

An algorithm which generates standard tableaux  
 for a shifted Young diagram with uniform probability

KENTO NAKADA

1. この研究の背景と目的

B. E. Sagan は論文 [10] において, shifted shape のフック公式の証明として, ある確率的なアルゴリズム (2.1 節を参照) を用いたものを提示した. このアルゴリズムは, shifted shape  $S$  の標準盤  $T$  を確率

$$\text{Prob}_S(T) = \frac{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}{\#S!}$$

で生成する. ここで,  $H_S(v)$  は  $S$  における  $v$  のフックである (2.1 節参照). 右辺は  $T$  に依存していないことから, 標準盤の総数がその逆数で与えられる:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}.$$

岡村 [9], 仲田-岡村 [8] は, この結果を, simply-laced な Kac-Moody Lie 代数上の一般化されたヤング図形に対して拡張した. 一般されたヤング図形としての shifted shape は  $D$  型の Lie 代数上で実現される. Sagan による shifted shape の場合の証明は組み合わせ論的なものであったが, [9] は Sagan の手法を踏襲する場合分け, [8] は colored hook formula [5] を用いることでなされる.

この研究の目的は, この結果を simply-laced でない場合に考察することである. simply-laced でない場合の一般化されたヤング図形は, J. R. Stembridge によって分類されており [12], 本稿の主結果は,  $B$  型の場合である.  $B$  型の一般化されたヤング図形は, 図形としては shifted shape になる. しかし,  $D$  型 Lie 代数上の shifted shape と  $B$  型 Lie 代数上の shifted shape では, フックの形状が異なる. 上で述べたアルゴリズムはフックの形状に依存するので, 本稿で考えるアルゴリズム (2.2 節を参照) は Sagan のそれとは異なる.

2. SHIFTED SHAPE と結果の比較

**Definition 2.1.** 集合  $S := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq j\}$  に 次の順序を入れたものを考える:

$$(i, j) \leq (i', j') \iff i \geq i' \text{ and } j \geq j'.$$

$S$  の finite order filter  $S$  を shifted shape と呼ぶ.

本稿では, shifted shape を描くとき, 箱ではなく node を用いることにする (FIGURE 2.1):

**Definition 2.2.**  $S$  を shifted shape とする ( $\#S = d$ ). 全単射  $L : \{1, \dots, d\} \rightarrow S$  は

$$L(k) \leq L(l) \implies k \leq l, \quad (1 \leq k, l \leq d)$$

を満たすとき,  $S$  の標準盤と呼ばれる.  $S$  の標準盤の全体を  $\text{STab}(S)$  と書く.

**Remark 2.3.** 上の標準盤の定義では, label の入れ方が通常と逆になっているが, ここでは便宜上このように定義する.

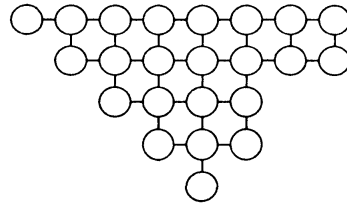


FIGURE 2.1. a shifted shape

### 2.1. Sagan の結果 (standard hooks の場合).

**Definition 2.4.**  $S$  を shifted shape,  $v = (i, j) \in S$  とする. このとき,  $S$  の部分集合  $H_S(v)$  を次で定義する:

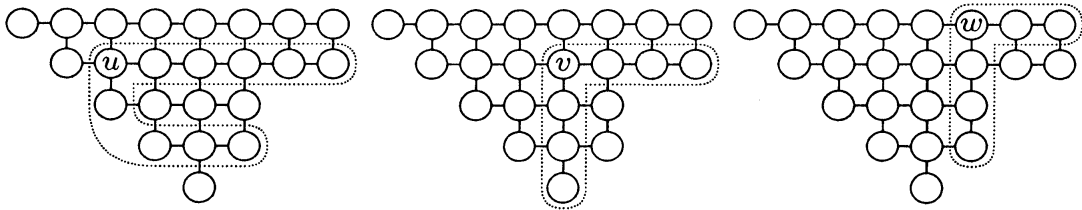
$$\text{Arm}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$\text{Leg}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i < i' \text{ and } j = j' \}.$$

$$\text{Tail}_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid j + 1 = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$H_S(v) := \{v\} \sqcup \text{Arm}_S(v) \sqcup \text{Leg}_S(v) \sqcup \text{Tail}_S(v).$$

集合  $H_S(v)$  を  $S$  における  $v$  の hook と呼ぶ (FIGURE 2.2).  $H_S(v)^+ := H_S(v) \setminus \{v\}$  とおく.

FIGURE 2.2. Hooks of  $u$ ,  $v$ , and  $w$ .

Sagan が提示したアルゴリズムは以下である. 以下,  $S$  を shifted shape とする ( $\#S = d$ ).

GNW1. Set  $i := 0$  and set  $S_0 := S$ .

GNW2. (いま,  $S_i$  は  $d - i$  個の nodes を持っている.) Set  $j := 1$  and pick a node  $v_1 \in S_i$  with the probability  $1/(d - i)$ .

GNW3. If  $\#H_{S_i}(v_j)^+ \neq 0$ , pick a node  $v_{j+1} \in H_{S_i}(v_j)^+$  with the probability  $1/\#H_{S_i}(v_j)^+$ . If not, go to GNW5.

GNW4. Set  $j := j + 1$  and return to GNW3.

GNW5. (いま,  $\#H_{S_i}(v_j)^+ = 0$  である.) Set  $L(i + 1) := v_j$  and set  $S_{i+1} := S_i \setminus v_j$  ( $S$  から node  $v_j$  を取り除いた shape).

GNW6. Set  $i := i + 1$ . If  $i < d$ , return to GNW2; if  $i = d$ , terminate.

このアルゴリズムが終了するとき,  $S$  の nodes の列  $(L(1), L(2), \dots, L(d))$  が得られる. 列  $L = (L(1), L(2), \dots, L(d))$  が得られる確率を  $\text{Prob}_S(L)$  と書く.  $L$  は, アルゴリズムの定義から  $S$  の標準盤になっている. このとき, Sagan は次の定理を示した:

**Theorem 2.5** (Sagan [10]).  $S$  を shifted shape,  $L \in \text{STab}(S)$  とする. このとき,

$$\text{Prob}_S(L) = \frac{\prod_{v \in S} \#H_S(v)}{\#S!}.$$

ここで、右辺は  $L$  に依存していないことから、標準盤の総数はその逆数で与えられる:

**Corollary 2.6.**  $S$  を *shifted shape* とすると、次が成り立つ:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#\text{H}_S(v)}.$$

**Remark 2.7.** これは *shifted shape* の *hook formula* として知られている公式である [13].

2.2. 本稿の結果 (**non-standard hooks** の場合). この小節では, *shifted shape* に対して, 前小節とは異なる *hook* を定義する.

**Definition 2.8.**  $S$  を *shifted shape*,  $v = (i, j) \in S$  とする. このとき,  $S$  の (多重) 部分集合  $\text{H}'_S(v)$  を次で定義する:

$$\text{Arm}'_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i = i' \text{ and } j < j' \}.$$

$$\text{Leg}'_S(v) := \{ (i', j') \in S \mid i < i' \text{ and } j = j' \}.$$

$$\text{Tail}'_S(v) := \begin{cases} \{ (i', j') \in S \mid j = i' \text{ and } j < j' \} & \text{if } i < j \text{ and } (j, j) \in S, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{H}'_S(v) := \{v\} \sqcup \text{Arm}'_S(v) \sqcup \text{Leg}'_S(v) \sqcup \text{Tail}'_S(v).$$

ただし,  $i < j$  and  $(j, j) \in S$  の場合,  $\text{Leg}'_S(v)$  と  $\text{Tail}'_S(v)$  はともに  $(j, j)$  を元に持つが, このときは多重集合としての和集合として考える ( $(j, j)$  を多重度 2 で持つ). 多重集合  $\text{H}'_S(v)$  を  $S$  における  $v$  の *non-standard hook* と呼ぶ (FIGURE 2.3).  $\text{H}'_S(v)^+ := \text{H}'_S(v) \setminus \{v\}$  とおく.

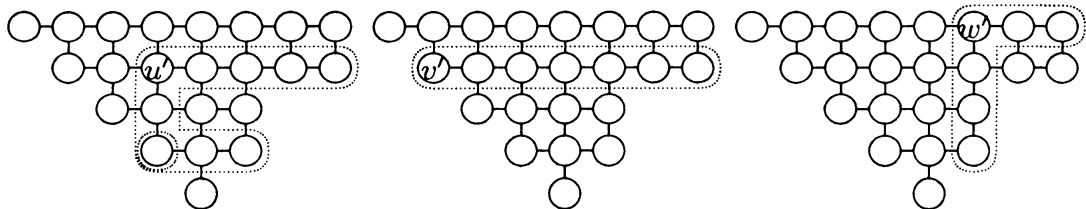


FIGURE 2.3. Hooks of  $u'$ ,  $v'$ , and  $w'$ .

本稿で提示するアルゴリズムは以下である. 以下,  $S$  を *shifted shape* とする ( $\#S = d$ ).

GNW1. Set  $i := 0$  and set  $S_0 := S$ .

GNW2. (いま,  $S_i$  は  $d - i$  個の nodes を持っている.) Set  $j := 1$  and pick a node  $v_1 \in S_i$  with the probability  $1/(d - i)$ .

GNW3. If  $\#\text{H}'_{S_i}(v_j)^+ \neq 0$ , pick a node  $v_{j+1} \in \text{H}'_{S_i}(v_j)^+$  with the probability (multiplicity of  $v_j$ )/ $\#\text{H}'_{S_i}(v_j)^+$ . If not, go to GNW5.

GNW4. Set  $j := j + 1$  and return to GNW3.

GNW5. (いま,  $\#\text{H}'_{S_i}(v_j)^+ = 0$  である.) Set  $L(i + 1) := v_j$  and set  $S_{i+1} := S_i \setminus v_j$  ( $S$  から node  $v_j$  を取り除いた shape).

GNW6. Set  $i := i + 1$ . If  $i < d$ , return to GNW2; if  $i = d$ , terminate.

このアルゴリズムが終了するとき,  $S$  の nodes の列  $(L(1), L(2), \dots, L(d))$  が得られる. 列  $L = (L(1), L(2), \dots, L(d))$  が得られる確率を  $\text{Prob}'_S(L)$  と書く.  $L$  は, アルゴリズムの定義から  $S$  の標準盤になっている. このとき, 次が本稿の主定理である:

**Theorem 2.9** ([7]).  $S$  を *shifted shape*,  $L \in \text{STab}(S)$  とする. このとき,

$$\text{Prob}'_S(L) = \frac{\prod_{v \in S} \#H'_S(v)}{\#S!}.$$

ここで, 右辺は  $L$  に依存していないことから, 標準盤の総数とその逆数で与えられることが従う:

**Corollary 2.10.**  $S$  を *shifted shape* とすると, 次が成り立つ:

$$\#\text{STab}(S) = \frac{\#S!}{\prod_{v \in S} \#H'_S(v)}.$$

**Remark 2.11.** これは, 通常よく知られる *shifted shape* の *hook formula* (Corollary 2.6) とは表面上異なるが, 本質的には同じものである. それは,  $S$  から  $S$  自身への全単射  $\varphi: S \rightarrow S$  で,  $\#H_S(v) = \#H'_S(\varphi(v))$  が存在することから分かる. ここでは詳細は省略するが, 具体的には, FIGURE 2.2 における  $u, v, w$  と FIGURE 2.3 における  $u', v', w'$  は  $\varphi(u) = u'$ ,  $\varphi(v) = v'$ ,  $\varphi(w) = w'$  という関係で結ばれている.

### 3. SHIFTED SHAPE の $B$ 型 COROOT SYSTEM による実現

この節では, 定理 2.9 を証明する際に用いるいくつかの命題を紹介する. 定義していない用語に関しては [3][4] を参照のこと.

$W = \langle s_0, s_1, \dots, s_{l-1} \rangle$  を  $B_l$  型 Weyl 群とする. ここで, index は次の Dynkin diagram で入れる:

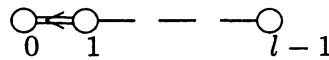


FIGURE 3.1. Dynkin diagram of type  $B_l$

$\mathfrak{h}$  を  $B_l$  型 Lie 代数の Cartan subalgebra とすると,  $W$  は  $\mathfrak{h}^*$  に,

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

で作用している. ただし,  $\alpha_i$  は simple root,  $\alpha_i^\vee$  は simple coroot ( $i = 0, 1, \dots, l-1$ ).

$\Lambda_0$  を index 0 に対応する fundamental weight とする. このとき,

**Proposition 3.1.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  とすると,

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta^\vee \in \Phi_+^\vee$$

が成り立つ. ここで,  $\Phi_+^\vee$  は *positive coroot* の集合である.

**Definition 3.2.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  とする.  $\Phi_+^\vee$  の部分集合  $D(\lambda)^\vee$  を次で定義する:

$$D(\lambda)^\vee := \{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \}.$$

**Proposition 3.3.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  とする. このとき,  $D(\lambda)^\vee$  は *coroot* の *ordinary order* で, ある *shifted shape* と順序同型である. また, 任意の *shifted shape* は十分大きい  $l$  に対して  $D(\lambda)^\vee$  として実現する.

**Remark 3.4.** *infinite rank* になってしまうが,  $B_\infty$  型 Dynkin diagram を用いれば,  $W\Lambda_0 \ni \lambda \mapsto D(\lambda)^\vee \in \{\text{shifted shapes}\}$  は全単射である.

**Definition 3.5.**  $\lambda \in W\Lambda_0$ ,  $\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee$  とする. このとき,  $D(\lambda)^\vee$  の多重部分集合  $H'_\lambda(\beta^\vee)$  を次で定義する:

$$H'_\lambda(\beta^\vee) := \{ \gamma^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \gamma^\vee \leq \beta^\vee \text{ and } \langle \beta, \gamma^\vee \rangle \geq 1 \}.$$

ただし,  $\beta^\vee \in H'_\lambda(\beta^\vee)$  の多重度は 1,  $\gamma^\vee \in H'_\lambda(\beta^\vee) \setminus \{\beta^\vee\}$  の多重度は  $\langle \beta, \gamma^\vee \rangle$  とする.

このとき, 2.2 節で定義した non-standard hook と上で定義した hook は一致する.

**Lemma 3.6.**  $\lambda \in W\Lambda_0$ ,  $\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee$  とする. このとき,

$$\#H'_\lambda(\beta^\vee) = \text{ht}(\beta)$$

が成り立つ. ただし, 左辺は多重度を込めて数える. 右辺は root  $\beta$  の height である.

**Definition 3.7.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  とする.  $d := \#D(\lambda)^\vee$  とおく. simple coroot の列  $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$  で,

$$\alpha_{i_k}^\vee \in D(s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(\lambda))^\vee \cap \Pi^\vee, \quad k = 1, \dots, d,$$

を満たすものの全体を  $M\text{Path}(\lambda)^\vee$  と書く.

**Proposition 3.8** ([6]).  $\lambda \in W\Lambda_0$  とし,  $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \in M\text{Path}(\lambda)^\vee$  とする. このとき,  $\gamma_k^\vee := s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}^\vee)$  とおくと ( $k = 1, \dots, d$ ),  $(\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_d^\vee) \in \text{STab}(D(\lambda)^\vee)$  である. また, 対応  $M\text{Path}(\lambda) \ni (\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \mapsto (\gamma_1^\vee, \dots, \gamma_d^\vee) \in \text{STab}(D(\lambda)^\vee)$  は全単射である.

#### 4. アルゴリズムと KEY LEMMA

改めて 3.2 節で考えたアルゴリズムを, 今度は 2 段階に分けて提示する:

**4.1. Algorithm A1.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  は  $D(\lambda)^\vee \neq \emptyset$  とする. 次のアルゴリズムを考える (algorithm A1):

- A1-1. Set  $j := 1$  and pick an element  $\beta_j^\vee \in D(\lambda)^\vee$  with the probability  $\frac{1}{\#D(\lambda)^\vee}$ .
- A1-2. If  $\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) > 1$ , pick an element  $\beta_{j+1}^\vee \in H'_\lambda(\beta_j^\vee) - \{\beta_j^\vee\}$  with the probability  $\frac{\langle \beta_j, \beta_{j+1}^\vee \rangle}{\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) - 1}$ . If not, then output  $\beta_j^\vee$  and terminate.
- A1-3. Set  $j := j + 1$  and return to A1-2.

アルゴリズム A1 が終了すると,  $\beta_j^\vee \in D(\lambda)^\vee$  such that  $\#H'_\lambda(\beta_j^\vee) = 1$  が確率的に得られる. Lemma 3.6 より, この  $\beta_j^\vee$  は simple coroot である. つまり, アルゴリズム A1 は simple coroot  $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$  を確率的に出力するアルゴリズムである.  $\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee)$  で  $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$  を出力する確率を表す. また,  $\beta^\vee \triangleright \gamma^\vee$  で,  $\beta^\vee > \gamma^\vee$  and  $\langle \beta, \gamma^\vee \rangle \geq 1$  を表すことにする.

アルゴリズム A1 の定義と Lemma 3.6 からただちに次を得る.

**Lemma 4.1.**  $\lambda \in W\Lambda_0$ ,  $d := \#D(\lambda)^\vee$ ,  $D(\lambda)^\vee \neq \emptyset$ ,  $\alpha_i^\vee \in D(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$  とする. このとき次が成り立つ:

$$\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{\beta_l^\vee \triangleright \beta_{l-1}^\vee \triangleright \cdots \triangleright \beta_1^\vee \triangleright \alpha_i^\vee \\ \beta_k^\vee \in D(\lambda)^\vee, l \geq 0}} \frac{\langle \beta_l, \beta_{l-1}^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_l) - 1} \frac{\langle \beta_{l-1}, \beta_{l-2}^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_{l-1}) - 1} \cdots \frac{\langle \beta_1, \alpha_i^\vee \rangle}{\text{ht}(\beta_1) - 1}$$

4.2. **Algorithm A2.** Let  $\lambda \in P_{\geq -1}^{\text{fin}}$ . We consider the following algorithm (algorithm A2):

A2-1. Set  $k := 0$  and set  $\lambda_0 := \lambda$ .

A2-2. If  $D(\lambda_k) \neq \emptyset$ , run the algorithm A1 for  $\lambda_k$  and set  $\alpha_i$  be a random output. If not, terminate.

A2-3. (Now  $\alpha_i \in D(\lambda_k) \cap \Pi$ .) Set  $\alpha_{i_{k+1}} := \alpha_i$  and set  $\lambda_{k+1} := s_i(\lambda_k)$ .

A2-4. Set  $k := k+1$ . If  $k < \#D(\lambda)$ , return to A2-2; if  $k = \#D(\lambda)$ , then terminate.

アルゴリズム A2 が終了したとき, simple coroot の列  $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$  が確率的に得られる. アルゴリズムの定義より,  $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee) \in \text{MPath}(\lambda)^\vee$  である. アルゴリズム A2 が  $(\alpha_{i_1}^\vee, \dots, \alpha_{i_d}^\vee)$  を出力する確率を  $\text{Prob}_\lambda(\mathcal{B})$  と書く.

アルゴリズム A2 の定義より正に次を得る:

**Lemma 4.2.**  $\lambda \in W\Lambda_0$  とする.  $d := \#D(\lambda)$  とおく.  $\mathcal{B} = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \in \text{MPath}(\lambda)$ . Then we have:

$$\text{Prob}_\lambda(\mathcal{B}) = \prod_{k=1}^d \text{prob}_{s_{i_{k-1}} \dots s_{i_1}(\lambda)}(\alpha_{i_k}).$$

4.3. **Key Lemma.** 主定理の証明には次の補題が本質的である.

**Lemma 4.3** ([7]).  $\lambda \in W\Lambda_0$  とすると, 次が成り立つ:

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{\beta_l^\vee \triangleright \beta_{l-1}^\vee \triangleright \dots \triangleright \beta_1^\vee \triangleright \alpha_i^\vee \\ \beta_k^\vee \in D(\lambda)^\vee, l \geq 0}} \frac{\langle \beta_l, \beta_{l-1}^\vee \rangle \alpha_i \langle \beta_{l-1}, \beta_{l-2}^\vee \rangle \alpha_i \dots \langle \beta_1, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i}{\beta_l - \alpha_i \beta_{l-1} - \alpha_i \dots \beta_1 - \alpha_i} = \prod_{\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee \setminus \{\alpha_i^\vee\}} \frac{\beta}{s_i(\beta)}$$

ただし, ここで両辺は, 各 simple root  $\alpha_i$  を不定元とみた有理式として考えている.

**Remark 4.4.** [8] では, この (4.1) を証明するために *colored hook formula* を用いる. しかし, 今回の場合は左辺分子の係数に 2 が表れるため, *colored hook formula* を用いることができない. 式 (4.1) の証明は *colored hook formula* の証明をまねて行われる [7].

Lemma 4.3 において,  $\alpha_i \rightarrow 1$  ( $i = 0, 1, \dots, l-1$ ) とすると, Lemma 3.6, Lemma 4.1 より,

$$\text{prob}_\lambda(\alpha_i^\vee) = \frac{1}{d} \prod_{\beta^\vee \in D(\lambda)^\vee \setminus \{\alpha_i^\vee\}} \frac{\text{ht}(\beta)}{\text{ht}(s_i(\beta))}$$

が得られる. この式を Lemma 4.2 に代入し, あとは simply-laced の場合と同様の手法 [8][9] で主定理が得られる.

## REFERENCES

- [1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties, and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.
- [3] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [4] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.
- [5] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, Osaka J. of Math. Vol. **54** No. **4** (2008), 1085-1120.
- [6] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram*, preprint.

- [7] K. Nakada, *Another proof of hook formula for a shifted Young diagram*, in preparation.
- [8] K. Nakada, and S. Okamura, *Uniform generation of standard tableaux of a generalized Young diagram*, preprint.
- [9] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.
- [10] B. E. Sagan, *On selecting a random shifted Young tableaux*, J. Algorithm **1** (1980), 213-234.
- [11] R. P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **No. 119** (1972).
- [12] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), 722-743.
- [13] R. M. Thrall, *A combinatorial problem*, Mich.Math.J. **1** (1952), 81-88.

WAKKANAI HOKUSEI GAKUEN UNIVERSITY, FACULTY OF INTEGRATED MEDIA.

*E-mail address:* nakada@wakhok.ac.jp