数理解析研究所講究録
第 1688 巻 2010 年 89-97

大自由度力学系としての乱流

—— 乱流の少数自由度モデルと力学系的記述

山田道夫（京大数理研）

1． 層流の乱流化と発達した乱流

ここでは非圧縮性流体の３次元 Navier-Stokes 方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0,\qquad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla\mathbf{p}+\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}$$

にしたがう流体運動を考える．良く知られているように，流れは一般に Reynolds 数の増加とともに不安定化し層流から乱流となる．この過程は流れの乱流化／カオス化の過程として 1970 年代から 80 年代にかけて盛んに調べられ，流体運動の中で，周期倍分岐(Feigenbaum 1978 [1])，Ruelle-Takens 乱流化(Ruell, and Takens 1971 [2], Newhouse, Ruelle and Takens 1978 [3])，間欠性乱流化（Pomeau and Manneville 1980 [4]）などの過程が見出された．数値実験においても，例えば周期境界条件を課した一辺 2π の直方体（$\mathbf{R}^3/(2\pi\mathbf{Z})^3$）の中で，最低波数のフーリエ係数を一定に保った自励系を作り，流れ形態の Reynolds 数依存性を調べることができる．Reynolds 数増加に伴い次第に複雑になる流れの一例（図１）において，エネルギーの時系列をフーリエ解析すれば，それぞれの状態が，単色振動(P)，二つの基本振動数をもつ準周期振動(QP_2)，三つの基本振動数をもつ準周期振動(QP_3)，カオス状態であることが推測される（図２）．このように流れはいくつかの分岐を経てカオス状態となる．これはいわば「乱流化直後のカオス」である．

一方，Reynolds 数が非常に大きくなると，流れはいわゆる「発達した乱流」となる．通常，流体力学で問題にする乱流はこの発達した乱流であることが多い．乱流化直後のカオスと発達した乱流は何が異なるのか．発達した乱流の特徴は，乱流の成因や環境によらない普遍的な統計性質がみられることである．乱流では，縦相関とよばれる速度の二次相関について，

$$\langle v(\mathbf{x})v(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle\sim\langle v^2\rangle\left(1-\frac{r^2}{\lambda^2}\right),\qquad (|\mathbf{r}|<<1)$$

となる長さスケールλを Taylor マイクロスケールと言い，乱流固有の長さと考える．ここでvは速度ベクトルの$\mathbf{r}$方向成分である．λから作られる Reynolds 数 $R_\lambda=u\lambda/\nu$をマイクロ

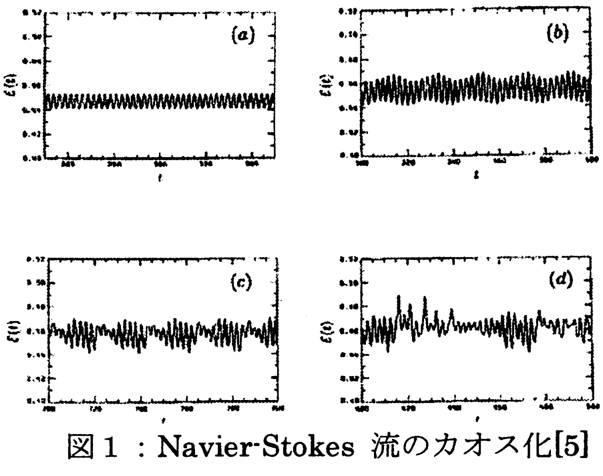

図１：Navier-Stokes 流のカオス化[5]

スケール Reynolds 数とよぶ．発達した乱流中では $R_\lambda \sim \sqrt{1/\lambda}$ となることが知られているが，この関係が成り立つためにはマイクロスケール Reynolds 数が少なくとも 100 を超えている必要がある（図３）．このように単にカオスであるだけでは，普遍的な統計性質は得られず，発達した乱流と考えることはできない．なお，目安として，数値実験で得られる乱流の R_λ は 100 から 1000 程度，室内実験では 1000 から 10000 程度，大気観測などでは一万以上である．

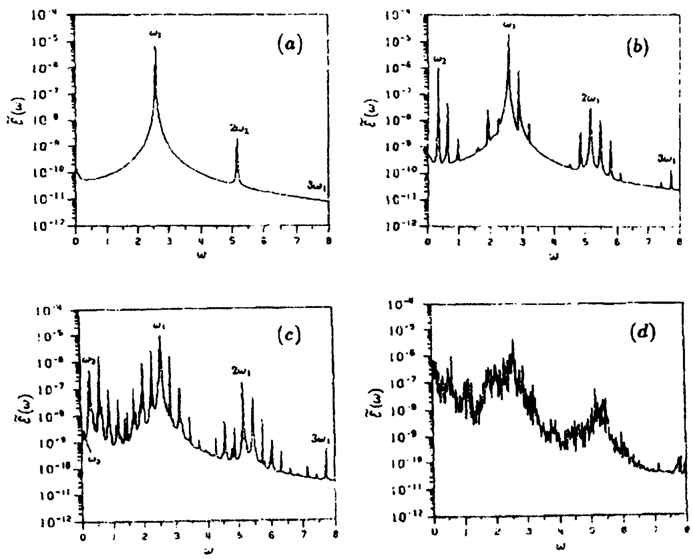

図２： 図１のフーリエスペクトル[5]

２．　一様等方性乱流の伝統的描像

発達した３次元乱流では，大きな空間スケールの運動にエネルギーが注入され，次々とより小さい近接したスケールの運動にエネルギーが伝達され（エネルギーカスケード），最終的に粘性が効く小さなスケールの運動に達してエネルギーが熱に変換される．このとき伝統的な Kolmogorov の乱流描像（1941 [6]）では，ある程度よりも小さなスケールの運動は，エネルギー注入機構や乱流の環境などによらない普遍的な統計性質をもつ（普遍平衡領域）と考え，さらに，その統計性質の支配パラメータは，単位時間単位質量当たりのエネルギー散逸率 ϵ および運動粘性率 ν のみであるとする．これは，$\nu = \mathbf{f} = 0$ としたときの Navier-Stokes 方程式（Euler 方程式）においてエネルギーが保存量であることを考慮した仮定である．この仮定によって，粘性の効く波数の見積もり $k_d = \epsilon^{1/4}\nu^{-3/4}$ や，この波数 k_d における特性時間の見積もり $\tau_d = \sqrt{\nu/\epsilon}$ などが得られる．しかしエネルギースペクトルなどの物理量については具体的な関数形が得られないので，さらに，普遍平衡領域の中の波数の大きな側には粘性が効かない領域がありそこではエネルギー散逸率 ϵ だけがパラメータとなる（慣性小領域）と仮定する．これによりエネルギースペクトルは $E(k) = C_{kol}\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$（Kolmogorov スペクトル）と決定され，多くの実験によって（実験精度の範囲で）確かめられている．

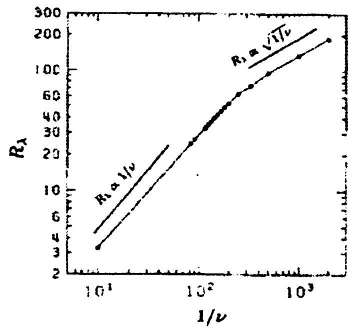

図３：R_λ の ν 依存性[5]

このような次元解析による見積もりは多くの予想を導くことができる．その一例は乱流速度差の高次平均で，速度場の縦方向構造関数

$$\langle (v(\mathbf{x}+\mathbf{r})-v(\mathbf{x}))^p \rangle \sim r^{\zeta_p}$$

について，Kolmogorov 描像は$\zeta_p = p/3$を与える．実際，エネルギー散逸率ϵと運動粘性率νの独立性の仮定の下に，$\zeta_3 = 1$が Kolmogorov 自身によって示されている．

しかし一方ではこの Kolmogorov の伝統的描像はそのままでは不十分であることも指摘されている．これはエネルギー散逸率ϵの時間的空間的な揺らぎを無視できないためで乱流の間欠性とよばれている．このようなゆらぎは高次の相関関数に強く現れることが期待されるが，実際，実験や数値実験はこの式からの系統的なズレを示している（図４）．このズレは，乱流中で稀に起こる激しい現象が統計性質を支配していることを示し，乱流のこの間欠性を説明することが，乱流の統計理論の大きな課題の一つとなっている．

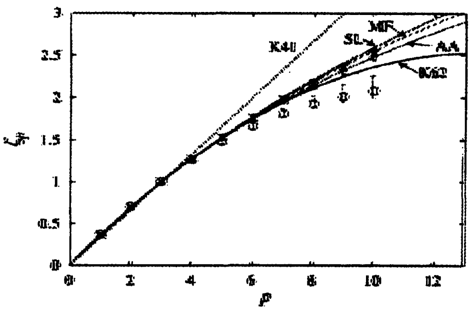

図４： 乱流のスケーリング指数[7]

３． 力学系としての一様等方性乱流と少数自由度モデル

Kolmogorov 描像によると乱流中の最も小さな渦の大きさは$l_d \sim \nu^{3/4}$である．一方最大の渦のサイズをLとすると，乱流全体の自由度のオーダーは

$$(L/l_d)^3 \sim \nu^{-9/4} \sim R^{9/4}$$

となる．驚くべきことに，この簡単な見積もりは数学的に支持されており，３次元 Navier-Stokes 方程式について，アトラクターの Hausdorff 次元が上から$CR^{9/4}$（Cは定数）で押さえられることが（解の存在等の仮定の下に）示されている（Constantin, Foias, Manley and Temam 1984 [8]）．

しかしこれら少数の結果を除けば乱流についての exact な結果は少ないため，乱流研究において数値解析の果たす役割は大きい．数値的研究では，Navier-Stokes 方程式を対象にして詳細な性質を調べることが望ましいが，多くの場合，力学系理論における諸量は計算コストが大きく多くの量を計算することは計算時間の点から難しい．そこでここでは Navier-Stokes 方程式から離れて，「流体乱流に特徴的な性質を実現するカオス系はどのような性質を持っているのか」という問題を扱うことにする．この視点からのアプローチは，流体乱流に類似の性質を示す少数自由度力学系をとりあげて，その力学系の構造を詳細に調べる，ということになる．なおこの立場の研究では，モデル方程式は「多くの可能なモ

デル方程式のうちの単なる一例」にすぎない．したがってモデル方程式を Navier-Stokes 方程式から解析的に導出するようなことは考えない．

以下では Kolmogorov スケーリングおよび間欠性に注目して，それを実現するようなカオス力学系を作ることを考える．ここで扱う系は，Navier-Stokes 方程式のフーリエ変換を念頭において，物理的背景を考慮して次の条件を満たすことを要請する．

1． フーリエ空間を１次元と考えて離散化する．
2． 速度変数は複素数とする．
3． 常微分方程式系とする．
4． 非線形項は２次とする．
5． 非粘性のときエネルギーを保存する．
6． 粘性項を除き，特別な時間空間スケールをもたない．

ここでの興味の対象は，方程式の解に伴う分岐現象やパターン形成ではなく，「統計性質」である．

以上の条件のもとに次のような常微分方程式系（シェルモデル[9]）を考える．

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu k_n^{\,2}\right)u_n = i(k_n u^*_{n+1}u^*_{n+2} - k_{n-2}u_{n-1}u^*_{n+1} - k_{n-3}u^*_{n-2}u^*_{n-1}) + f\delta_{n,4}$$

ここで $k_n = k_0 2^n$（k_0 は正定数）は波数を表す．また u_n はフーリエ空間内の波数 k_n の球殻（シェル）における速度を代表する複素変数と考え，$1 \le n \le N$ としてこの範囲以外の添字を持つ u_n はゼロとおくものとする．ν は粘性を表す非負定数，$*$ は複素共役，f は外力を表す複素定数であるが，ここで外力を加えるシェルが 4 であることは重要ではない．この系は実 $2N$ 次元自励系であり非粘性（$\nu=0$）時に $E=\sum_n |u_n|^2$ と $H=\sum_n (-1)^n k_n |u_n|^2$（エネルギーとヘリシティ）を保存し，エネルギースペクトルは $E_n = |u_n|^2/(2k_n)$ で定義される．

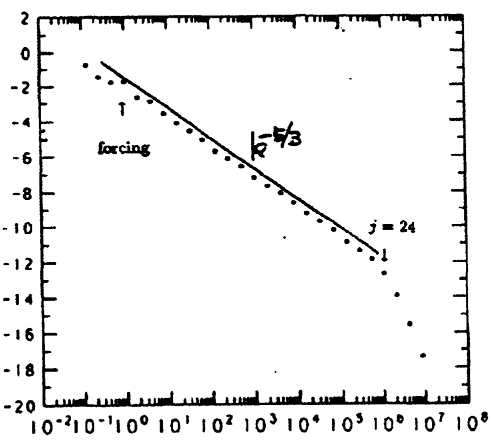

図５： エネルギースペクトル[9]

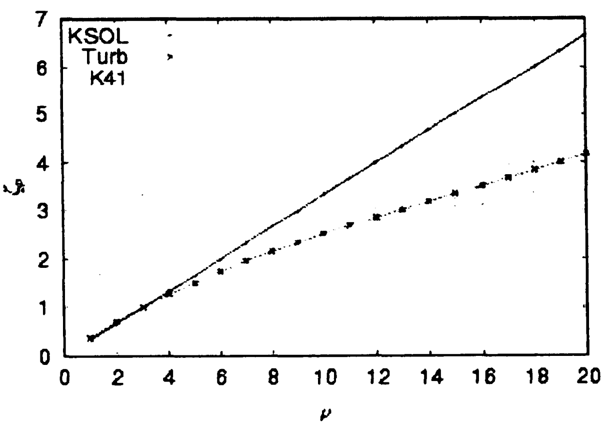

図６： スケーリング指数[10]

数値実験によりこの系の挙動がカオス的であること（Lyapunov 数が正であること），エネルギースペクトルが Kolmogorov の 5/3 乗を示すこと（図５），速度場のスケーリング指数に間欠性が見られること（図６）などが確認される．ここでスケーリング指数ζ_pは

$\langle |u_n|^p \rangle \sim (1/k_n)^{\zeta_p}$ で定義されている（$\langle\cdot\rangle$は長時間平均）．

４．　シェルモデルのカオス解析

４－１：　Lyapunov スペクトル

シェルモデルは通常実 20～50 次元程度の大きさで扱うため，カオスとしての解析手法もその程度の大きさの系まで適用可能なものに限られ，Lyapunov 解析や局所 Lyapunov 解析，ＵＰＯ（不安定周期軌道）解析，共変 Lyapunov 解析などが多く用いられる．

シェルモデルの Lyapunov 数λ_nは図７のように分布する．図７では横軸は Lyapunov 数の添字 j，縦軸ははじめから j 個の Lyapunov 数の和 $\sum_{n=1}^{j} \lambda_n$ を示す（Lyapunov 数は大きさの順に並べる）．この特徴は正の Lyapunov 数があること，ゼロに近い Lyapunov 数が多いことであるが，問題は乱流の Kolmogorov 描像とこれら Lyapunov 数の関係である．伝統的な Kolmogorov 描像の特徴は，波数空間において局所的なエネルギーカスケードを考える点であるので，対応する Lyapunov 数などのカオスパラメータについても（自発的

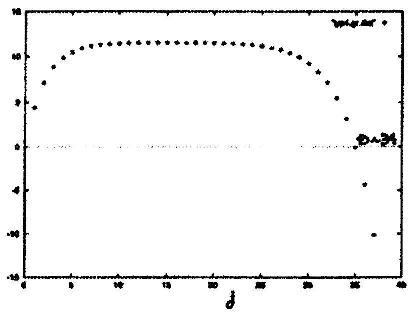

図７：Lyapunov スペクトル[9]

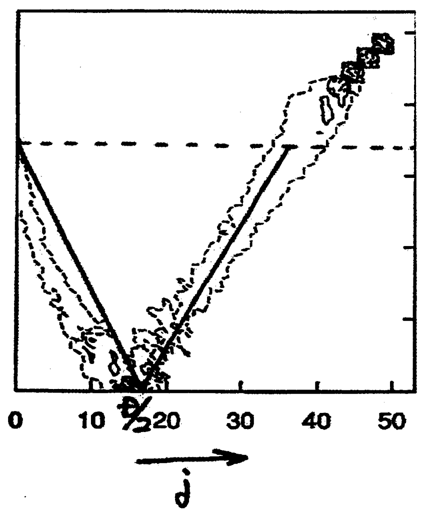

図８：　Lyapunov ベクトルのサポート[11]

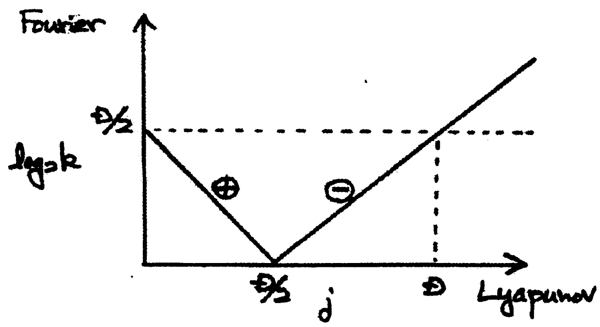

図９：　サポートの形状

な）局所化が期待される．Lyapunov 数についてはこれは Lyapunov ベクトルの局所化を意味する．実際，Lyapunov ベクトルのサポートを描くと図８（縦軸は波数）のように，各 Lyapunov ベクトルが特徴的なサポートを持つことが分かる．そこで，このサポートを理想化し図９のように仮定すると，Lyapunov 数の添字 j と波数 k_n の間の対応関係が生まれる．一方 Kolmogorov 描像は，波数 k_n と物理量の間の対応関係を与えるため，特に正の Lyapunov 数（次元は１／時間）に対応するサポートについて，添字 j から Lyapnov 数を与える式を

$$\lambda_j = C2^{-2j/3} \qquad (C\text{は定数})$$

のように得ることができる．これは，Kolmogorov 描像が成り立つ高い Reynols 数，すなわち $\nu \to 0$ における Lyapunov 数の漸近形と考えることができ，アトラクタ次元無限大における漸近形でもある．特に正の Lyapunov 数の総和を H （Kolmogorov エントロピー）と書けば

$$\lambda_j / H = (2^{2/3} - 1)2^{-2j/3}$$

となりこれは数値結果（図１０）とよく一致している[11].

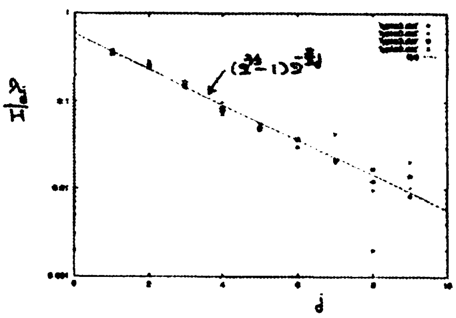

図１０：　Lyapunov 数[11]

注意すべきは，この結果はシェルモデルの構造，特に波数がベキで離散化されていることに大きく依存しており，このため，この結果がそのまま Navier-Stokes 乱流に成り立つことは期待できない．シェルモデルの教訓は，むしろ，Lyapunov ベクトルのサポートが波数空間において局所化していることであろう．

Navier-Stokes 方程式においても同様のことが成り立つと考えれば，波数 k と $2k$ の範囲にサポートをもつ正の Lyapunov 数 λ は Kolmogorov 描像から $\lambda \sim k^{2/3}$ が成り立つ一方で，それらの個数 N について $N \sim 4\pi k^2 \times k \sim \lambda^{9/2}$ すなわち $dN \sim \lambda^{7/2} d\lambda$ となるので，３次元 Navier-Stokes 方程式の Lyapunov 数の分布関数 $P(\lambda)$ として

$$P(\lambda) \sim \lambda^{7/2}$$

が得られる[11]（慣性小領域にサポートをもつ負の Lyapunov 数についても同様）．残念ながら現状ではこの分布関数の成否を数値的に確認することは，計算機の能力不足からほとんど不可能に近く，なんらかの解析的なアプローチが求められる．

４－２：　不安定周期軌道

Lyapunov スペクトルは Kolmogorov 描像との対応関係をもつが，乱流の間欠性，すなわち Kolmogorov 描像からのズレを解析することは，精度の点から困難である．近年，Navier-Stokes 方程式について境界を伴う弱い（アトラクタ次元が小さな（10 以下））乱流

（Couette 乱流）について，不安定周期軌道を求めることが行われ，（低次の）物理量についてその軌道に沿った平均が乱流平均をよく近似することが報告されている[12]．そこでシェルモデルの乱流についてもこのような不安定周期軌道が存在するのかどうか，興味が持たれる．

数値的にシェルモデルの（不安定）解を求め次の３種類の解が得られている[10,13]．

1．　不安定定常解
2．　不安定周期解（Kolmogorov 解）
3．　不安定周期解（間欠解）

１の不安定定常解は，Kolmogorov スペクトル（$u_j = Ck_j^{-1/3}$）を示す定常解である．２の Kolmogorov 解は，時間平均スペクトルが Kolmogorov スペクトルとなる時間周期解である（図１１）．この周期解の軌道を u_n 面に射影したものは，アトラクタに埋め込まれた円軌道（または固定点）となっている．この軌道に沿う平均から得られる速度のスケーリング指数 ζ_p は Kolmogorov の $\zeta_p = p/3$ を与え（図１３），その意味で Kolmogorov 描像に忠実な軌道である（これが Kolmogorov 軌道とよぶ理由である）が，そのため軌道平均はカオス平均と異なり，カオスアトラクタ全体を代表するようなものにはなっていない．

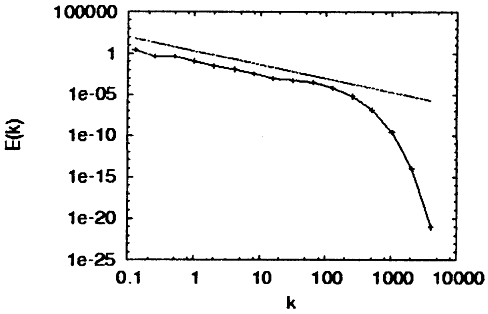

図１１：　Kolmogorov 解の
エネルギースペクトル[11]

３の間欠解も不安定な時間周期解であるが，Kolmogorov 解と異なり，軌道は複雑な形状をもつ（図１２）．この解は特に，軌道に沿う速度のスケーリング指数が乱流状態のスケーリング指数と一致するという顕著な性質を持っており（図１０），この意味で乱流の間欠性を再現する（これが間欠解とよぶ理由である）．Kolmogorov 解と同じく，間欠解もそれ

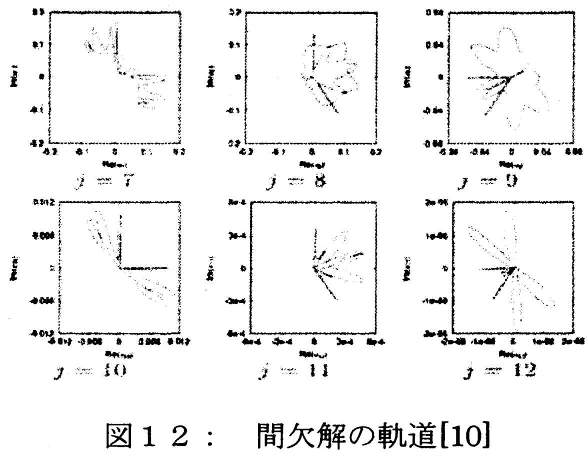

図１２：　間欠解の軌道[10]

だけではアトラクタ全体を覆うわけではない．しかし，シェルモデルがもつ対称性から，この間欠解の軌道を図１２の各面の原点まわりに回転したものは再びシェルモデルの解となるため，同じ統計性をもつ軌道全体はアトラクタの大部分を覆うことになる．このことが，間欠解の軌道平均がカオス平均をよく近似する大きな理由であると考えられる．

一方，一般にカオスアトラクタには無限個の不安定周期軌道が存在することが知られており，それらの総体（適当な重み付き平均）がカオス平均を与えることは想像に難くない．しかし，比較的周期の短い一本の周期軌道について，軌道平均がカオス軌道平均を良く近似することは意外であり，この理由をめぐって研究が行われている[14].

４－３：　共変 Lyapunov 解析

Lyapunov 解析では，Lyapunov 数は確定した意味をもつ一方で，数値的に得られる Lyapunov ベクトルは直交化の有無に依存するため意味を与えることが難しい．しかし近年，直交化を経ずに Lyapunov ベクトルを計算する手法が開発され，軌道の各点における安定多様体と不安定多様体の接平面を求めること，すなわち Oseledec 分解を求めることが可能となった．この手法は共変 Lyapunov 解析とよばれている．

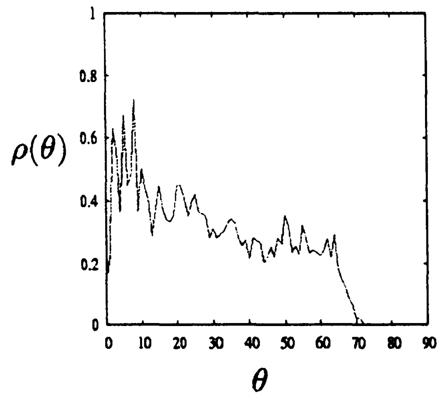

図１３：安定／不安定多様体のなす角度の分布[15]

シェルモデルに対し共変 Lyapunov 解析を適用して，カオス軌道上で安定多様体と不安定多様体のなす角度の分布を求めた結果が図１３である．角度ゼロまで分布が伸びていることから，シェルモデル乱流はかなり非双曲性の強い系であることが分かる．この非双曲的な部分の役割を調べるため，角度最小の時刻をゼロとして，局所 Lyapunov 数の平均を調べたものが図１４である．このグラフは，非双曲的な部分の後に軌道不安定な領域が存在することを示しており，速度変数の時系列を調べることにより，この領域がバーストに対応することが分かる．これは非双曲的な部分がバーストの直前に存在することを示している．さらに，軌道の位置より，このような非双曲的な点は，Kolmogorov 解の近傍に存在することが分かる．これは Kolmogorov 解が，カオス解にあまり関係のない周期解にとどまるものではなく，カオスのダイナミクスに非双曲性を通じて深く関係することを示唆している．Kolmogorov 描像が乱流解とは微妙に異なること（間欠性）と考え合わせ，Kolmogorov 解の役割は興味深い．

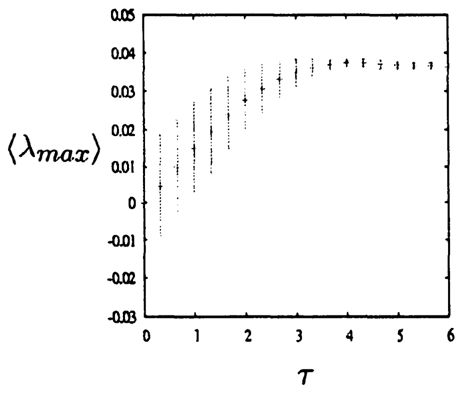

図１４：局所 Lyapunov 数[15]

なお，このシェルモデルの共変 Lyapunov 解析[15]，および，Navier-Stokes 方程式の弱い乱流解の共変 Lyapunov 解析が現在進行中であり近日中に報告する予定である．また，本稿では発達した乱流について述べたが，Reynolds 数の増加によって，カオス化した流れが次第に複雑になる過程においては，アトラクタ同士の融合過程についてやはり力学系的な扱いが行われることを注意しておきたい．

謝辞：本研究会で２つの講演の機会を与えて下さいました新居俊作先生に深く感謝いたします．

参考文献

流体乱流全般についての成書として

- ●U.Frisch: Turbulence, The Legacy of A.N.Kolmogorov, Cambridge Univ. Press, 1995.
- ●P.A.Davidson: Turbulence, An introduction for scientists and engineers, Oxford Univ. Press, 2004.

などがある．以下は文中で引用した文献である．

[1] M.Feigenbaum: J. Stat. Phys., 19(1978)25-52.
[2] D.Ruell and F.Takens: Comm. Math. Phys., 20(1971) 167-192.
[3] S.Newhouse, D.Ruelle and F.Takens: Comm. Math. Phys., 64(1978)35-40.
[4] Y.Pomeau and P.Manneville: Comm. Math. Phys., 74(1980)189-197.
[5] S.Kida, M.Yamada and K.Ohkitani: Physica D, 37(1989)116-125; Lecture Notes in Num. Appl. Anal., 10(1989)31-47.
[6] A.N.Kolmogorov: Dokl. Akad.Nauk. SSSR, 30(1941)301-305.
[7] T.Gotoh, D.Fukuyama and T.Nakano: Phys. Fluids, 14(2002)1065, doi:10.1063/1.1448296.
[8] P.Constantin, C.Foias and R.Temam: SIAM J. Num. Anal., 21(1984)615-634.
[9] M.Yamada and K.Ohkitani: J.Phys.Soc.Japan, 56(1987)4210-4213; Phys.Rev.Lett. 60(1988)983-986.
[10] S.Kato and M.Yamada: RIMS 研究集会講究録 1285(2002)226-233; Phys.Rev.E, 68(2003)025302(R).
[11] M.Yamada and K.Ohkitani: Phys.Rev.E, 57(1998)6257R-6260R.
[12] G.Kawahara and S.Kida: J. Fluid Mech., 449(2001)291-300.
[13] M.Yamada and Y.Saiki: Nonlin.Processes Geophys., 14(2007)631-640.
[14] Y.Saiki and M.Yamada: Phys.Rev.E, 79(2009)015201.
[15] M.Kobayashi and M.Yamada: in preparation.