' \right\}.$$

$$\mathrm{H}_Y(v) := \{v\} \sqcup \mathrm{Arm}_Y(v) \sqcup \mathrm{Leg}_Y(v).$$

集合 $\mathrm{H}_Y(v)$ を Y における v の hook とよぶ. *FIGURE 3.2* を見よ.

このとき, 次の定理が知られている:

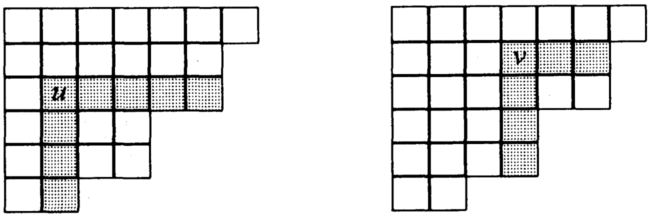


FIGURE 3.2. Hooks of u and v

Theorem 3.4 (E. R. Gansner [3]). $Y = (Y; \leq)$ を *Young diagram* とすると次が成り立つ.

$$T(Y; \leq) = \prod_{v \in Y} \frac{1}{1 - \mathbf{q}^{\mathrm{H}_Y(v)}},$$

ここで $\mathbf{q}^{\mathrm{H}_Y(v)} = \prod_{u \in \mathrm{H}_Y(v)} q_{c(u)}$ である.

Remark 3.5. $(Y; \leq)$*-partition* は reverse plane partition over Y として知られている.

定理 3.4 と命題 2.3 より,

Corollary 3.6.

$$\frac{W(Y;q)}{\prod_{k=1}^{d}(1-q^k)} = \prod_{v \in Y} \frac{1}{1 - q^{\#\mathrm{H}_Y(v)}}, \qquad \text{したがって} \qquad W(Y;q) = \frac{\prod_{k=1}^{d}(1-q^k)}{\prod_{v \in Y}(1 - q^{\#\mathrm{H}_Y(v)})}$$

を得る. 両辺で $q = 1$ とすれば, 再び命題 2.3 より,

Corollary 3.7.

$$\#\mathcal{L}(Y; \leq) = \frac{d!}{\prod_{v \in Y} \#\mathrm{H}_Y(v)}$$

を得るが, これが通常よく知られた Young diagram の hook length formula である [2].

4. Case of shifted Young diagrams

Definition 4.1. 集合 $\mathbb{S} := \left\{ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,\middle|\, i \leq j \right\}$ に次で半順序を入れる:

$$(i,j) \leq (i',j') \Longleftrightarrow i \geq i' \text{ and } j \geq j'.$$

集合 $\mathbb{S}$ の有限な *order filter* S を shifted Young diagram と呼ぶ. *FIGURE 4.1 (左)* を見よ.

Definition 4.2. *color-set* を $I := \{\overline{0}\} \cup \mathbb{N}$ とおく. 各箱 $v = (i,j) \in S$ に対して, *color* $c(v)$ を次で定める:

$$c(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \text{ and } i \textit{ is even}, \\ \overline{0} & \text{if } i = j \text{ and } i \textit{ is odd}, \\ j - i & \text{if } i < j. \end{cases}$$

FIGURE 4.1 (右) を見よ. 主対角線に *2* 種類の *color* が入っていることに注意する.

Definition 4.3. S を *shifted Young diagram* とし, $v = (i,j) \in S$ とする. S の部分集合 $\mathrm{H}_S(v)$ を次で定義する:

$$\mathrm{Arm}_S(v) := \left\{ (i',j') \in S \,\middle|\, i = i' \text{ and } j < j' \right\}.$$

$$\mathrm{Leg}_S(v) := \left\{ (i',j') \in S \,\middle|\, i < i' \text{ and } j = j' \right\}.$$

$$\mathrm{Tail}_S(v) := \left\{ (i',j') \in S \,\middle|\, j + 1 = i' \text{ and } j < j' \right\}.$$

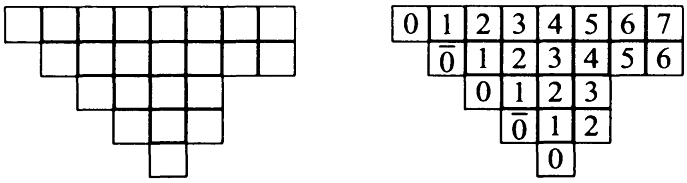


FIGURE 4.1. a shifted Young diagram and its coloring

$$\mathrm{H}_S(v) := \{v\} \sqcup \mathrm{Arm}_S(v) \sqcup \mathrm{Leg}_S(v) \sqcup \mathrm{Tail}_S(v).$$

集合 $\mathrm{H}_S(v)$ を S における v の hook と呼ぶ. *FIGURE 4.2* を見よ.

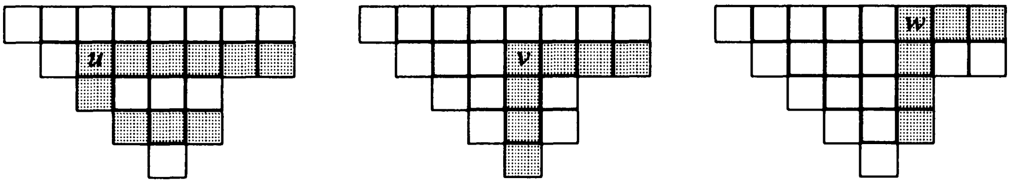


FIGURE 4.2. Hooks of u, v , and w.

このとき次の定理が成り立つ:

Theorem 4.4 ([7]). $S = (S;\leq)$ を *shifted Young diagram* とすると次が成り立つ.

$$T(S;\leq) = \prod_{v\in S} \frac{1}{1-\mathbf{q}^{\mathrm{H}_S(v)}}.$$

定理 4.4 において, 変数 q_0 と $q_{\bar{0}}$ を同一視した場合のものは Gansner によって得られている:

Theorem 4.5 (E. R. Gansner [3]). $S = (S;\leq)$ を *shifted Young diagram* とすると次が成り立つ.

$$T(S;\leq)\Big|_{q_{\bar{0}}=q_0} = \prod_{v\in S} \frac{1}{1-\mathbf{q}^{\mathrm{H}_S(v)}}\Bigg|_{q_{\bar{0}}=q_0}.$$

Remark 4.6. *Gansner による定理 4.5 の証明は, Hillman-Grassl algorithm* [4] *に基づいている.*

定理 4.4 と命題 2.3 より,

Corollary 4.7.

$$\frac{W(S;q)}{\prod_{k=1}^{d}(1-q^k)} = \prod_{v\in S}\frac{1}{1-q^{\#\mathrm{H}_S(v)}}, \qquad \text{したがって} \qquad W(S;q) = \frac{\prod_{k=1}^{d}(1-q^k)}{\prod_{v\in S}(1-q^{\#\mathrm{H}_S(v)})}$$

を得る. 両辺で $q=1$ とすれば, 再び命題 2.3 より,

Corollary 4.8.

$$\#\mathcal{L}(S;\leq) = \frac{d!}{\prod_{v\in S}\#\mathrm{H}_S(v)}$$

を得るが, これは shifted Young diagram の hook length formula である [14].

5. 一般の場合

5.1. **Kac-Moody Lie algebra からの準備.** $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ を Kac-Moody Lie algebra [5][6] の (symmetrizable とは限らない) Cartan matrix とする. $\mathfrak{h}$ を $\mathbb{R}$ -vector space, $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の dual space とし, $\langle , \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ を cannonical な bilinear form とする. 線型独立な部分集合 $\Pi := \left\{ \alpha_i \,\middle|\, i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}^*$ と $\Pi^\vee := \left\{ \alpha_i^\vee \,\middle|\, i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}$ で $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{i,j}$ を満たすものが存在すると仮定する. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は次を満たすとき *integral weight* と呼ばれる:

$$\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \quad i \in I.$$

Integral weights の全体は P と書かれる. 各 $i \in I$ に対して, $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を:

$$s_i : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

で定義し, $\left\{ s_i \,\middle|\, i \in I \right\}$ が生成する群 W を *Weyl group* と呼び, これは $\mathfrak{h}$ に:

$$\langle w(\lambda), w(h) \rangle = \langle \lambda, h \rangle, \quad w \in W, \lambda \in \mathfrak{h}^*, h \in \mathfrak{h},$$

で作用する. *root system* (resp. *coroot system*) を $\Phi := W\Pi$ (resp. $\Phi^\vee := W\Pi^\vee$) で定義する. Φ_+ と Φ_- で, Φ の positive roots と negative roots を表す. $\beta \in \Phi$ の *dual* $\beta^\vee \in \Phi^\vee$ は次を満たすように定められる:

$$w(\beta^\vee) = w(\beta)^\vee, \quad w \in W.$$

各 $\beta \in \Phi$ に対して, $s_\beta \in W$ を次で定義する:

$$s_\beta(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*, \quad \text{or, equivalently,} \quad s_\beta(h) = h - \langle \beta, h \rangle \beta^\vee, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

各 $w \in W$ に対して, 集合 $\Phi(w)^\vee$ ($\subseteq \Phi_+^\vee$) を (*inversion set* と呼ばれる) 次で定義する:

$$\Phi(w)^\vee := \left\{ \gamma^\vee \in \Phi_+^\vee \,\middle|\, w^{-1}(\gamma^\vee) < 0 \right\}.$$

5.2. **Generalized shapes.**

Definition 5.1. $\lambda \in P$ が *pre-dominant* であるとは, 次を満たすことである:

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta \in \Phi_+.$$

pre-dominant integral weights のなす集合を $P_{\geq -1}$ で表す.

Definition 5.2. $\lambda \in P_{\geq -1}$ に対して, 次で定義される集合 $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ を λ の *shape* と呼ぶ:

$$\mathrm{D}(\lambda)^\vee := \left\{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \,\middle|\, \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \right\}.$$

$\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee < \infty$ が成り立つとき, λ は finite であるいう. *finite pre-dominant integral weights* 全体の集合を $P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ と書く.

5.3. **Colors.**

Definition 5.3. $\lambda \in P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ とする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. *simple root* の列 $\mathcal{B} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_d})$ が *maximal* λ*-path* であるとは, 写像 $L_\mathcal{B} : \{1, 2, \cdots, d\} \longrightarrow \Phi^\vee$ を $L(k) = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})^\vee$ で定めるとき, 写像 $L_\mathcal{B}$ が $\{1, 2, \cdots\}$ から $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ への全単射を与えることである. *maximal* λ*-path* の全体は $\mathrm{MPath}(\lambda)$ と書かれる.

Proposition 5.4 ([7])**.** $\lambda \in P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ とする. $\mathrm{MPath}(\lambda)$ から $\mathcal{L}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee)$ への写像を $\mathcal{B} \mapsto L_\mathcal{B}$ で定めると, この写像は $\mathrm{MPath}(\lambda)$ から $\mathcal{L}(\mathrm{D}(\lambda)^\vee)$ への一対一対応を与える.

Proposition 5.5 ([7])**.** $\lambda \in P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ とする. $\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. 命題 *5.4* より, $\mathcal{B} \in \mathrm{MPath}(\lambda)$ とすれば, $L_\mathcal{B}(k) = \beta^\vee$ となる $k \in \{1, 2, \cdots\}$ が一意的に定まるが, このとき, $i_k \in I$ は $\mathcal{B} \in \mathrm{MPath}(\lambda)$ によらず定まる.

Definition 5.6. $\lambda \in P_{\geq -1}$ とする. $\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. 命題 *5.5* で定まる $i \in I$ を $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ における $\beta^\vee$ の *color* と呼び, $i = c_\lambda(\beta^\vee)$ と書く.

5.4. **Hooks.**

Definition 5.7. $\lambda \in P_{\geq -1}$, $\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. 集合 $\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)$ を次で定義する:

$$\mathrm{H}_\lambda\left(\beta^\vee\right) := \mathrm{D}(\lambda)^\vee \cap \Phi\left(s_\beta\right)^\vee.$$

集合は $\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)$ を $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ における $\beta^\vee$ の hook と呼ぶ. 数 $\#\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)$ を $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ における $\beta^\vee$ の hook-length と呼ぶ. *(See* [8][7]*)*

Theorem 5.8 ([7]). $\lambda \in P_{\geq -1}$ とする. $\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{\gamma^\vee \in \mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)} \alpha_{c_\lambda(\gamma^\vee)} = \beta.$$

定理 5.8 において, $\alpha_i \longmapsto 1$ と specialize すれば命題 5.9 を得る.

Proposition 5.9 ([8]). $\lambda \in P_{\geq -1}$, $\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\#\mathrm{H}_\lambda\left(\beta^\vee\right) = \mathrm{ht}\,(\beta).$$

5.5. ***q*-Hook formula for a generalized shape.** $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ を固定する. 以下, simple roots の index set I を color-set とみなし, 命題 5.5 で定義される c_λ を coloring とみなす. 各 color $i \in I$ に対して不定元 q_i を考える. 不定元 q_i を *color variable* と呼ぶ.

Definition 5.10. *shape* $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ の部分集合 $S \subseteq \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ に対して, 単項式 $\mathbf{q}^S$ を次で定義する:

$$\mathbf{q}^S := \prod_{\beta^\vee \in S} q_{c_\lambda(\beta^\vee)}. \tag{5.1}$$

Theorem 5.11 (q-hook formula of Gansner type [7]). $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とすると, 次が成り立つ:

$$T(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq) = \prod_{\beta^\vee ee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee} \frac{1}{1 - \mathbf{q}^{\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)}}.$$

定理 5.11 において, 各 q_i に q を代入すれば定理 5.12 を得る.

Theorem 5.12 (q-hook formula of Stanley type [7]). $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とすると, 次が成り立つ:

$$U(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; \leq) = \prod_{\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee} \frac{1}{1 - q^{\#\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)}}.$$

Corollary 5.13. $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とすると, 次が成り立つ:

$$W(\mathrm{D}(\lambda)^\vee; q) = \frac{\prod_{k=1}^{\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee}(1 - q^k)}{\prod_{\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee}(1 - q^{\#\mathrm{H}_\lambda(\beta^\vee)})}.$$

系 5.13 において, $q \longmapsto 1$ と specialize すれば定理 5.14 を得る.

Theorem 5.14 (hook formula of Frame-Robinson-Thrall type [7]). $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とすると, 次が成り立つ:

$$\#\mathcal{L}\left(\mathrm{D}(\lambda)^\vee\right) = \frac{\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee!}{\prod_{\beta \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee} \#\mathrm{H}_\lambda(\beta\vee)}.$$

Remark 5.15. 系 *5.14* は *Peterson's hook formula* [1] の証明を与える. *Peterson's hook formula* の別証明は [8] にもある.

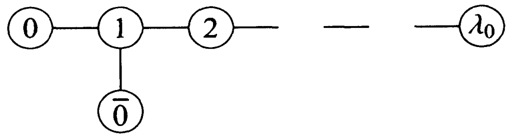
Remark 5.16. *Young diagram* は *A* 型 *Lie* 代数の, ある *pre-dominant integral weight* の *shape* と順序同型になる. 同様に, *shifted Young diagram* は *D* 型 *Lie* 代数の, ある *pre-dominant integral weight* の *shape* と順序同型になる. *generalized Young diagrams* は, 組み合わせ論的手法で, *R. A. Proctor (simply-laced case* [10]*)* と *J. R. Stembridge (multiply-laced case* [13]*)* によって分類されている. 大半は *idefinite type* である.

6. STRICT PARTITIONS と PRE-DOMINANT INDEGRAL WEIGHTS

Young diagram が A 型 Lie 代数の pre-dominant integral weight によってどのように実現されるか, については講演のときに話したので (これについては [9] にあるので参照のこと), ここでは, shifted Young diagram が D 型 Lie 代数の pre-dominant integral weight によってどのように実現されるか, について述べる.

λ を strict partition とする ($\lambda = (\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_n > 0)$). ここで, λ は自然に shifted Young diagram と同一視できる (対応する shifted Young diagram を S_λ とする.)

いま, D_{λ_0+2} 型 Dynkin 図形:



を考える. node の中の数は index である.

以下, strict partition λ に対応する pre-dominant integral weight を構成する.

各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対して, 整数 b_i を次で定義する:

$$b_i := \begin{cases} -1 & \text{if } i \in \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

各 $i = 1, \cdots, n$ に対して, 整数 c_i を次で定義する:

$$c_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i-1 \in \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ω_i $(i = \bar{0}, 0, 1, 2, \cdots)$ を fundamental weight とする. integral weight λ_o を次で定義する:

$$\lambda_o := \begin{cases} (b_0 + c_0)\omega_0 + \sum_{i=1}^{n}(b_i + c_i)\omega_i & \text{if } r \text{ は偶数} \\ (b_0 + c_0)\omega_{\bar{0}} + \sum_{i=1}^{n}(b_i + c_i)\omega_i & \text{if } r \text{ は奇数} \end{cases}$$

Proposition 6.1. *strict partition* λ と *integral weight* λ_o は上の通りとする. このとき,

(1) $\lambda_o \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$.
(2) $\mathrm{D}(\lambda_o)^\vee$ は S_λ と順序同型.
(3) *(2)* の同一視の下で *coloring* は *section 4* で定義したものと一致する.
(4) *(2)* の同一視の下で *hook* は *section 4* で定義したものと一致する.

REFERENCES

[1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties, and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
[2] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, *The hook graphs of symmetric group,* Canad. J. Math. **6** (1954),316-325.
[3] E. R. Gansner, *Hillman-Grassl Correspondence and the Enumeration of Reverse Plane Partitions*, J. Combin. Theory. Ser. A 30 (1981), 71-89.
[4] A. P. Hillman, and R. M. Grassl, *Reverse plane partitions and tableau hook numbers,* J. Combinatorial Theory A **21** (1976), 216-221.
[5] V. G. Kac, "Infinite Dimentional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK,1990.
[6] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.

[7] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram*, preprint.
[8] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, Osaka J. of Math. **Vol. 54 No. 4** (2008), 1085-1120.
[9] K. Nakada, *A probabilistic algorithm which generates standard tableaux for a generalized Young diagram*, 研究集会「第5回数学総合若手研究集会」の講究録, http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1980/
[10] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ-minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets*, J. Algebraic Combin. **9** (1999), 61-94.
[11] http://www.math.unc.edu/Faculty/rap/Hook.html
[12] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions,* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **No. 119** (1972).
[13] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), 722-743.
[14] R. M. Thrall, *A combinatorial problem,* Mich.Math.J. **1** (1952), 81-88.

WAKKANAI HOKUSEI GAKUEN UNIVERSITY, FACULTY OF INTEGRATED MEDIA.
E-mail address: nakada@wakhok.ac.jp