数理解析研究所講究録
第1688巻2010年164-174



# Heterodimensional tangencies から導かれる strange attractors と $C^1$-robust homoclinic tangencies について

首都大学東京　西澤　由輔 (Yusuke Nishizawa)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

この論説では，桐木紳氏（京都教育大学）と相馬輝彦氏（首都大学東京）との共同研究によって得られたヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像に関するいくつかの結果について述べる．$M$ を $n$ 次元多様体とし，$\mathrm{Diff}^r(M)$ は $M$ 上の $C^r$ 微分同相写像全体の空間とする．また，$\varphi \in \mathrm{Diff}^r(M)$ が2つのサドル型不動点 $p$ と $q$ をもつとする．このとき，$\varphi$ が $p$ と $q$ に関する**ヘテロクリニックサイクル**をもつとは，

$$W^s(p,\varphi)\cap W^u(q,\varphi)\neq\emptyset \text{ かつ } W^u(p,\varphi)\cap W^s(q,\varphi)\neq\emptyset$$

をみたすことをいう．このヘテロクリニックサイクルが $\mathrm{Index}(p)\neq\mathrm{Index}(q)$ をみたすとき，**ヘテロ次元サイクル**という．特に，$\mathrm{Index}(p)=\mathrm{Index}(q)+1$ をみたすとき **co-index one サイクル**という．また，ヘテロクリニック点 $r\in W^s(q,\varphi)\cap W^u(p,\varphi)$ が

$$T_rW^s(q,\ \varphi)+T_rW^u(p\ \varphi)\neq T_rM \quad \text{かつ}$$

$$\dim(T_rW^s(q,\ \varphi))+\dim(T_rW^u(p,\ \varphi))>\dim(M)$$

をみたすとき，この $r$ を $W^s(q,\varphi)$ と $W^u(p,\varphi)$ の**ヘテロ次元接触**という．

ヘテロ次元サイクルはホモクリニック接触と同様に1970年代にNewhouseやPalis等によって導入された概念であり，ホモクリニック接触とは異なる力学系である．これに関して，近年ではBonattiやDiaz達によって様々な結果が得られている．このヘテロ次元接触をもつ微分同相写像に関して，次のようなが結果が得られた．

**定理1**([KNS]). $M$ を3次元 $C^2$ 多様体とし，$\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ を $M$ 上の $C^2$ 微分同相写像の2パラメータ族とする．ここで，$\varphi_{\mu,\nu}: M\to M$ は $(\mu,\nu)$ に関して $C^2$ 連続であり，$\mathrm{index}(p_{\mu,\nu})=1$ と $\mathrm{index}(q_{\mu,\nu})=2$ をみたすサドル型不動点 $p_{\mu,\nu}$ と $q_{\mu,\nu}$ を持つとする．さらに次の条件を仮定する．

- 各 $\varphi_{\mu,\nu}$ は $q_{\mu,\nu}$ の近傍 $N(q_{\mu,\nu})$ で局所的に $C^2$ 線形化される．
- $\varphi=\varphi_{0,0}$ は2つのサドル型不動点 $p=p_{0,0}$, $q=q_{0,0}$ と非退化なヘテロ次元接触 $r\in W^u(q)\cap W^s(p)$ と擬横断的交点 $s\in W^s(q)\cap W^u(p)$ を含むヘテロ次元サイクルをもつ．
- $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ はいくつかの generic conditions をみたす.（この generic conditon については Kiriki-Nishizawa-Soma [KNS] を参考せよ.）

このとき，$\varepsilon>0$ を十分小さくとると，$(0,\varepsilon)$ もしくは $(-\varepsilon,0)$ に含まれる任意の $\mu$ に対して，次をみたす無限個の $\nu$ が存在する．

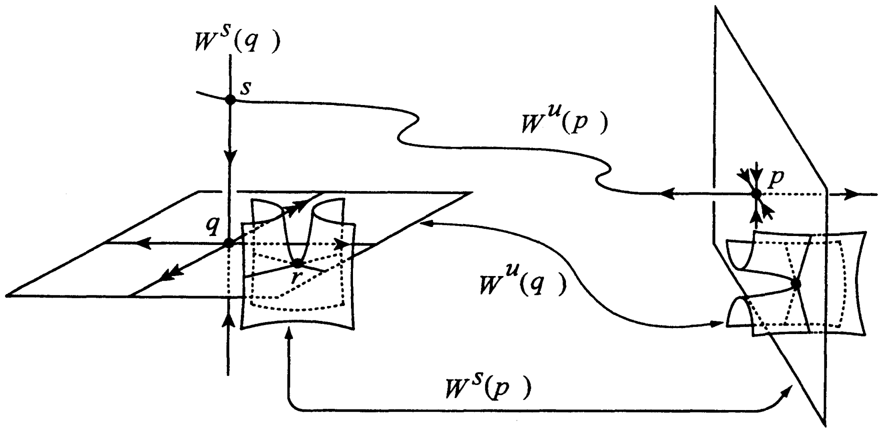


図 1: 非退化なヘテロ次元接触 $r$ と擬横断的交点 $s$ を含むヘテロ次元サイクル.

- $\varphi_{\mu,\nu}$ はサドル型不動点 $p_{\mu,\nu}$ に同伴する 2 次のホモクリニック接触をもち，$\nu$ パラメータ族 $\{\varphi_{\mu(\text{fixed}),\nu}\}$ に関してそのホモクリニック接触は generically に unfold する.

この定理 1 の結果とホモクリニック接触に関するいくつかの結果を合わせることによって，ストレンジアトラクターの存在と $C^2$ ロバストなホモクリニック接触の存在がわかる. 具体的には以下のような Viana [V] のストレンジアトラクターの存在定理と Romero [R] の $C^2$ ロバストなホモクリニック接触の存在定理を用いる.

**定理 2**([V]). 2 次元以上の多様体上の $C^\infty$ 微分同相写像 $\varphi_\mu$ の generic な 1 パラメータ族 $\{\varphi_\mu\}$ に対して，次の条件を仮定する.

- $\varphi_0$ は sectionally dissipative なサドル型不動点に同伴する 2 次のホモクリニック接触 $q$ をもつ.
- $q$ は $\varphi_\mu$ に関し generically に unfold する.
- さらに $\varphi_\mu$ は 0 に近い任意の $\mu$ に対し，$\varphi_\mu$ はサドル型不動点の周りで $C^3$ 線形化される.

このとき，次の条件をみたすような $S \subset \mathbb{R}$ が存在する.

- $S \cap (-\epsilon, \epsilon)$ は任意の $\epsilon > 0$ に対して，正のルベーグ測度をもつ.
- ある正の定数 $C$ が存在し，任意の $\mu \in S$ に対し，$\varphi_\mu$ は接触の軌道の $C|\mu|$-近傍に非双曲型ストレンジアトラクターをもつ.

ここでサドル型不動点 $p$ が **sectionally dissipative** とは，$\lambda_1, \cdots \lambda_n$ を微分 $D\varphi_0(p)$ の固有値とするとき，任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して，$|\lambda_i \lambda_j| < 1$ が成り立つことをいう. また，$\varphi$-不変なコンパクト集合 $\Lambda$ が**ストレンジアトラクター**であるとは，$\Lambda$ が $\varphi$-推移的であり，補足領域 $W^s(\Lambda)$ の内部が空でなく，$\{\varphi^n(z_1) : n \geq 0\}$ が $\Lambda$ の中で稠密で，任意の $n \geq 0$ とある定数 $c > 0$ に対して $||d\varphi^n(z_1)|| \geq e^{cn}$ をみたす $z_1 \in \Lambda$ が存在することを

いう．Leal [L] はこの Viana [V] の結果を用いて，無限個の $\mu$ に対して，$\varphi_\mu$ がストレンジアトラクターをもつことを示した．この Viana の結果と定理 1 を用いることによって次の系が得られる．

**系 3**([KNS])．$\varphi_{\mu,\nu}$ を 3 次元多様体上の $C^\infty$ 微分同相写像で定理 1 で与えられたような非退化ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつとする．さらに，次の条件を仮定する．

- $\varphi_{\mu,\nu}$ は $p_{\mu,\nu}$ の近傍で局所的に $C^3$ 線形化される．
- $\varphi_{0,0}$ は $p_{0,0}$ で sectionally dissipative.

このとき，正のルベーグ測度をもつ $(0,0)$ にいくらでも近い $\mu\nu$-平面の部分集合 $\mathcal{A}$ で，任意の $(\mu,\nu) \in \mathcal{A}$ に対して，$\varphi_{\mu,\nu}$ は非双曲型ストレンジアトラクターものが存在する．

次に非退化なヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルから生じる $C^2$ ロバストなホモクリニック接触について述べる．微分同相写像 $\varphi$ の双曲型集合 $\Gamma$ に関するホモクリニック接触が **$C^r$ ロバスト**であるとは，任意の $\psi \in \mathcal{U}$ に対して，$\Gamma$ の continuation $\Gamma_\psi$ が存在して，$\Gamma_\psi$ がホモクリニック接触をもつような $\varphi$ の $C^r$ 近傍 $\mathcal{U}$ が存在するときをいう．$C^r(r=1,2)$ ロバストなホモクリニック接触については次のような研究が知られている．Newhouse [Ne] と Robinson [R] はホモクリニック接触をもつ 2 次元の微分同相写像から $C^2$ ロバストなホモクリニック接触を構成し，Palis-Viana [PV] と Romero [R] はその結果を高次元に拡張した．Palis-Viana は sectional dissipativeness と線形化の条件下で $C^2$ ロバストなホモクリニック接触の存在を証明しているが，Romero [R] はこのような条件を仮定しないで次の定理を証明した．

**定理 4**([R])．$\varphi$ は 3 次元以上の多様体上の $C^2$ 微分同相写像でサドル型周期点に同伴するホモクリニック接触をもつとする．さらに，このサドル型周期点の不安定多様体の次元は 2 次元以上と仮定する．このとき，$C^2$ 位相で $\varphi$ にいくらでも近い微分同相写像で $C^2$ ロバストなホモクリニック接触を持つものが存在する．

この Romero [R] の結果と定理 1 を用いることによって，次の系が得られる．

**系 5**([KNS])．$\varphi_{\mu,\nu}$ を 3 次元多様体上の $C^2$ 微分同相写像で，定理 1 で与えられたような非退化ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつものとする．このとき，十分小さい $\varepsilon > 0$ と $(0,\varepsilon)$ もしくは $(-\varepsilon,0)$ に含まれる任意の $\mu$ に対して，$\varphi_{\mu,\nu}$ の $C^2$ 近傍が $C^2$ ロバストホモクリニック接触をもつ微分同相写像を含んでいるような無限個の $\nu$ が存在する．

もし，ここで weak dissipative 条件（[R] を参照）を系 5 の仮定に加えると，$C^2$ Newhouse 現象の存在を示すことができる．ただし，$C^1$ 位相に関しては，Díaz-Nogueira-Pujals [DNP] によってヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルから $C^1$ Newhouse 現象が存在することはすでに証明されている．

系 5 では定理 1 と Romero [R] の結果を用いて，ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルから $C^2$ ロバストなホモクリニック接触の存在を示したが，次の定理よりヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルから $C^1$ ロバストなホモクリニック接触の存在を示すことができる．

**定理 6**([Ni]). $M$ を 3 次元多様体とし，$\varphi$ を $M$ 上の $C^1$ 微分同相写像で次の条件をみたすサドル型不動点 $p$ と $q$ に同伴するヘテロ次元サイクルをもつものとする.

- $\mathrm{Index}(p) = \mathrm{Index}(q) + 1$,
- $\varphi$ は安定多様体 $W^s(q,\varphi)$ と不安定多様体 $W^u(p,\varphi)$ のヘテロ次元接触 $r$ をもつ．さらに，このヘテロ次元接触は $W^{uu}(p,\varphi)$ に含まれる.

このとき $\varphi$ に $C^1$ 位相でいくらでも近い微分同相写像 $\psi$ で $C^1$ ロバストなホモクリニック接触をもつものが存在する.

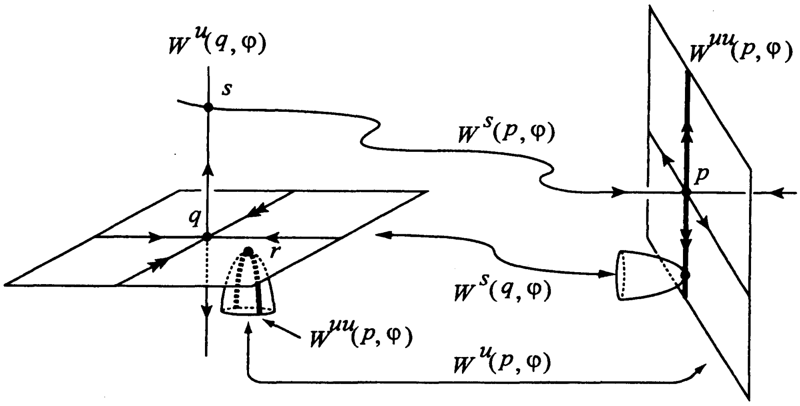


図 2: 定理 6 の条件をみたすヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクル

[Ne, PV] では $C^2$ ロバストなホモクリニック接触の存在を示すために，カントール集合の thickness を用いている.（Newhouse 達が用いた thickness は $C^1$ の摂動では連続的に変化しないので $C^2$ の仮定が必要である）．また，Asaoka [A] はホモクリニック接触をもつ 3 次元の微分同相写像で Plykin アトラクターをもつものを考えて，$C^1$ ロバストなホモクリニック接触を構成をしている．定理 6 はヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルから $C^1$ ロバストなホモクリニック接触を示すものなので [Ne, PV, A] とは異なる結果である.

## 1　定理 1 の証明の概略

定理 1 の証明は大きく 3 段階に分けられる．最初にホモクリニック接触を見つける．次にそのホモクリニック接触が 2 次接触であることを示すこと．最後にその接触が generically に unfold することを示す．詳しい証明は [KNS] を参照せよ.

ホモクリニック接触を見つけるために次の補題を用いてヘテロ次元接触は外れるが，擬横断的交点は外れないような摂動の存在を示す.

**補題 1.** ある定数 $\rho > 0$ と $C^2$ 関数 $\tilde{\nu} : (-\rho, \rho) \to \mathrm{R}$ が存在して，任意の $\mu \in (-\rho, \rho)$ に対して，次をみたす.

- $W^u(q_{s_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}})$ と $W^s(p_{u_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}})$ の擬横断的交点 $s_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}$ で，$\mu$-continuation となるものが存在する.

- $s_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}$ は $\nu$ パラメータ族 $\{W^u(q_{s_{\mu(\text{fixed}),\nu}})\}$ と $\{W^s(p_{s_{\mu(\text{fixed}),\nu}})\}$ に関して generically に unfold する．

この補題により得られた新しいパラメータ $\hat{\mu}=\mu$ と $\hat{\nu}=\mu-\tilde{\nu}(\mu)$ を再び $(\mu,\nu)$ と書くことにする．図 3 は新しいパラメータに関する非退化なヘテロ次元接触の摂動と擬横断的交点の関係を示している．

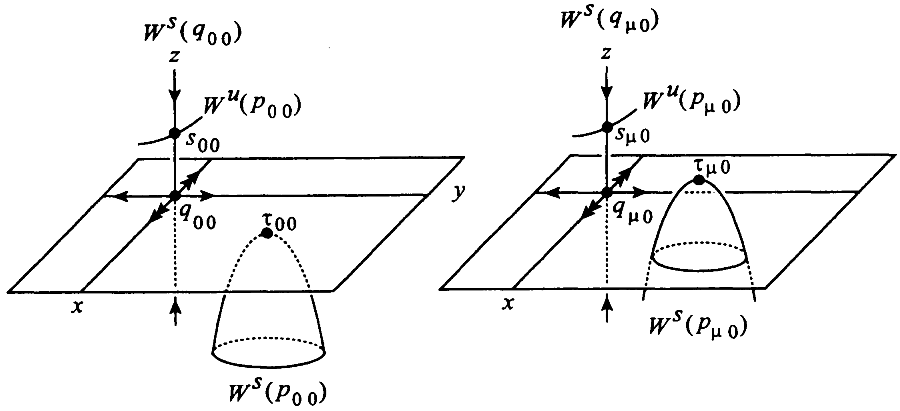


図 3: 補題 1

$\mu=\mu_0$ と固定したとき，擬横断的交点の近傍の写像 $\varphi^m_{\mu_0,0}$ による像をみると図 4 のように $\varphi^m_{\mu_0,0}(s_{\mu_0,0})$ を含む $W^u(p_{\mu_0,0})\cap U(q_{0,0})$ の連結成分 $l_m$ の列 $\{l_m\}$ が $W^{uu}_{\text{loc}}(q_{\mu_0,0})$ に $C^2$ 位相で一様に収束していることがわかる．ここで $A_0$ は図 4 で示されているような $W^s(p_{\mu_0,0})\cap U(q_{\mu_0,0})$ の高さ 0 から $h_0$ までの部分である．

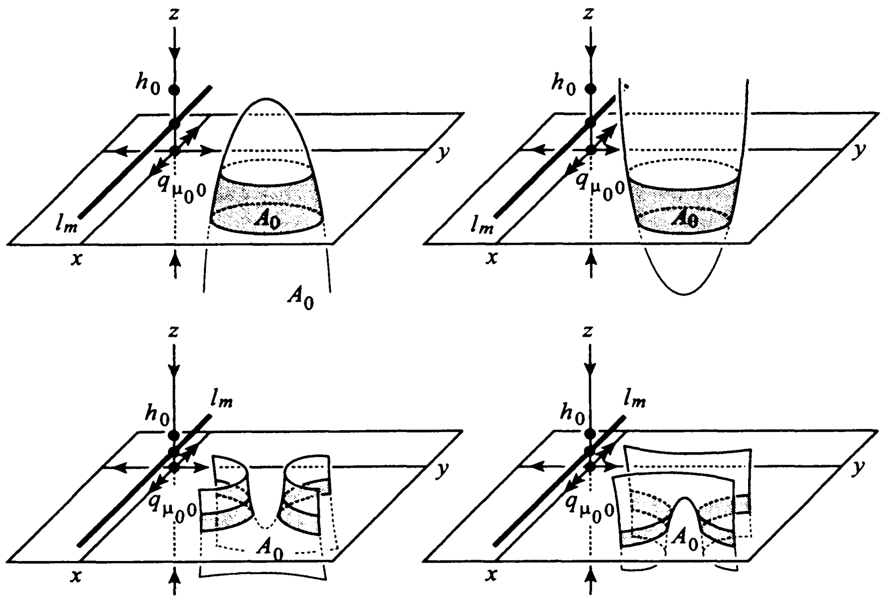


図 4: ホモクリニック接触①

次に擬横断的交点 $\varphi^m_{\mu_0,0}$ を $\nu$ パラメータ族 $\{\varphi^m_{\mu_0,0}\}$ を摂動することによって外す．このとき，自然数 $m$ を $\varphi^m_{\mu_0,0}(s_{\mu_0,0})<h_0$ となるように十分に大きくとると，$m$ に依存するパラ

メータ $\bar{\nu}_m$ が存在して，図５のようになる．このとき中間値の定理より，ある $\nu_m \in (0, \bar{\nu}_m)$ が存在して，$l_{m,\nu_m} \subset W^u(p_{u_{\mu_0,\nu_m}})$ と $A_{\nu_m} \subset W^s(p_{u_{\mu_0,\nu_m}})$ は接触 $\tau_m$ を持つようにできる．この $\tau_m$ は $p_{\mu_0,\nu_m}$ に同伴するホモクリニック接触である．

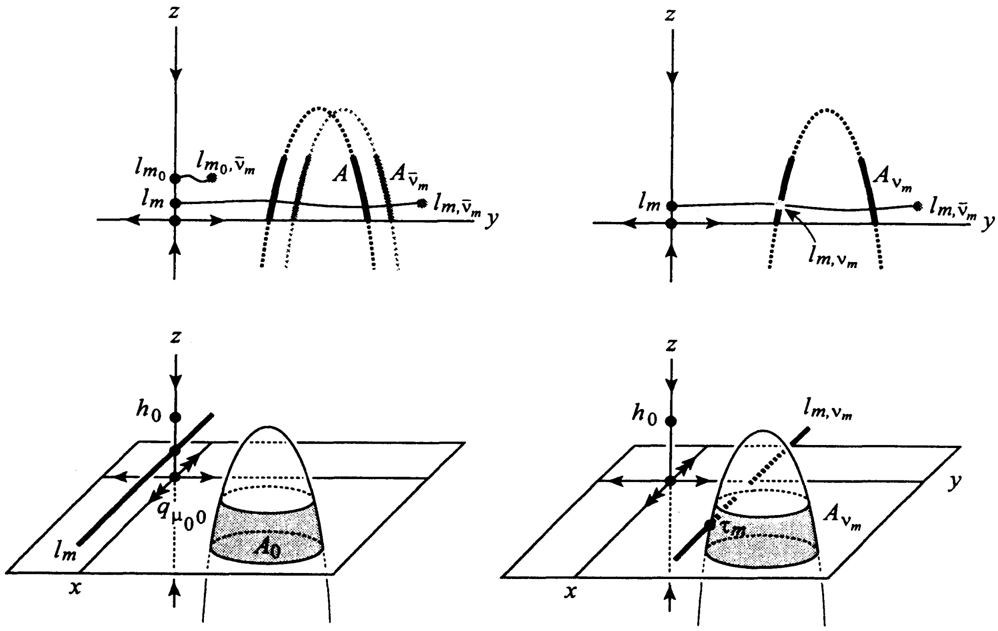


図 5: ホモクリニック接触②

次にこのホモクリニック点 $\tau_m$ が２次接触であることを示す．この２次接触という条件は定理 2([V]) を証明するのに使われている条件である．ここで $l_{m,\nu_m}$ の曲率がいくらでも０に近いことと，$\tau_m \in A_{\nu_m}$ について法曲率が $m$ に依存しない正の定数 $\kappa_0$ より大きいことに注意すると次の補題より $\tau_m$ が２次接触であることがわかる．

**補題 2.** $S$ を３次元ユークリッド空間に含まれる正則曲面とし，$l$ を $S$ と $\tau$ で接する正則曲線とする．また，$\tau$ での $l$ の曲率 $\kappa_l(\tau)$ は $S$ の $\tau$ での法曲率 $\kappa_S(\tau, \boldsymbol{w})$ の絶対値より小さいとする．ここで $\boldsymbol{w}$ は点 $\tau$ における $l$ の単位接ベクトルである．このとき，$S$ と $l$ の接点 $\tau$ は２次接触である．

次に十分大きい $m$ に対して，この $W^s(p_{\mu_0,\nu_m})$ と $W^u(p_{\mu_0,\nu_m})$ のホモクリニック接触 $\tau_m$ が $\nu = \nu_m$ で $\nu$ パラメータ族 $\{W^s(p_{\mu_0,\nu})\}$ と $\{W^u(p_{\mu_0,\nu})\}$ に関して generically に unfold することを示す．ここで，擬横断点 $s_{\mu_0,0}$ がパラメータ $\nu$ に関して generically に unfold することから，図６のように，そのホモクリニック接触が generically に unfold することがわかる．

## 2 定理６の証明の概略

定理６の証明のカギは，Bonatti-Díaz [BD] によって導入されたシンプルサイクルとブレンダーいう概念である．Kiriki-Kokubu-Li [KKL] によって，定理６の条件の元でブレンダーが存在することがわかる．そしてブレンダーの distinctive property を用いて定理６のロバスト性を証明する．この distinctive property をロバスト性を証明するためにカ

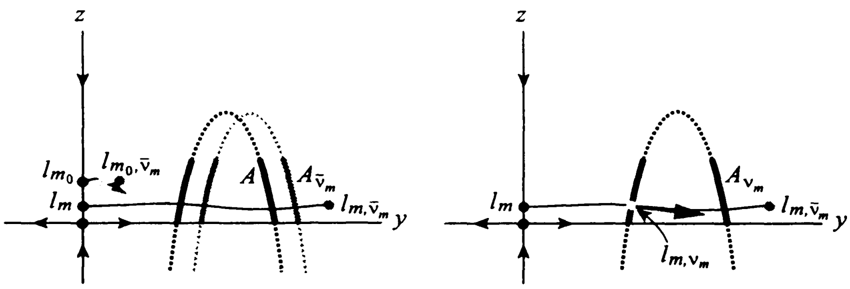

図 6: unfolding generically

ントール集合の thickness や Plykin アトラクターの代わりに用いる．詳しい証明は [Ni] を参照してほしい．

微分同相写像 $\varphi$ におけるヘテロ次元接触 $r$ の状況は図 2 のようになっている．このときヘテロ次元接触に図 7 のように，$C^1$ 摂動を加えて，$\varphi$ に $C^1$ 位相でいくらでも近い微分同相写像 $\tilde{\varphi}$ で次の条件をみたすものを構成する．

- $\tilde{\varphi}$ は $p$ と $q$ の continuation $p_{\tilde{\varphi}}$ と $q_{\tilde{\varphi}}$ に同伴するヘテロ次元接触をもつ．
- $r$ の局所座標 で $r=(0,0,0)$, $S^s_{\tilde{\varphi}}=\{z=0\}$ かつ $S^u_{\tilde{\varphi}}=\{z=x^2+y^2\}$ となる $S^s_{\tilde{\varphi}}\subset W^s(q_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ と $S^u_{\tilde{\varphi}}\subset W^u(p_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ が存在する．
- $W^s_{\mathrm{loc}}(q_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})\cap W^u(p_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ に含まれる曲線 $l_{\tilde{\varphi}}$ が強安定葉層 $\mathcal{F}^{ss}(q_{\tilde{\varphi}})$ と横断的に交わり，$W^{uu}(p_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ と $W^s(q_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ は曲線 $l_{\tilde{\varphi}}$ 上で横断的に交わる．さらに，$l_{\tilde{\varphi}}$ の近傍 $U(l_{\tilde{\varphi}})$ と $r$ の近傍 $U(r)$ は $U(l_{\tilde{\varphi}})\cap U(r)=\emptyset$ となるようとれる．

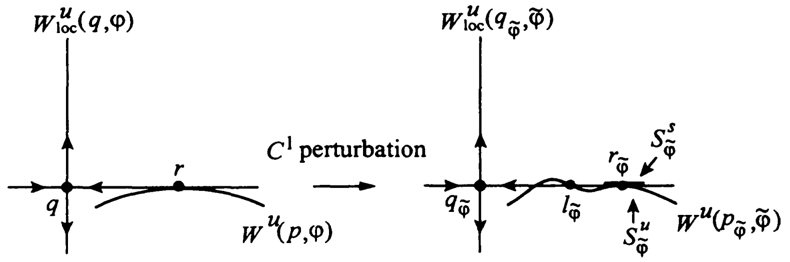

図 7: ヘテロ次元接触に加える $C^1$ 摂動

$\tilde{\varphi}$ は局所的に横断的な $W^s(q_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ と $W^u(p_{\tilde{\varphi}},\tilde{\varphi})$ の共通部分を含む co-index one なヘテロ次元サイクルなので，[BD] の命題 3.5 より次をみたす微分同相写像の 2 パラメータ族 $\{\psi_{\mu,\nu}\}_{\mu\in[-\epsilon,\epsilon],\nu\in[-\eta,\eta]}$ が存在する．

- $\psi_{0,0}$ は $\tilde{\varphi}$ に $C^1$ 位相でいくらでも近く，$p_{\tilde{\varphi}}$ と $q_{\tilde{\varphi}}$ の continuation である $P$ と $Q$ に同伴するヘテロ次元サイクルをもつ．
- このヘテロ次元サイクルはシンプルサイクルになる．

- $W^s_{\mathrm{loc}}(Q,\psi_{0,0})$ と $W^u(P,\psi_{0,0})$ はパラボリックなヘテロ次元接触 $r=r_{0,0}$ をもつ.
- $l_{\tilde{\varphi}}$ の continuation である曲線 $l_{0,0}\subset W^s_{\mathrm{loc}}(Q,\psi_{0,0})\cap W^u(P,\psi_{0,0})$ が存在する. さらに, この $l_{0,0}$ は強安定葉層 $\mathcal{F}^{ss}(Q)$ と横断的に交わり, $W^{uu}(P,\psi_{0,0})$ と $W^s(Q,\psi_{0,0})$ も横断的に交わる.

ここで, パラメータ $\mu$ はパラボリックなヘテロ次元接触を摂動するパラメータであり, パラメータ $\nu$ は擬横断的交点を摂動するパラメータである. 図 8 を参照せよ.

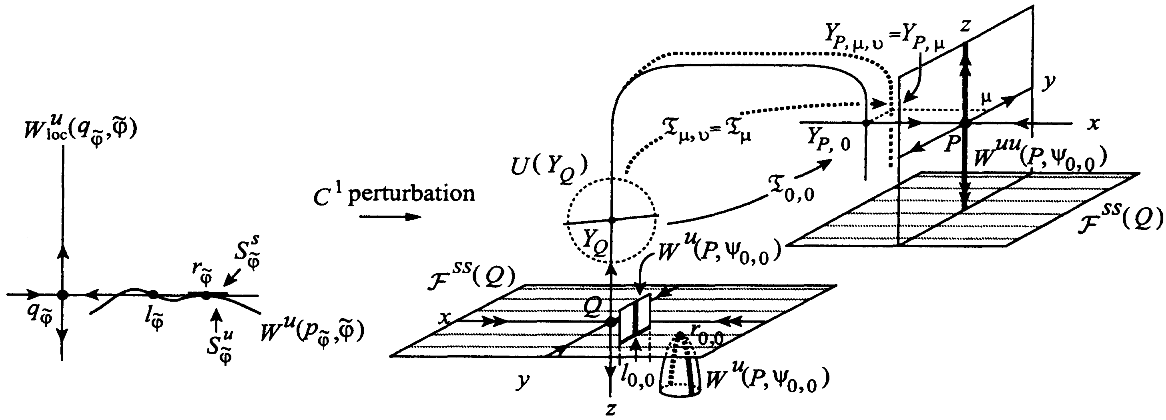


図 8: $\psi_{0,0}$ のシンプルサイクル

次の補題より, パラボリックなヘテロ次元接触の状態を保ったまま, 擬横断的交点を摂動する 1-パラメータ族を $\mu\nu$-パラメータ空間内にとることができる.

**補題 3.** 十分小さい $\epsilon>0$ に対して, ある $0<\rho<\epsilon$ となる定数 $\rho$ と $C^1$ 関数 $\tilde{\nu}:(-\rho,\rho)\to\mathbb{R}$ が存在して, 任意の $\mu\in(-\rho,\rho)$ に対して, $W^s(Q,\psi_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)})$ と $W^u(P,\psi_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)})$ はヘテロ次元接触 $r_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}$ をもち, $r_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)}$ は $\nu$ パラメータ族 $\{W^s(Q,\psi_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)})\}$ と $\{W^u(P,\psi_{\mu,\tilde{\nu}(\mu)})\}$ に関して generically に unfold する.

$\hat{\mu}=\mu,\hat{\nu}=\nu-\tilde{\nu}(\mu)$ として新しいパラメータ $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ を考えたときに, このパラメータに関し $r_{\hat{\mu},0}$ $W^s(Q,\psi_{\hat{\mu},0})$ と $W^u(P,\psi_{\hat{\mu},0})$ のヘテロ次元接触であり, この $r_{\hat{\mu},0}$ は $\hat{\nu}=0$ で $\hat{\nu}$ パラメータ族 $\{W^s(Q,\psi_{\hat{\mu},\hat{\nu}})\}$ と $\{W^u(P,\psi_{\hat{\mu},\hat{\nu}})\}$ に関して generically に unfold することがわかる. 以下では $(\hat{\mu},\hat{\nu})$ を再び $(\mu,\nu)$ と書くことにする.

ここで [KKL] より, 図 9(a), (b) のように, ある $\mu_1\in(-\rho,\rho)$ と $P$ を含むボックス $D\subset U(P)$ と整数 $N>0$ が次をみたすようにとれる.

- $\psi_{\mu_1,0}$ はいくらでも $C^1$ 位相で $\varphi$ に近くサドル型不動点 $P$ と $Q$ を含む.
- $\psi_{\mu_1,0}$ は $P$ を含むブレンダー $\Lambda(\psi_{\mu_1,0})=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}}\psi^{iN}_{\mu_1,0}(D)$ をもつ.
- $W^u(Q,\psi_{\mu_1,0})$ は $W^s_{\mathrm{loc}}(P,\psi_{\mu_1,0})$ の右側 (図 9(b) において $D$ の $W^s_{\mathrm{loc}}(P,\psi_{\mu_1,0})$ より裏にある部分) にある縦線線分 $L$ を含んでいる.

ブレンダー $\Lambda(\psi_{\mu_1,0})$ が存在すると図 9(c) のように, ブレンダーの distinctive property より $L$ のいくらでも近くを $W^s(P,\psi_{\mu_1,0})$ 内の線分が通り過ぎる.

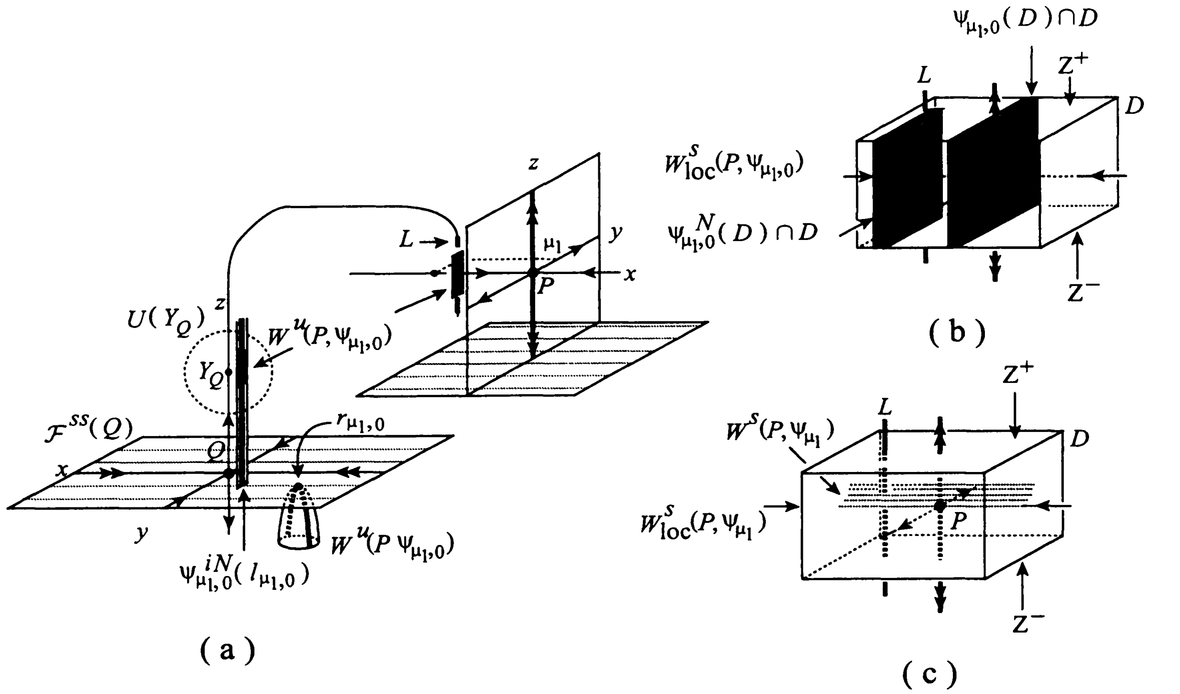


図 9: ブレンダーの構成と distinctive 性

$\eta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $\nu \in [-\eta, \eta]$ に対して，$l_{\mu_1,\nu} \subset U(l_{\mu_1,0})$ と $r_{\mu_1,\nu} \subset U(r_{\mu_1,0})$ となるようにできる．ある $\nu \in [-\eta, \eta] \setminus \{0\}$ に対して，次の条件が成り立つ．

- 共通部分 $A_{\mu_1,\nu} = S^s_{\psi_{\mu_1,\nu}} \cap S^u_{\psi_{\mu_1,\nu}}$ は円周になる．ここで，$S^s_{\psi_{\mu_1,\nu}}$ と $S^u_{\psi_{\mu_1,\nu}}$ はそれぞれ $S^s_{\varphi}$ と $S^u_{\varphi}$ の continuation である．
- ブレンダー $\Lambda(\psi_{\mu_1,0})$ の $C^1$ ロバスト性より，$\psi_{\mu_1,\nu}$ もブレンダー $\Lambda(\psi_{\mu_1,\nu}) = \Lambda(\psi_{\mu_1,0})$ をもつ．

図 10(a) のように $\Pi(\psi_{\mu_1,\nu}) = S^u_{\psi_{\mu_1,\nu}} \cap U(A_{\mu_1,\nu})$ がシリンダーになるような $A_{\mu_1,\nu}$ の近傍 $U(A_{\mu_1,\nu})$ が存在する．

$L \subset W^u(Q, \psi_{\mu_1,\nu})$ は $D$ において $W^s_{\mathrm{loc}}(P, \psi_{\mu_1,\nu})$ の右側にある縦線分なので，図 10(b) のように $L$ の任意の近傍 $U(L) \subset U(P)$ に対して，次をみたす整数 $n > 0$ が存在する．

- $\mathfrak{T}_{\mu_1} \circ \psi^n_{\mu_1,\nu}(\Pi(\psi_{\mu_1,\nu})) \cap D$ は $U(L)$ に含まれる．
- $\mathfrak{T}_{\mu_1} \circ \psi^n_{\mu_1,\nu}(\Pi(\psi_{\mu_1,\nu}))$ は図 10(b) のように $Z^+$，$Z^-$ と横断的に交わっている．

ここで $\Pi(\psi_{\mu_1,\nu}) \subset W^u(P, \psi_{\mu_1,\nu})$ はシリンダーと微分同相なので，$\mathfrak{T}_{\mu_1} \circ \psi^n_{\mu_1,\nu}(\Pi(\psi_{\mu_1,\nu}))$ もシリンダーと微分同相である．また，$\mathfrak{T}_{\mu_1} \circ \psi^n_{\mu_1,\nu}(\Pi(\psi_{\mu_1,\nu}))$ が $L$ にいくらでも近いということから，ブレンダーの distinctive proparty が成立している $D$ の右側にある．このことから，$\mathfrak{T}_{\mu_1} \circ \psi^n_{\mu_1,\nu}(\Pi(\psi_{\mu_1,\nu})) \subset W^u(P, \psi_{\mu_1,\nu})$ と $w^s(P, \psi_{\mu_1,\nu})$ が接点をもつことがわかる．よって $\psi_{\mu_1,\nu}$ のホモクリニック接触の存在が示される（詳しい証明は [Ni] を参照）．

このとき，ブレンダーの $C^1$ ロバスト性に注意すると，$\psi_{\mu_1,\nu}$ の $C^1$ 近傍 $U(\psi_{\mu_1,\nu})$ に含まれる任意の微分同相写像 $\tilde{\psi}$ に対して，ブレンダー $\Lambda(\tilde{\psi})$ が存在する．これより，任意の $\tilde{\psi} \in \mathcal{U}(\psi_{\mu_1,\nu})$ に対して，$\Lambda(\tilde{\psi})$ はホモクリニック接触を持つことがわかる．

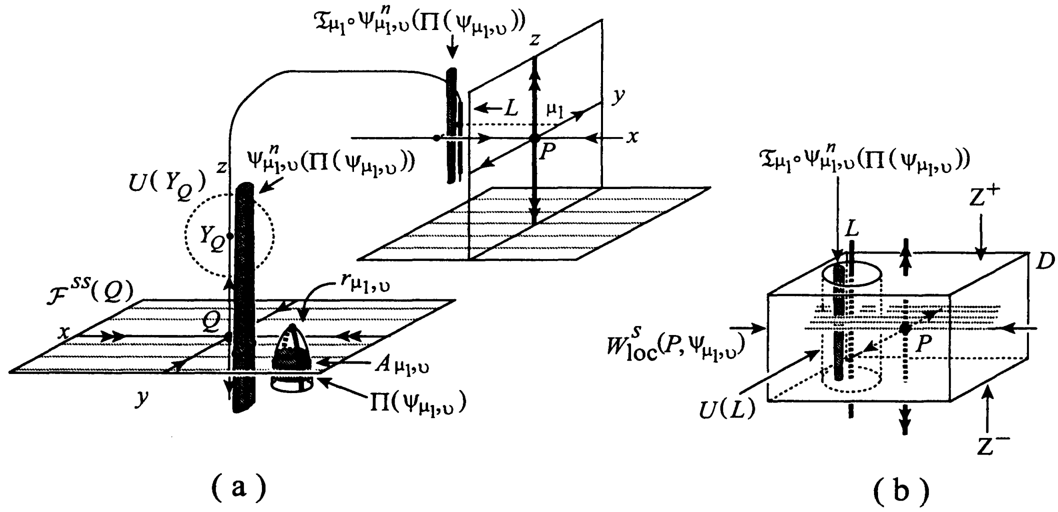

図 10: $C^1$ ロバストなホモクリニック接触の構成

## 参考文献


[A] M. Asaoka, Hyperbolic sets exhibiting $C^1$-persistent homoclinic tangency for higher dimensions, *Proc. Am. Math. Soc.* **136** (2008), no 2, 677–686

[BD] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Robust heterodimensional cycles and $C^1$-generic dynamics, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, **7**(3) (2008), 469–525.

[D] L. J. Díaz, Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **15**(1995), 291–315.

[DNP] L. J. Diaz, A. Nogueira and E. R. Pujals, Heterodimensional tangencies, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2543–2566.

[DR] L. J. Díaz and J. Rocha, Non-connected heterodimensional cycles: bifurcation and stability, *Nonlinearity*, **5** (1992), 1315–1341.

[KKL] S. Kiriki, H. Kokubu, and M-C. Li, An index changing bifurcation creating heterodimensional cycles, *preprint*.

[KNS] S. Kiriki, Y. Nishizawa, and T. Soma, Heterodimensional Tangencies on cycles Leading To Strange Attractors, to appear in *Discreat Contin. Dynam. Syst.*

[L] B. Leal, High dimension diffeomorphisms exhibiting infinitely many strange attractors, *Ann. I. H. Poincaré*, **25** (2008), 587–607.

[Ne] S. E. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 101–151.

[Ni] Y. Nishizawa, Heterodimensional tangencies leading to $C^1$-robust homoclinic tangencies, in preparation.

[PV] J. Palis and M. Viana, High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors, *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), 207–250.

[P] J. Palis, A global perspective for non-conservative dynamics, *Ann. I. H. Poincaré*, **22** (2005), 485–507.

[R] C. Robinson, Bifurcation to infinitely many sinks, *Commun. Math. Phys.*, **90** (1983), 433–459.

[R] N. Romero, Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **15** (1995), no. 4, 735–757.

[V] M. Viana, Strange attractors in higher dimensions, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **24** (1993), 13–62.