

結合写像系における準周期進行波アトラクタの発生・消滅・分岐のメカニズム

帝京科学大学・医療科学部 小室 元政(Motomasa Komuro)
Faculty of Medical Sciences,
Teikyo University of Science & Technology

【概要】 CML における準周期進行波アトラクタの発生・消滅・分岐のメカニズムについて解析を行った。準周期進行波アトラクタの観測において、Fourier 座標の導入が有効であることを示した。準周期進行波アトラクタの発生・消滅メカニズムとして、サドルノードサイクル(SNC)経路とヘテロクリニックサイクル(HCC)経路があることを明らかにした。(講演では、準周期進行波アトラクタの分岐についても報告したが、この講究録では割愛する。)

§ 1 準備

【定義 1】 空間 1 次元・隣接拡散結合・周期境界の 1 次元ロジスティック写像の結合系を

CML(Coupled Map Lattice)という。 $F = F_{a,\varepsilon} : R^N \rightarrow R^N ; (x_n(i))_{i=1}^N \mapsto (x_{n+1}(i))_{i=1}^N$

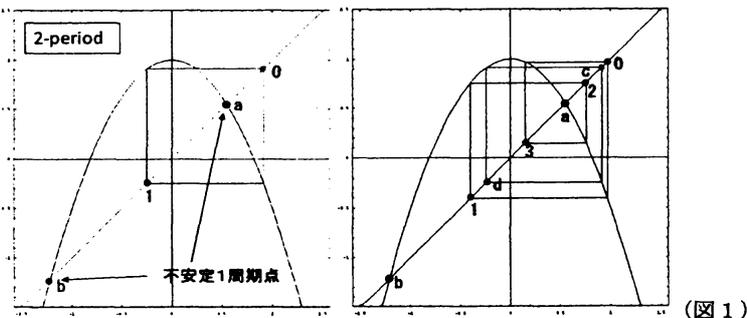
$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \frac{1}{2} \varepsilon \{f(x_n(i-1)) - f(x_n(i))\} + \frac{1}{2} \varepsilon \{f(x_n(i+1)) - f(x_n(i))\}$$

$$f(x) = 1 - ax^2, \quad 1 \leq i \leq N \pmod{N}$$

ここで、 ε は結合強度 を表す。 $\varepsilon=0$ の場合は、直積系 となる。座標の巡回置換に関して対称なシステムである。

【定義 2】 (CML の周期点の呼び名)

ロジスティック写像の 2 周期点、4 周期点を次の記号で表す。すなわち、高々 2 周期点までを扱うときは、不動点を $a, b (a>b)$ で表し、2 周期点を $0, 1 (0>1)$ で表す。高々 4 周期点までを扱うときは、不動点を $a, b (a>b)$ で、2 周期点を $c, d (c>d)$ で表し、4 周期点を軌道の順序で $0, 1, 2, 3 (0>2>3>1)$ で表す。直積系における周期点はこの記号の組で表される。直積系から連続変形で延長される CML の周期点を同じ記号の組で表す。(この命名法は完全ではない。ある周期点が 2 通り以上の名前を持つ可能性がある。しかし、周期点を区別する作業上の手段として、当面は有効に働いている。)



(図 1)

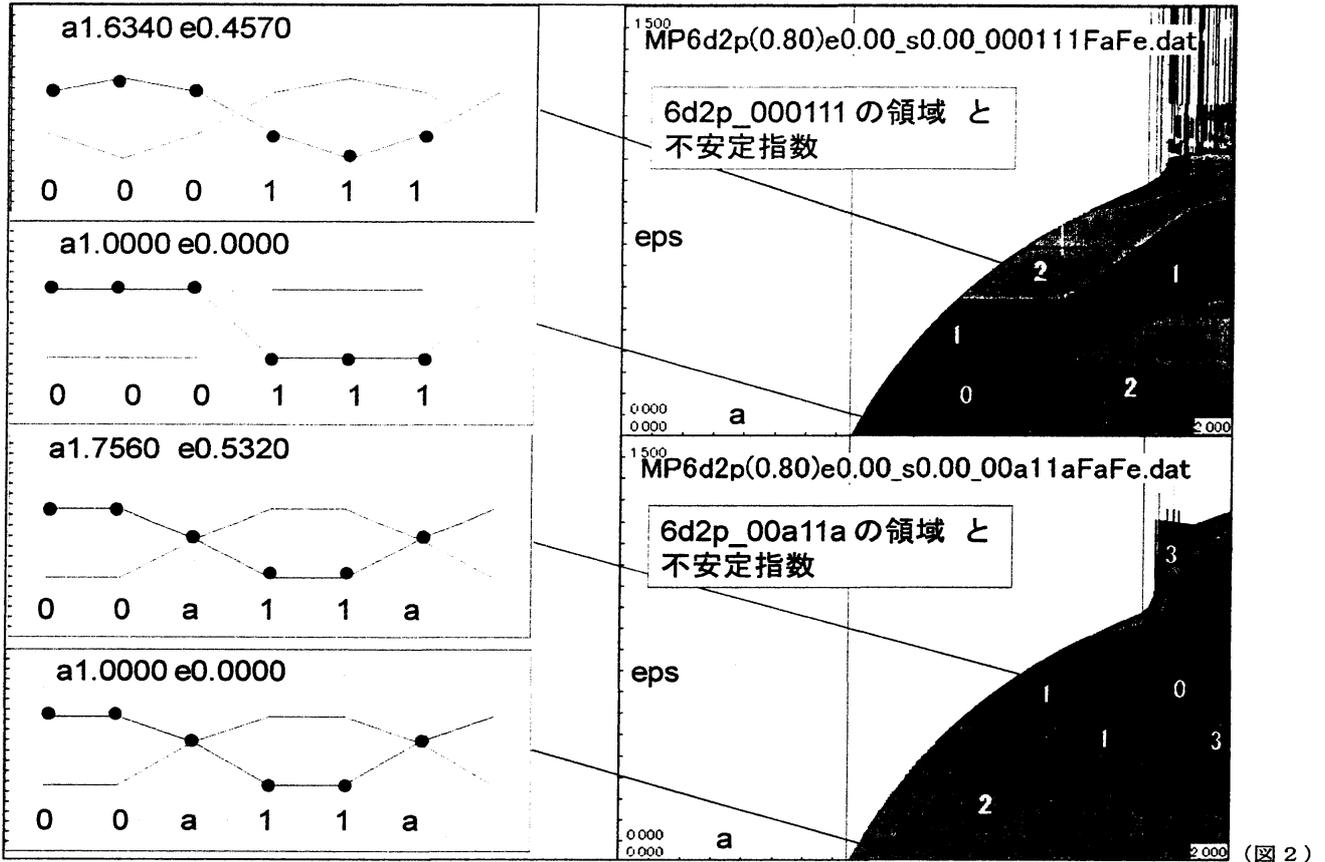


図2は、6次元 CML の2周期点のうち、2つのタイプ $2p_000111$ と $2p_00a11a$ の例を示している。右図は a - ϵ パラメータ空間(横軸: $0 < a < 2$, 縦軸: $0 < \epsilon < 1.5$)である。数字は不安定指数を表している。左は右のパラメータ空間からとったパラメータ値に対応する周期点を波形で表したものである。

【定義3】 Fourier座標表示

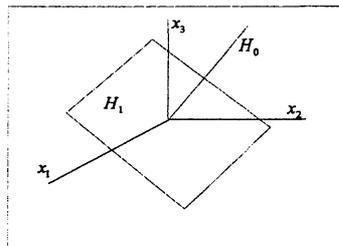
R^N を次の直交部分空間の和に直和分解する。 $R^N = H_0 \dot{+} H_1 \dot{+} H_2 \dots$

$k = 0 \leftrightarrow H_0 \leftrightarrow (1, \dots, 1)^T$

$k = m \leftrightarrow H_m \leftrightarrow (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)^T$ ($N = 2m$ が偶数の場合)

$$other \leftrightarrow H_k \leftrightarrow \begin{cases} (\cos \frac{2\pi k \cdot 0}{N}, \cos \frac{2\pi k \cdot 1}{N}, \dots, \cos \frac{2\pi k \cdot (N-1)}{N})^T \\ (\sin \frac{2\pi k \cdot 0}{N}, \sin \frac{2\pi k \cdot 1}{N}, \dots, \sin \frac{2\pi k \cdot (N-1)}{N})^T \end{cases}$$

$x \in R^N$ を H_k に射影して表示することを H_k Fourier座標表示という。



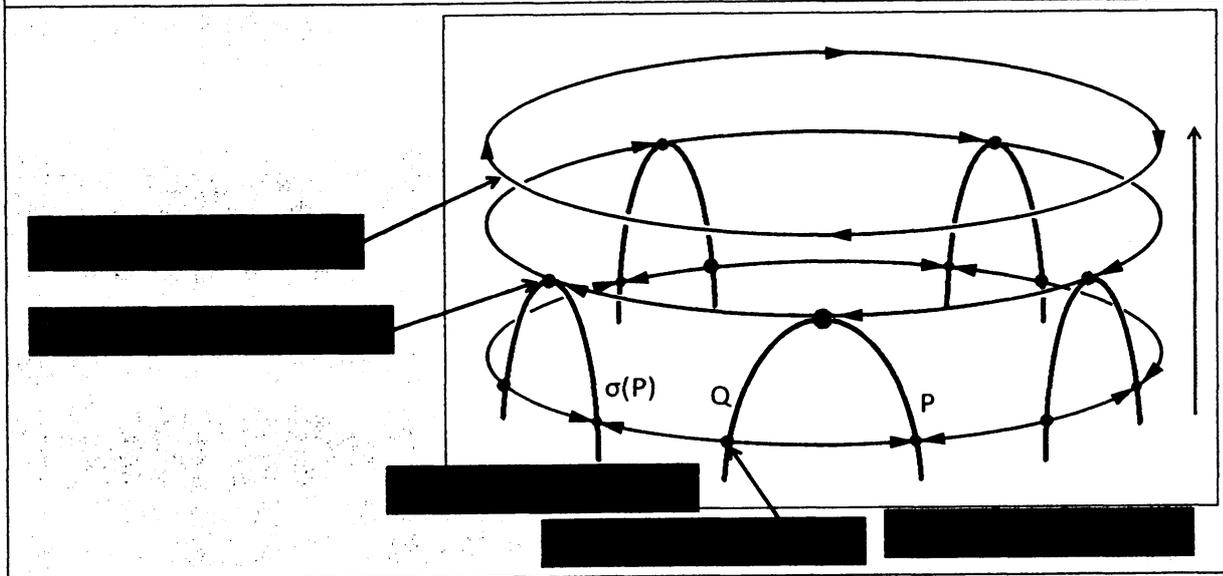
(図3)

§ 3 TWの発生・消滅の経路(1)

— Saddle-Node Circle (SNC) 経路 —

- 安定周期点Pと不安定周期点QがSN分岐で対消滅する
- Qの不安定多様体 $W^u(Q)$ がシフト $\sigma(P)$ の安定多様体に含まれる

⇒ TWの発生 (システムの巡回対称性により)



(図 4)

講演では § 2 として、CMLにおける進行波アトラクタの実演を行った。そのうえで、進行波アトラクタ (Traveling Wave, TW) の発生・消滅のメカニズムとして、§ 3でサドルノード サイクル (SNC) 経路を、§ 4でヘテロクリニック サイクル (HCC) 経路を説明した。

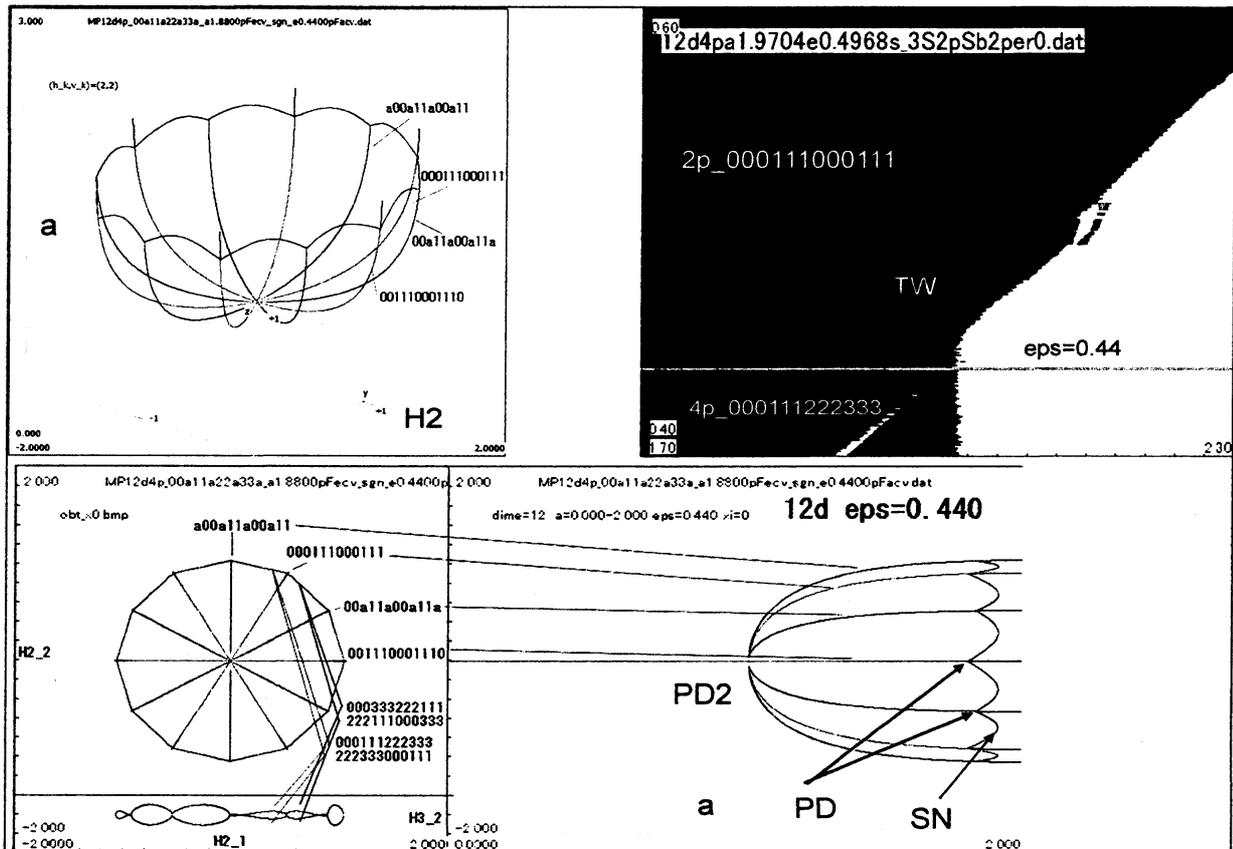
今、安定周期点 P と不安定周期点 Q がサドルノード (SN) 分岐で対消滅する場合を考える。(図 4 参照) 例として、12CML の安定周期点 4 周期点 $4p_001112223330$ と不安定周期点 4 周期点 $4p_00a11a22a33a$ の場合を説明する。不安定周期点 Q の 1 次元不安定多様体 $W^u(Q)$ が安定周期点のシフト $\sigma(P)$ (今の場合、 $4p_000111222333$) の安定多様体に含まれるとする。システムの巡回置換対称性から、1 次元不安定多様体のサイクルが形成される。パラメータを変化させて、SN 分岐点を超えると、このサイクルが進行波アトラクタ (TW) となる。また、TW が存在するとき、パラメータを逆向きに変化させると、SN 分岐で安定/不安定周期点を対発生させて消滅する。(この過程はフェーズロッキングとして知られている。) この TW 発生・消滅の経路をサドルノード サイクル (SNC) 経路とよぶ。

図 5 は $12d4p_00011122233$ の場合の数値計算である。右上は a - ϵ 空間 (横軸: $1.70 < a < 2.30$ 縦軸: $0.40 < \epsilon < 0.60$) で、 $\epsilon = 0.44$ を固定して、 a を変化させる。左上はフーリエ座標 H_2 空間を底面、 a を縦軸にとった 3 次元の図である。一様 1 周期点 $1p_a^{12}$ が周期倍分岐 (重複固有値 $(-1)^2$) 点 PD2 で、 $2p_000111000111$ とそのシフト (全部で 6 本)、および $2p_00a11a00a11a$ とそのシフト (全部で 6 本) を発生させていることがわかる。(その様子はパラソルのようである。)

1 2 本の 2 周期点の軌跡はさらに周期倍分岐点 PD で 4 周期点を発生させる。安定 2 周期点 $2p_000111000111$ の PD 分岐点から発生する安定 4 周期点は $4p_000111222333$ とその 2 回イテ

レーション (4p_22233300011)、および 4p_000333222111 とその 2 回イテレーション (4p_222111000333) の 4 本である。(フーリエ座標 H2 平面の表示では重なって 2 本に見えるため、図左下ではフーリエ座標 H3 を正面図として表示している。) 不安定 2 周期点 2p_00a11a00a11a の PD 分岐点から同様に(index 1)不安定 4 周期点が 4 本発生している。これらの安定/不安定 4 周期点の軌跡が SN 分岐点で円周状につながっている。この SN 分岐点から TW が発生している。

一様 1 周期点 → (パラソル型 PD 分岐) → 2 周期点 → (PD 分岐) → 4 周期点 → (SN 分岐) → TW

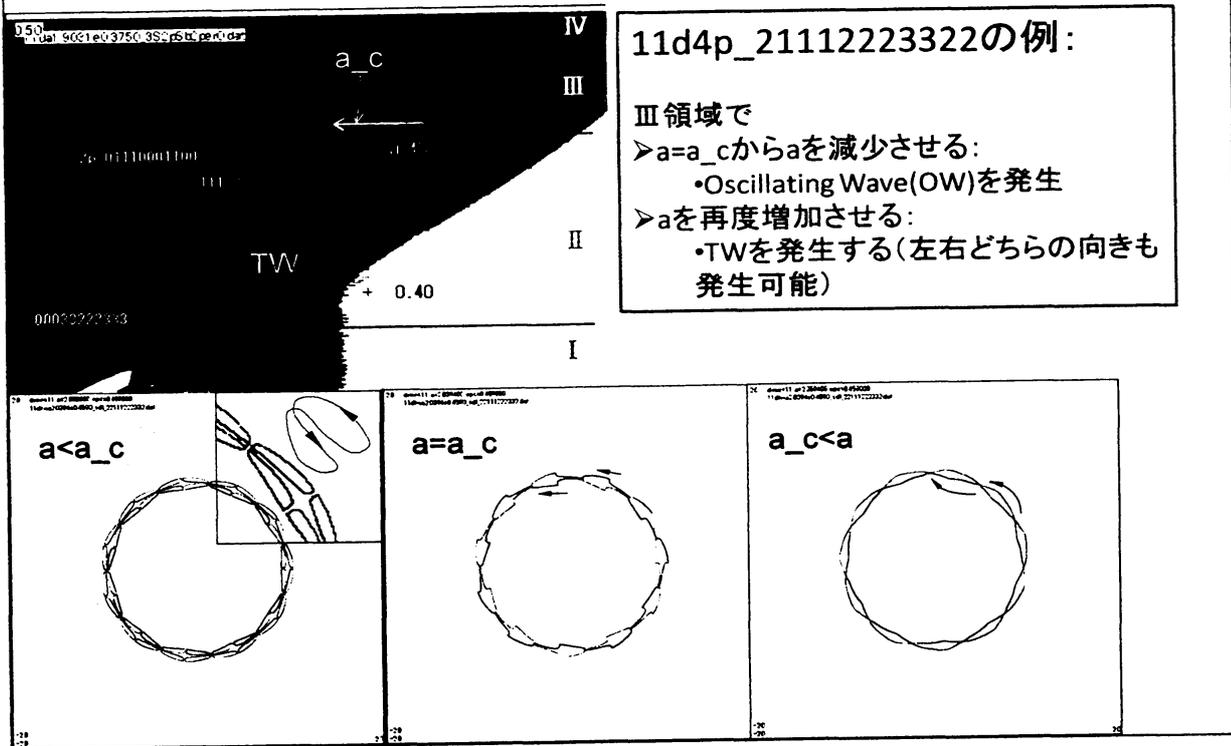


(図 5)

次の § 4 では進行波アトラクタのもう一つの発生・消滅経路であるヘテロクリニックサイクル経路を説明する。(図 6 参照) 具体例として、11 次元 CML における 4 周期点 4p_2112223322 を取り上げる。これは今考察するパラメータの範囲で index1 の不安定 4 周期点である。図 6 の左上は a-eps 空間 (横軸: $1.8 < a < 2.2$, 縦軸: $0.35 < \text{eps} < 0.50$) である。第 III 領域で臨界値 a_c の右から a_c を横切って a を減少させると進行波アトラクタは Oscillating Wave(OW) に分裂する。a を再度増加させると、進行波アトラクタを発生させる。この際、左右どちらの向きの TW も発生可能である。(SNC 経路の場合は、発生する TW が右向きか、左向きかは安定周期点の型によって定まっていたことと対照的である。)

§ 4 TWの発生・消滅の経路(2)

— Hetero-Clinic Circle(HCC) 経路 —



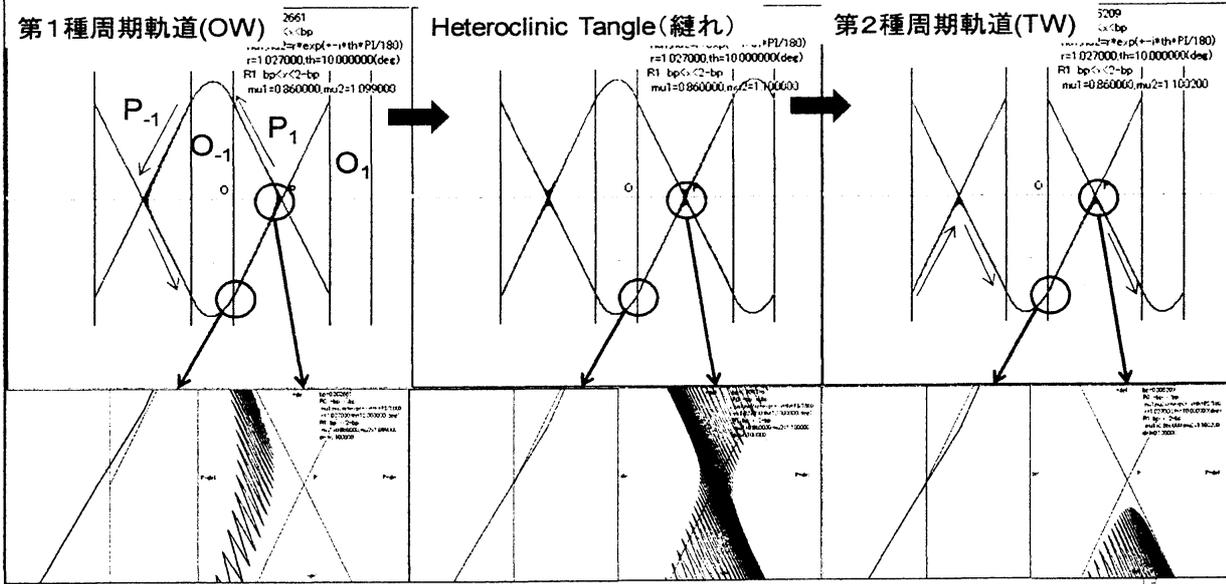
(図6)

このメカニズムを説明するための予備考察として2次元シリンダー上の連続区分線形写像 $G: T^1 \times R^1 \rightarrow T^1 \times R^1$ を構成した。(図7参照) この写像は、原点对称な位置に2つのサドル不動点 $P_{(-1)}, P_{(1)}$ を持ち、パラメータを変化させることによって、 $P_{(-1)}$ の不安定多様体が $P_{(1)}$ の安定多様体と纏れる様子を観測できる。パラメータ a がある臨界値 $a_{c1} < a_{c2}$ の間にいるとき ($a_{c1} < a < a_{c2}$) は、Heteroclinic Tangle が観測される。システムの対称性から Heteroclinic Tangle はシリンダーを取り巻く網目のように形成される。(図7中央) これを HeteroClinic Cycle (HCC) と呼ぶ。 $a < a_{c1}$ ではシリンダーを取り巻かない準周期軌道(第1種)が観測される。(これが Oscillating Wave(OW)に対応する。図7左) $a_{c2} < a$ では、シリンダーを取り巻く準周期軌道(第2種)が観測される。(これが Traveling Wave(TW)に対応する。図7右) 臨界値の差 $a_{c2} - a_{c1}$ が非常に小さいときには Heteroclinic Tangle を観測することが難しく、OW ⇔ TW の遷移として観測される。

これに相当することが CML の TW 発生・消滅 HCC 経路で起きていると考えられる。(図8参照) すなわち、 $a_{c1} < a < a_{c2}$ で4つの(index 1)4周期点 ($4p_{22111222332}$, $4p_{223333003332}$, $4p_{003333000110}$, $4p_{00111221110}$) の間に安定/不安定多様体の纏れによる HCC が形成される。(図8中央 HCC) 現時点では、数値計算の精度が不十分のため a_{c1}, a_{c2} が数値的に分離できない。($a_c = a_{c1} = a_{c2}$ とする。) この臨界値を境に、 $a < a_c$ で OW が発生し(図8左)、 $a_c < a$ で TW が発生する(図8右)。このメカニズムから右向きと左向きの TW が同時に発生し、共存することがわかる。システムの巡回置換対称性から、上記の4つの4周期点をシフトしたすべての周

【予備考察】:連続区分線形写像 $G: T^1 \times R^1 \rightarrow T^1 \times R^1$

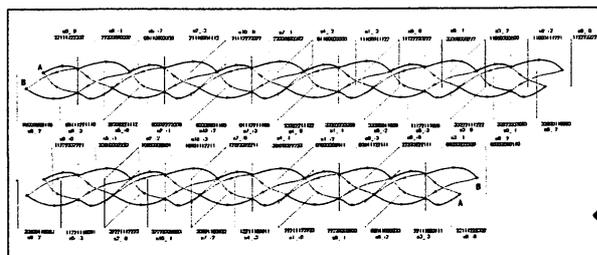
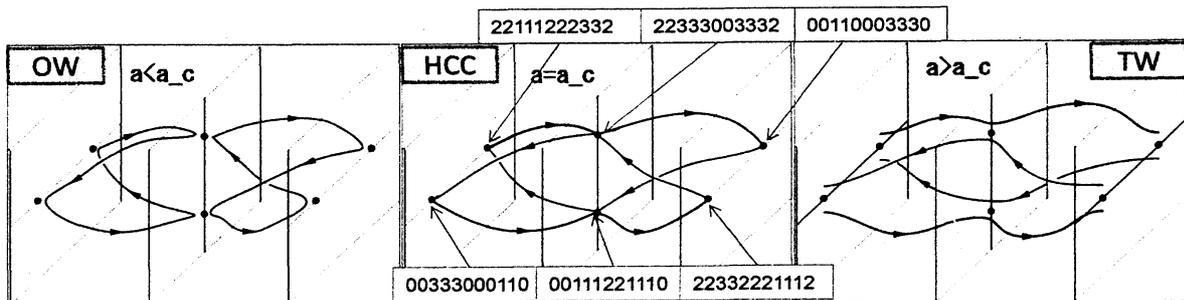
- > $a_{c1} < a_{c2}$ で Heteroclinic Tangle が見られる。(Heteroclinic Cycle (HCC) と呼ぶ)
- > Heteroclinic Tangle の前後で第1種周期軌道 (OW に対応)、第2種周期軌道 (TW に対応) が発生
- > $a_{c2} - a_{c1}$ が非常に小さいとき OW \leftrightarrow TW の遷移として観測される。



(図 7)

【11d4p_21112223322 の場合】

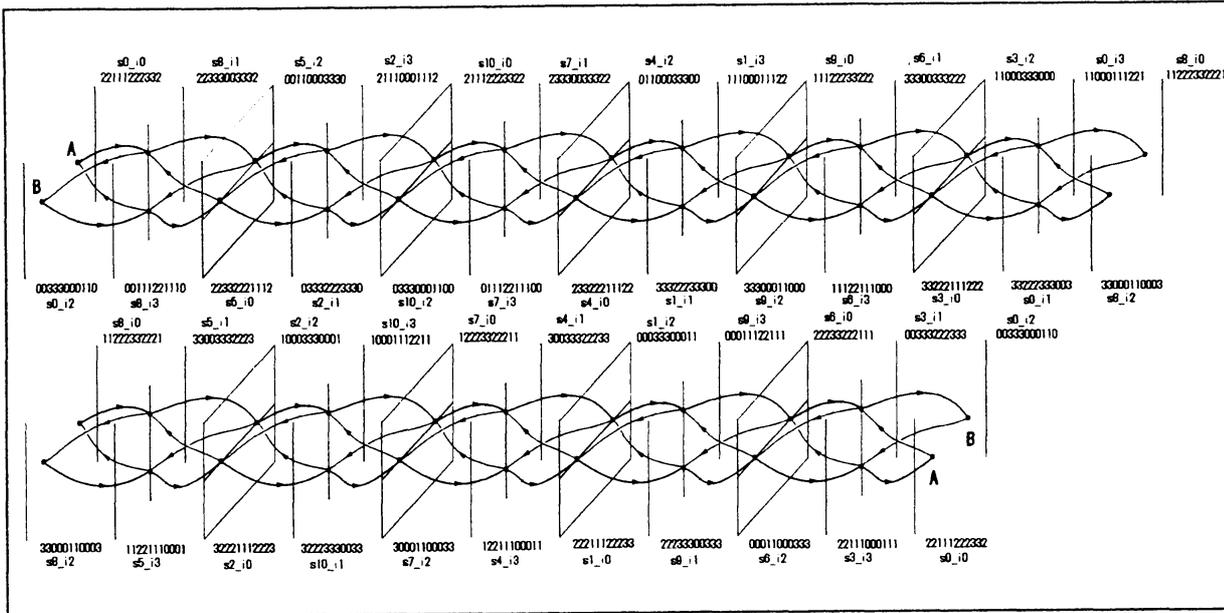
- > $a_{c1} < a_{c2}$ で 4 つの 4 周期点 (index 1) およびそれらの共役周期点の間に HCC が形成される。
- > a_{c1}, a_{c2} が数値的に分離できない ($a_c = a_{c1} = a_{c2}$ とする)
- > $a < a_c$ で OW が発生、 $a_c < a$ で TW が発生



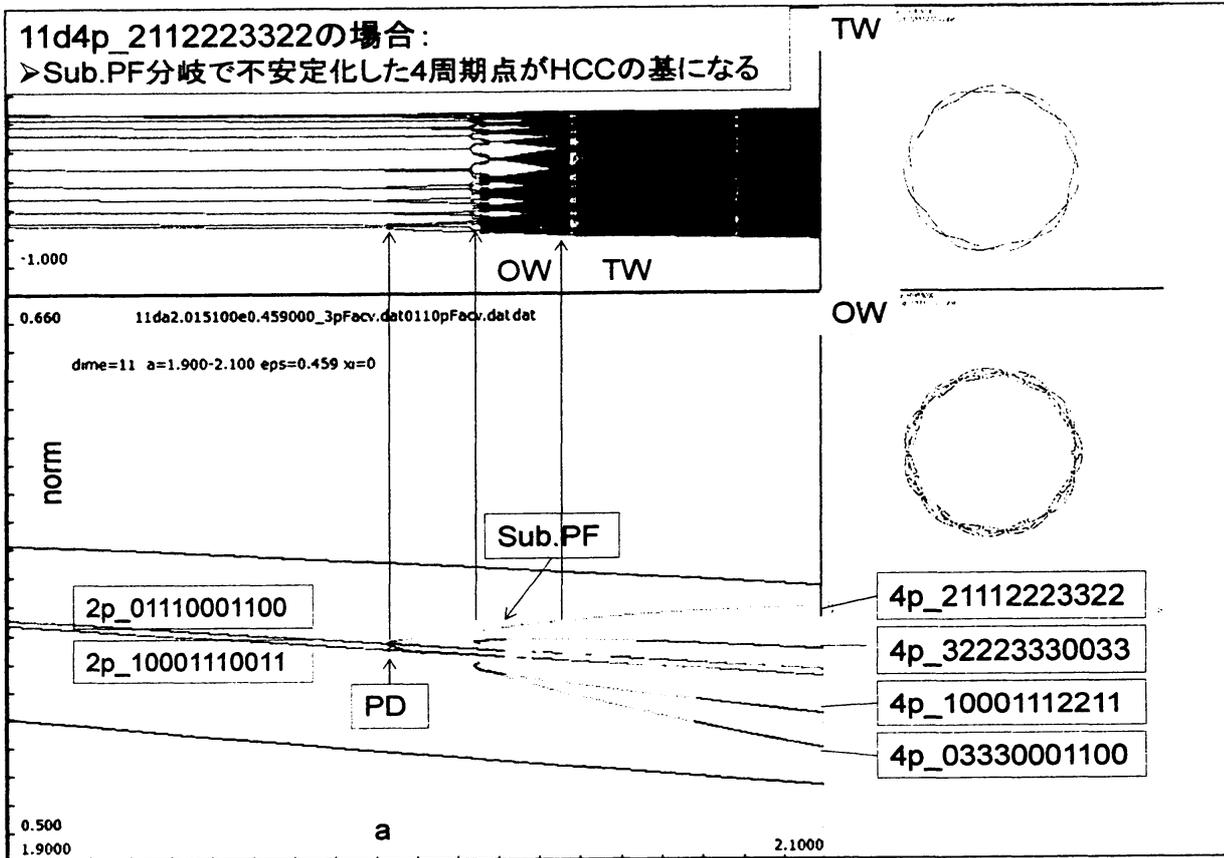
- 右向きと左向きが共存
- 2周して閉じる

← 11組を繋げた図

(図 8)



(図 9)



(図 9)

期点の間でHCCが形成されており、これら11組すべてを繋げて描いたのが図9である。記号Aの点どうしを同一視し、記号Bの点どうしを同一視することにより、右向きに走る線は2周して閉じていることがわかる。左向きの線も同様に2周して閉じている。これは数値計算の結果とも一致する。

HCC形成の基となっている4周期点の由来を調べたのが図9である。すなわち、2周期点2p_01110001100,2p_10001110011の周期倍分岐で発生した4周期点がPF分岐で不安定化したも

のが HCC 形成の基となっている。講演では述べられなかったが、HCC 経路では、OW が発生し可逆的な場合 (図 6 の III 領域) の他に、安定周期点に落ち込み回復にヒステリシスを伴う場合 (図 6 の II 領域) がある。この違いは、基となるサドル周期点の安定・不安定固有値の比によって定まると考えられる。

Acknowledgment: This work was supported by KAKENHI 18340021.

2009/11/22