

# フロベニウス=シューアの定理の一般化とその応用\*

A generalization of Frobenius-Schur theorem and its applications

水川 裕司 (Hiroshi Mizukawa)

防衛大学校 総合教育学群 数学教育室

Department of Mathematics, National Defense Academy

mzh@nda.ac.jp

## 1 Introduction

このノートでは Frobenius-Schur indicator の一般化を考える. Frobenius-Schur indicator は有限群  $G$  の既約指標  $\chi$  に対して

$$\nu(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$$

で定義される.

**Theorem 1.1.** (Frobenius-Schur の定理 [2])

$$\nu(\chi) = \begin{cases} 1, & (\chi = \bar{\chi} \text{ かつ } \chi \text{ を与える表現は実数体上実現可能}) \\ -1, & (\chi = \bar{\chi} \text{ かつ } \chi \text{ を与える表現は実数体上実現不可能}) \\ 0, & (\chi \neq \bar{\chi}) \end{cases}$$

これは後に川中と松山によって一般化され [3], 最近では Bump-Ginzburg による結果が重要である [1]. ここでは, Frobenius-Schur indicator をある群とその部分群のペアを用いて一般化し, さまざまな性質を調べることにする.

## 2 Generalized Frobenius-Schur Indicator

$G$  を有限群とする (ただし, この節の議論はコンパクト群でも大丈夫).  $\tau^r = 1$  を満たす  $\tau \in \text{Aut}G$  の自己同型を一つ固定する (位数が  $r$  でなくても良い).  $C_r = \langle a^j \mid a^r = 1 \rangle$  を  $r$  次の巡回群とし

---

\*越谷重夫 (千葉大学) との共同研究

て,  $G$  と  $C_r$  との半直積群  $G_\tau(r) = \{(g, a^j) \mid g \in G, a^j \in C_r\}$  を

$$(g, a^j)(h, a^k) = (g\tau^j(h), a^{j+k})$$

で定義する. ここでは次の命題が成り立つ.

**Proposition 2.1.**  $G_\tau(r)$  は  $G \wr C_r$  に埋め込み可能.

*Proof.* 写像  $\iota: G_\tau(r) \rightarrow G \wr C_r$  を

$$\iota: (g, a^j) \mapsto (g, \tau(g), \tau^2(g), \dots, \tau^{r-1}(g) : a^j)$$

とすればよい. □

この命題を踏まえて, 以下では  $\iota(G_\tau(r))$  を単に  $G_\tau(r)$  と書く事にする.  $\zeta_r = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r})$  と置こう.  $G$  の (既約でなくても良い) 表現  $(\rho, V_\rho)$  と  $C_r$  の既約表現  $\varphi_k: a \mapsto \zeta^k$  に対して

$$V_\rho(r, k) = V_\rho^{\otimes r} \otimes \varphi_k$$

として, ここへの  $G \wr C_r$  の作用を

$$(g_1, \dots, g_r : a)v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_r} \otimes v^k = \zeta_r^k v_{i_r} \otimes v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_{r-1}} \otimes v^k$$

で定めると  $V(r, k)$  は  $G \wr C_r$  加群になる.  $\eta$  を  $G_\tau(r)$  の一つの (既約) 表現とする. そして

$$m(\rho, k, \eta) = \langle V_\rho(r, k), \eta \rangle_{G_\tau(r)}$$

と置く (intertwining number なので非負整数な事に注意). いま,  $r$  と  $j$  の最大公約数を  $d_j$  と書く事にする. そして generalized Frobenius-Schur indicator を

$$\nu_{\tau_j}^\eta(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{\ell=0}^{d_j-1} \chi_\rho(\tau^\ell(g\tau^{r-j}(g)\tau^{2(r-j)}(g) \dots \tau^{(r/d_j-1)(r-j)}(g))) \overline{\eta(g, a^j)}$$

で定義する ( $\chi_\rho$  は  $\rho$  の指標である). これを用いて次のことが言える.

**Theorem 2.2.**

$$m(\rho, k, \eta) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \nu_{\tau_j}^\eta(\chi) \zeta_r^{jk}$$

この定理の反転公式は次で与えられる.

**Theorem 2.3.**

$$\nu_{\tau_j}^\eta(\chi) = \sum_{k=0}^{r-1} m(\rho, k, \eta) \zeta_k^{-jk} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\zeta]$$

**Remark 2.4.** この方向の一般化は文献 [1] と同じ方向である. ただし, 我々の特徴は群のペア  $(G \wr C_r, G_\tau(r))$  を考える事であり, それにより上記定理のような表現論的な意味付けが容易にできた.

### 3 応用その1 ; Kawanaka-Matsuyamaによる一般化再訪

この節では  $\xi$  を  $\xi(g) = \xi(\tau(g))$  を満たす  $G$  の一次表現とし, 前節の  $\eta$  を  $\eta(g, a^j) = \xi(g)$  に取る.  $\rho$  を既約,  $r = 2$  として前節の定理を書き下すと,

$$\begin{cases} \nu_{\tau^0}(\chi_\rho) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_\rho(\tau(g)) \overline{\xi(g)} = m(\rho, 0, \xi) + m(\rho, 1, \xi) \\ \nu_{\tau^1}(\chi_\rho) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g\tau(g)) \overline{\xi(g)} = m(\rho, 0, \xi) - m(\rho, 1, \xi) \end{cases}$$

であるが, 上の式は指標の直交性を用いて

$$\nu_{\tau^0}(\chi_\rho) = m(\rho, 0, \xi) + m(\rho, 1, \xi) = \begin{cases} 1, & \chi_\rho = \xi \otimes \overline{\tau\chi_\rho} \\ 0, & \chi_\rho \neq \xi \otimes \overline{\tau\chi_\rho} \end{cases}$$

したがって,  $m(\rho, k, \xi)$  の非負性から次が言える.

**Theorem 3.1.**

$$\nu_{\tau^1}(\chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g\tau(g)) \overline{\xi(g)} = \begin{cases} 1, & (m(\rho, 0, \xi) = 1) \\ -1, & (m(\rho, 1, \xi) = 1) \\ 0, & (m(\rho, 0, \xi) = m(\rho, 1, \xi) = 0). \end{cases}$$

**Remark 3.2.** 上の定理で  $\xi$  を恒等表現に取れば, 川中と松山の結果である [3] また,  $\tau$  を自明なものにした場合は文献 [5] で筆者により示された.

### 4 応用その2 : 共役類と既約表現の個数の間の関係

この節でも  $\xi$  を  $\xi(g) = \xi(\tau(g))$  を満たす  $G$  の一次表現とし, 前節の  $\eta$  を  $\eta(g, a^j) = \xi(g)$  に取る, さらに  $r = 2$  とする.

この組,  $(G \wr C_2, G_\tau(2), \xi)$  はゲルファントの三つ組み ( $\xi_{G_\tau(2)}^{G \wr C_2}$  が無重複) である. この三つ組みから作られるヘッケ環の表現から来る基底と両側剰余類から来る基底を比較すると, つぎの定理を得る.

**Theorem 4.1.**  $\text{Conj}G$  を  $G$  の共役類,  $\text{Irr}G$  を  $G$  の既約指標の全体とする.

$$\#\{\chi \in \text{Irr}G \mid \chi = \overline{\tau\chi} \otimes \xi\} = \#\{c \in \text{Conj}G \mid c = \tau c^{-1}\} - \#\{c \in \text{Conj}G \mid c = \tau c^{-1}, \xi(c) = -1\}$$

ここで,  $c \in \text{Conj}G$  に対して,  $\tau c = \{\tau(g) \mid g \in c\}$ , および,  $c^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in c\}$

**Remark 4.2.** 上の定理はブラウアーの置換補題の最も簡単な場合の帰結である「リアルな既約指標の個数とリアルな共役類の個数が等しい」と言う事の一般化になっている ( $\tau$  と  $\xi$  を自明なものとしよ).

## 5 応用その3：群上の数え上げ

ここでも、 $\xi$  は  $\tau$ -不変とする。(この仮定によって以下全ての場合で  $g^2$  を  $g\tau(g)$  に読み替えても大丈夫である。)  $\tau$  が自明ならば、

$$\frac{1}{|G|} \sum_x \nu_{\tau^{r-1}}^1(\chi) \chi(g)$$

は  $x^r = g$  を満たす  $x \in G$  の個数を表すことはよく知られている。これを我々の一般化でやるとどうなるであろうか？ここでは取りあえず  $r = 2$  として考える。

各共役類  $c$  に対して (存在するならば,)  $y_c$  を  $y_c^2 \in c$  と定め  $g \in c$  に対して  $\phi_\xi(g) = \xi(y_c)$  とする。ただし、そのような  $y_c$  が無い時は  $\phi_\xi(x) = 0$  とする。すると、定義より  $\phi_\xi$  は  $G$  上の類関数になる。一方、

$$\theta_\xi(x) = \#\{y \in G \mid y^2 = x, \xi(y) = \phi_\xi(x)\} - \#\{y \in G \mid y^2 = x, \xi(y) = -\phi_\xi(x)\}$$

と置く。そして

$$\tilde{\theta}_\xi(x) = \phi_\xi(x) \theta_\xi(x)$$

とする。

**Proposition 5.1.**  $\tilde{\theta}_\xi$  は  $G$  上の類関数である。

*Proof.*

$$\Theta_\xi^\pm(x) = \{y \in G \mid y^2 = x, \xi(y) = \pm \phi_\xi(x)\}$$

としよう (複号同順)。それぞれ  $y \mapsto gyg^{-1}$  としてやれば、これは全単射である。従って  $\theta_\xi$  は類関数。また、先に見たように  $\phi_\xi$  も類関数なのでこれらの積も類関数である。□

**Theorem 5.2.**

$$\tilde{\theta}_\xi(x) = \sum_{\chi \in \text{Irr}G} \nu_{\tau^1}^\xi(\chi) \chi(x)$$

*Proof.*  $\tilde{\theta}_\xi$  は類関数なので、

$$\tilde{\theta}_\xi(x) = \sum_{\chi \in \text{Irr}G} a_\chi \chi$$

と書く、このとき、直交関係より、

$$a_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \tilde{\theta}_\xi(x) \overline{\chi(x)} \quad (1)$$

である。さて、次のような計算を試みよう

$$\sum_{y \in G, y^2 = x} \xi(y) \chi(y^2) = \phi_\xi(x) \left( \sum_{\xi(y) = \phi_\xi(x)} 1 - \sum_{\xi(y) = -\phi_\xi(x)} 1 \right) \chi(x) = \tilde{\theta}_\xi(x) \chi(x) \quad (2)$$

従って (1) と (2) より,

$$a_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x^2) \overline{\xi(x)}$$

□

### 6 例：6 次対称群の場合

ここでは、6 次対称群  $S_6$  を考える。よく知られているように  $S_6$  は対称群の中で唯一非自明な自己同型をもつ ( $\text{Aut}G/\text{Inn}G \cong C_2$ )、位数 2 の自己同型  $\psi$  を次のように作る事ができる [4]：まず、外部自己同型  $\phi$  を生成元をそれぞれ、 $\phi((12)) = (12)(36)(45)$ ,  $\phi((23)) = (15)(23)(46)$ ,  $\phi((34)) = (12)(34)(56)$ ,  $\phi((45)) = (16)(23)(45)$ ,  $\phi((56)) = (12)(35)(46)$  に移すものとする。さらに、内部自己同型  $\gamma$  を  $\gamma(\sigma) = (12345)\sigma(15432)$  とする。そして  $\psi = \gamma \circ \phi$  と置けばこれは  $\psi^2 = 1$  である。

それでは  $S_6$  の指標表と Frobenius-Schur indicator を書いてみよう。なお表の右側には Frobenius-Schur indicator の値を書いておいた。

	$1^6$	$21^4$	$2^21^2$	$2^3$	$31^3$	$321$	$3^2$	$41^2$	$42$	$51$	$6$	$\nu_\psi^1$	$\nu_1^{\text{sgn}}$	$\nu_\psi^{\text{sgn}}$
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
51	5	3	1	-1	2	0	-1	1	-1	0	-1	0	0	0
42	9	3	1	3	0	0	0	-1	1	-1	0	1	0	0
$41^2$	10	2	-2	-2	1	-1	1	0	0	0	1	0	0	1
$3^2$	5	1	1	-3	-1	1	2	-1	-1	0	0	0	0	0
321	16	0	0	0	-2	0	-2	0	0	1	0	1	1	1
$31^3$	10	-2	-2	2	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	1
$2^3$	5	-1	1	3	-1	-1	2	1	-1	0	0	0	0	0
$2^21^2$	9	-3	1	-3	0	0	0	1	1	-1	0	1	0	0
$21^4$	5	-3	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	1	0	0	0
$1^6$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	0	0

#### 6.1 共役類と表現の個数の関係

ここでは第 3 節で述べた事の例を見る。

- $\xi$  も  $\tau$  も自明にとると、対称群の既約表現は全て実数体上実現可能であり、さらに対称群の共役類は全て  $c^{-1} = c$  を満たすので Theorem 3.1 の両辺とも 11 となり確かに正しい。

•  $\xi$  を自明に  $\tau = \psi$  と取ると,  $\tau$  で固定される表現は  $6, 42, 321, 2^2 1^2, 1^6$  の 5 つであり, また,  $\tau$  で固定される共役類は  $1^6, 2^2 1^2, 41^2, 42, 51$  の 5 つである.

•  $\xi$  を符号表現に  $\tau$  を自明に取ると, また,  $\tau$  で固定される共役類は  $321$  の 1 つである. 確かにこれは even な共役類の個数 6 と odd な共役類の個数 5 の差になっている.

•  $\xi$  を符号表現に  $\tau = \psi$  を取ると, また,  $\tau$  で固定される共役類は  $41^2, 321, 31^3$  の 3 つである. 確かにこれは  $\tau$  で固定される共役類のうち even なものが 4 個 ( $1^6, 2^2 1^2, 42, 51^2$ ) と odd なものが 1 個 ( $41^2$ ) の差になっている.

## 6.2 $\sigma\tau(\sigma) = 1$ の解の個数

•  $\xi$  を符号表現,  $\tau$  を自明に取ると,  $\nu_{\tau_1}^{\xi}(\chi) \neq 0$  となるのは対称なヤング図形でパラメトライズされる表現  $(321)$  である.  $x = 1$  としよう. 自乗して単位元になるのは  $1^6, 21^4, 2^2 1^2, 2^3$  であり, class order はそれぞれ  $1, 15, 45, 15$  である.  $c = (1^6)$  に  $y_c = 1$  を対応させると  $\phi_{\xi}(1) = 1$  である. また, 直接計算で  $\nu_{\tau_1}^{\xi}(321) = 1$  である. 従って定理の右辺の単位元での値は  $\chi^{(321)}(1) = 16$  となる. 左辺は

$$\tilde{\theta}_{\xi}(1) = (1 + 45) - (15 + 15) = 16$$

したがって確かに

$$\tilde{\theta}_{\xi}(1) = \chi^{(321)}(1)$$

• 次に  $\xi$  を符号表現,  $\tau = \psi$  と取る.  $\sigma\tau(\sigma) = 1$  を満たす元は単位元及び, 共役類  $2^2 1^2$  の中に 5 個  $42$  の中に 10 個,  $51$  の中に 20 個の計 36 個ある. これは確かに  $42, 321, 31^3$  の次元の和  $10 + 16 + 10$  に等しい.

## 参考文献

- [1] D. Bump and D. Ginzburg, Generalized Frobenius-Schur numbers, J. Algebra 278 (2004), no. 1, pp. 294-313.
- [2] G. Frobenius and I. Schur, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, Sitz.ber. Akad. Wiss. Berlin (1906), pp. 186-208.

- [3] N. Kawanaka and H. Matsuyama, A twisted version of the Frobenius-Schur indicator and multiplicity-free permutation representations, *Hokkaido Math. J.* 19 (1990), no. 3, pp. 495-508.
- [4] G. Janusz and J. Rotman, Outer automorphisms of  $S_6$ , *Amer. Math. Monthly* 89 (1982), no. 6, pp. 407-410.
- [5] H. Mizukawa, Wreath Product Generalizations of the Triple  $(S_{2n}, H_n, \varphi)$  and Their Spherical Functions, preprint (2009), arXiv:0908.3056.