

(q, t) -Deformations of Multivariate Hook Product Formulae

名古屋大学多元数理科学研究科
 岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1 はじめに

分割とは、非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で 0 でない成分が高々有限個しかないようなもののことである。分割 λ に対して、 $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$, $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \neq 0\}$ とおき、それぞれ λ の大きさ、長さという。分割 λ の Young 図形 (Ferrers 図形) を

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{P}^2 : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

(ここで、 \mathbb{P} は正整数全体のなす集合である) とおいて定義する。点の代わりに単位正方形 (箱と呼ぶ) をおいて表すことが多い。例えば、

$$D(4, 3, 1) = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \square & & & \end{array}$$

と表される。 $D(\lambda)$ を枠とする標準盤 (standard tableau) とは、 λ の Young 図形の箱に $1, 2, \dots, n$ (ただし $n = |\lambda|$) の数字を 1 つずつ書き込んだもの (つまり、全単射 $T : D(\lambda) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$) であって、各行、各列が単調減少であるようなものである。例えば、

$$T = \begin{array}{cccc} 8 & 6 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & \\ 5 & & & \end{array}$$

は $D(4, 3, 1)$ を枠とする標準盤である。 $D(\lambda)$ を枠とする標準盤全体の集合を $\text{STab}(\lambda)$ と表すことにする。

分割 λ の Young 図形の各箱 $v = (i, j) \in D(\lambda)$ に対して、 $D(\lambda)$ の部分集合

$$H_{D(\lambda)}(i, j) = \{(i, j)\} \cup \{(i, l) \in D(\lambda) : l > j\} \cup \{(k, j) \in D(\lambda) : k > i\}$$

を v における鉤 (hook) といい、 $h_{D(\lambda)}(v) = \#H_{D(\lambda)}(v)$ を鉤の長さ (hook length) という。このとき、標準盤の個数は鉤の長さを用いて次のように表される。

定理 1.1. (Frame–Thrall–Robinson [2]) λ が n の分割であるとき、 $D(\lambda)$ を枠とする標準盤の個数は

$$\#\text{STab}(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{v \in D(\lambda)} h_{D(\lambda)}(v)} \tag{1}$$

で与えられる。

同様の鉤による公式が、逆平面分割に対しても成り立つ。分割 λ が与えられたとき、 $D(\lambda)$ を枠とする逆平面分割 (reverse plane partition) とは、 $D(\lambda)$ の各箱に非負整数を書き込んだもの (つまり、 $D(\lambda)$ から非負整数全体のなす集合 \mathbb{N} への写像 $\sigma : D(\lambda) \rightarrow \mathbb{N}$) であって、各行、各列が広義単調増加となるようなものである。 $|\sigma| = \sum_{(i,j) \in D(\lambda)} \sigma(i,j)$ と表す。例えば、

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

は、 $D(4,3,1)$ を枠とする逆平面分割であり、 $|\sigma| = 12$ である。 $D(\lambda)$ を枠とする逆平面分割全体のなす集合を $\mathcal{A}(D(\lambda))$ と表すことにする。このとき、

定理 1.2. λ を分割とすると、

(a) (Stanley [17]) $D(\lambda)$ を枠とする逆平面分割の母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))} z^{|\sigma|} = \prod_{v \in D(\lambda)} \frac{1}{1 - z^{h_{D(\lambda)}(v)}} \quad (2)$$

で与えられる。

(b) (Gansner [5]) $\mathcal{A}(D(\lambda))$ のトレース母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(D(\lambda))} z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{v \in D(\lambda)} \frac{1}{1 - z[H_{D(\lambda)}(v)]} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、

$$z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} z_{j-i}^{\sigma(i,j)}, \quad z[H_{D(\lambda)}(v)] = \prod_{(i,j) \in H_{D(\lambda)}(v)} z_{j-i}$$

である。

明らかに、(3) においてすべての変数 z_i を z とおくと (2) が得られる。また、Stanley [17] の P -partition の理論を用いると、(2) から (1) が導かれる。

これらの結果は、分割 λ の Young 図形 $D(\lambda)$ だけでなく、ストリクトな分割 μ (つまり、 $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{l(\mu)}$ となる分割) の変形 Young 図形 $S(\mu)$ に対しても成り立つ。 μ の変形 Young 図形 $S(\mu)$ とは

$$S(\mu) = \{(i,j) \in \mathbb{P}^2 : i \leq j \leq \mu_i + i - 1\}$$

で与えられる \mathbb{P}^2 の部分集合であり、例えば、

$$S(4,3,1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

のように表される。 $S(\mu)$ を枠とする標準盤、逆平面分割もまったく同様にして定義され、

$$H_{S(\mu)}(i,j)$$

$$= \{(i, j)\} \cup \{(i, l) \in S(\mu) : l > j\} \cup \{(k, j) \in S(\mu) : k > i\} \cup \{(j+1, l) \in S(\mu) : l > j\}$$

で与えられる変形鉤 $H_{S(\mu)}(i, j)$ を用いることによって、定理 1.1, 1.2 と同様の鉤公式が成立する。(例えば, [5] を見よ.)

さらに, d -complete な半順序集合に対しても, 鉤の概念が拡張され, 定理 1.1, 1.2 と同様の結果が成り立つことが知られている。(例えば, [15], [10], [7], [8] を見よ.)

この報告では, 逆平面分割のトレース母関数を与える Gansner の公式 (3) (とその d -complete な半順序集合への一般化) の (q, t) 変形を考える. つまり, 例えば (3) では右辺の積を

$$\prod_{v \in D(\lambda)} \frac{(tz[H_{D(\lambda)}(v)]; q)_\infty}{(z[H_{D(\lambda)}(v)]; q)_\infty}$$

(ここで, $(a; q)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i)$ である) で置き換えることを考える. この一般化は, Schur 関数から Macdonald 対称関数への一般化に対応している. この方向の一般化としては, 平面分割に関する MacMahon の公式の (q, t) 変形が Vuletić [18] によって与えられている.

以下では, §2 で d -complete な半順序集合に対する鉤公式について説明し, §3 でその (q, t) 変形に対する予想を述べる. §4 では, Macdonald 対称関数を利用して, 分割の Young 図形, ストリクトな分割の変形 Young 図形の場合に §3 の予想の証明 (の概略) を与える.

2 d -complete な半順序集合と鉤公式

d -complete な半順序集合とは, Proctor によって導入された半順序集合のクラスであり, Young 図形 $D(\lambda)$, $S(\mu)$ のもつ鉤公式や, jeu de taquin 性が拡張されている.(詳しくは, [13], [14], [15], [16] を参照されたい.) この節では, d -complete な半順序集合の定義から始めて, その linear extension の個数に関する Peterson の鉤公式 ((1) の一般化), P -partition の多変数母関数に関する Peterson-Proctor の鉤公式 ((3) の一般化) を紹介する.

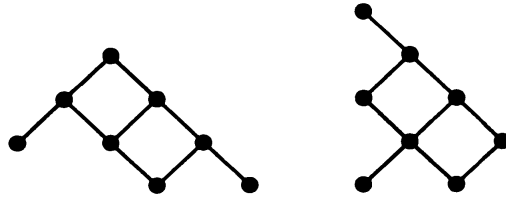
まず, 半順序集合に関する用語を思い出しておく. 半順序集合 P の 2 元 x, y (ただし $x \leq y$) に対して, $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ とおき, この形の P の部分集合を P の区間と呼ぶ. また, $\#[x, y] = 2$ であるとき (つまり, $x < y$ であり, $x < z < y$ となる元 $z \in P$ が存在しないとき), y は x をカバーするという. P の Hasse 図が連結であるとき, P は連結であるという.

P を有限半順序集合とする. $\#P = n$ であるとき, 全単射 $e : P \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ で順序を保つもの (つまり, P において $x \leq y$ ならば $e(x) \leq e(y)$ となるもの) を, P の **linear extension** と呼ぶ. P の linear extension 全体のなす集合を $\mathcal{L}(P)$ と表す. 写像 $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ は, 条件

$$P \text{ において } x \leq y \text{ ならば } \mathbb{N} \text{ において } \sigma(x) \geq \sigma(y)$$

をみたすとき, P -partition であるという. P -partition 全体のなす集合を $\mathcal{A}(P)$ と表すことにする.

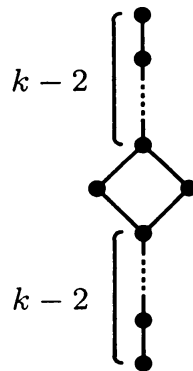
分割 λ の Young 図形 $D(\lambda)$, ストリクトな分割 μ の変形 Young 図形 $S(\mu)$ は, $i \leq k$ かつ $j \leq l$ であるとき $(i, j) \geq (k, l)$ と順序を定義することによって, 半順序集合となる. 例えば, $D(4, 3, 1), S(4, 3, 1)$ の Hasse 図は



のようになる. このとき, $D(\lambda), S(\mu)$ の linear extension, P -partition は, それぞれ $D(\lambda), S(\mu)$ を枠とする標準盤, 逆平面分割に他ならない.

さて, d -complete な半順序集合を定義するために, d_k 区間, d_k^- 区間の概念を定義する.

定義 2.1. 3 以上の整数 k に対して, $2k - 2$ 個の元からなる半順序集合で, 次の Hasse 図をもつものを $d_k(1)$ と表し, **double-tailed diamond** と呼ぶ:



(例えば, $d_3(1)$ は $D(2, 2)$ と, $d_4(1)$ は $S(3, 2, 1)$ とそれぞれ順序同型である.) また, $d_k(1)$ からその最大元を取り除いて得られる半順序集合を $d_k^-(1)$ と表す.

P を半順序集合とする.

- (a) P の区間で $d_k(1)$ と順序同型なものを d_k 区間と呼ぶ.
- (b) $k \geq 4$ のとき, P の区間で $d_k^-(1)$ と順序同型なものを d_k^- 区間と呼ぶ.
- (c) P の 3 個の元 x, y, w からなる部分集合で, x, y がともに w をカバーするようなものを d_3^- 区間と呼ぶ.

注意. 厳密に言えば, d_3^- 区間は半順序集合の区間ではないが, Proctor [13], [14] の用語に従うことにする.

定義 2.2. P を有限半順序集合とする. 次の 3 つの条件 (D1), (D2), (D3) がすべての k に対して成り立つとき, P は d -complete であるという:

- (D1) P の部分集合 I が d_k^- 区間ならば, I の極大元をすべてカバーする元 v で, $I \cup \{v\}$ が d_k 区間となるものが存在する.
- (D2) $I = [w, v]$ が d_k 区間であり, v が u を P においてカバーするならば, $u \in I$ となる.

(D3) I, I' がともに d_k^- 区間であり, w, w' がそれぞれの I, I' の最小元であるとき, $I - \{w\} = I' - \{w'\}$ ならば, $I = I'$ となる.

例 2.3. (a) 根つき木 (rooted tree), つまり, ただ 1 つの極大元をもち Hasse 図にサイクルを含まない連結な半順序集合は, d -complete な半順序集合である.

(b) double-tailed diamond $d_k(1)$ は d -complete な半順序集合である.

(c) 分割 λ の Young 図形 $D(\lambda)$ は d -complete な半順序集合である.

(d) ストリクトな分割 μ の変形 Young 図形 $S(\mu)$ は d -complete な半順序集合である.

連結かつ d -complete な半順序集合については, 次が知られている.

命題 2.4. ([13, §3]) P を連結かつ d -complete な半順序集合とする. このとき,

(a) P はただ 1 つの極大元をもつ.

(b) P は次数つき半順序集合である. つまり, 写像 $r: P \rightarrow \mathbb{N}$ で, y が x をカバーするとき $r(y) = r(x) + 1$ となるようなものが存在する.

定義 2.5. 半順序集合 P に対して,

$$T = \{x \in P : \text{任意の } y \geq x \text{ に対して, } y \text{ をカバーする元は高々 1 個である}\}$$

とおき, P の top tree と呼ぶ. T を P の Hasse 図式の部分グラフ (木となる) とみなす.

補題 2.6. ([14, Proposition 8.6]) P を連結かつ d -complete な半順序集合とし, T をその top tree とする. I を $\#I = \#T$ なる集合とすると, 全単射 $c: T \rightarrow I$ は, 次の 3 つの条件をみたす写像 $c: P \rightarrow I$ に一意的に拡張される:

(C1) x, y が比較不可能ならば, $c(x) \neq c(y)$ である.

(C2) 区間 $[w, v]$ が鎖 (つまり, 全順序集合) ならば, $c(x)$ ($x \in [w, v]$) はすべて相異なる.

(C3) 区間 $[w, v]$ が d_k 区間ならば, $c(w) = c(v)$ である.

このような写像 $c: P \rightarrow I$ を d -complete な彩色と呼ぶ.

例 2.7. (a) 分割 λ の Young 図形 $D(\lambda)$ に対して, その top tree は

$$T = \{(1, 1)\} \cup \{(1, 2), \dots, (1, \lambda_1)\} \cup \{(2, 1), \dots, (l(\lambda), 1)\}$$

であり, $I = \{-l(\lambda) + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \lambda_1 - 1\}$ ととると,

$$c(i, j) = j - i \quad ((i, j) \in D(\lambda))$$

は d -complete な彩色である.

(b) ストリクトな分割 μ (ただし $l(\mu) \geq 2$) の変形 Young 図形 $S(\mu)$ に対して, その top tree は

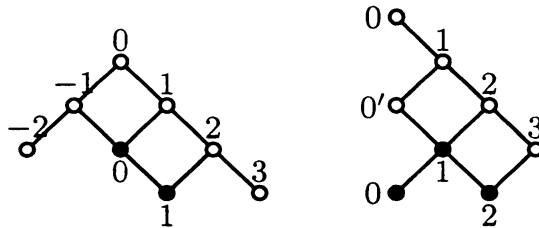
$$T = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, \mu_1)\} \cup \{(2, 2)\}$$

であり, $I = \{0, 0', 1, 2, \dots, \mu_1 - 1\}$ ととると,

$$c(i, j) = \begin{cases} 0 & (i = j \text{ かつ } i \text{ が奇数のとき}) \\ 0' & (i = j \text{ かつ } i \text{ が偶数のとき}) \\ j - i & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

は d -complete な彩色である.

例えば, $D(4, 3, 1), S(4, 3, 1)$ を考えると, 上で与えた d -complete な彩色は下の図のようになる. また, top tree は下の図で \circ で表される元からなる.



次に, d -complete な半順序集合における鉤の長さ, 鍵に付随する単項式を定義する. (鉤自身の定義はここでは省略する.)

定義 2.8. P を連結かつ d -complete な半順序集合とする. $c: P \rightarrow I$ を d -complete な彩色とし, 変数 $z = (z_i)_{i \in I}$ を用意する. このとき, $v \in P$ に付随した整数 $h_P(v)$ と単項式 $z[H_P(v)]$ を次のように帰納的に定義する:

(a) v がどの d_k 区間の最大元にもならないとき,

$$h_P(v) = \#\{w \in P : w \leq v\}, \quad z[H_P(v)] = \prod_{w \leq v} z_{c(w)}.$$

(b) v が d_k 区間 $[w, v]$ の最大元であるとき,

$$h_P(v) = h_P(x) + h_P(y) - h_P(w), \quad z[H_P(v)] = \frac{z[H_P(x)] \cdot z[H_P(y)]}{z[H_P(w)]}.$$

ここで, x, y は d_k 区間 $[w, v]$ において比較不可能な 2 元である.

このとき, 鉤公式は次のように与えられる.

定理 2.9. (Peterson) P を連結かつ d -complete な半順序集合とし, $\#P = n$ とする. このとき, P の linear extension の個数は

$$\#\mathcal{L}(P) = \frac{n!}{\prod_{v \in P} h_P(v)} \quad (4)$$

で与えられる.

定理 2.10. (Peterson-Proctor) P を連結かつ d -complete な半順序集合, $c: P \rightarrow I$ を d -complete な彩色とし, 変数 $z = (z_i)_{i \in I}$ を用意する. このとき, P -partition の多変数母関数は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} z^\sigma = \prod_{v \in P} \frac{1}{1 - z[H_P(v)]} \quad (5)$$

で与えられる。ここで、 $\sigma \in \mathcal{A}(P)$ に対して、

$$z^\sigma = \prod_{v \in P} z_{c(v)}^{\sigma(v)}$$

である。

注意. 定理 2.9 は 1989 年頃の Peterson による結果であるということだが、現在に至るまで Peterson 自身の論文は未発表のままである。また、定理 2.10 についても、Proctor のウェブページ [15] で触れられているだけであり、定式化、証明についての論文は未発表である。現在では、定理 2.9 には岡村 [10] による確率論的証明と仲田 [7] による代数的証明があり、定理 2.10 には仲田 [8] による代数的な証明がある。

3 予想

この節では、Peterson-Proctor の鉤公式 (5) の (q, t) 変形を考える。以下、 q, t を不定元とする。非負整数 n, m に対して、

$$f_{q,t}(n; m) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1 - q^i t^{m+1}}{1 - q^{i+1} t^m}$$

とおく。

定義 3.1. P を連結かつ d -complete な半順序集合とし、 v_0 をその最大元、 $r: P \rightarrow \mathbb{N}$ を次数関数とする。 T を P の top tree とし、 $c: P \rightarrow T$ を d -complete な彩色で $c(v) = v$ ($v \in T$) となるものとする。 P -partition $\sigma \in \mathcal{A}(P)$ に対して、その重み $W_P(\sigma; q, t)$ を

$$W_P(\sigma; q, t) = \frac{\prod_{\substack{x, y \in P \\ \text{s.t. } x < y, c(x) \sim c(y)}} f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); d(x, y)) \prod_{\substack{x \in P \\ \text{s.t. } c(x) = v_0}} f_{q,t}(\sigma(x); e(x, v_0))}{\prod_{\substack{x, y \in P \\ \text{s.t. } x < y, c(x) = c(y)}} f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y)) f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y) - 1)} \quad (6)$$

とおいて定義する。ここで、 T において $c(x)$ と $c(y)$ が隣接しているとき $c(x) \sim c(y)$ と表し、

$$d(x, y) = \frac{r(y) - r(x) - 1}{2}, \quad e(x, y) = \frac{r(y) - r(x)}{2}$$

である。 $(c(x) \sim c(y))$ ならば $r(y) - r(x)$ は奇数であり、 $c(x) = c(y)$ ならば $r(y) - r(x)$ は偶数である。

例 3.2. (a) $P = D(3, 3)$ のとき、つまり、 $D(3, 3)$ を枠とする逆平面分割のときの重みは、

$$\begin{aligned} W_{D(3,3)} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline \end{array}; q, t \right) \\ = f_{q,t}(a - 0; 0) \times f_{q,t}(b - a; 0) \times f_{q,t}(c - b; 0) \times f_{q,t}(d - a; 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{f_{q,t}(e-b;0)f_{q,t}(e-d;0)f_{q,t}(e-0;1)}{f_{q,t}(e-a;0)f_{q,t}(e-a;1)} \\ & \times \frac{f_{q,t}(f-c;0)f_{q,t}(f-e;0)f_{q,t}(f-a;1)}{f_{q,t}(f-b;0)f_{q,t}(f-b;1)} \end{aligned}$$

で与えられる.

(b) $P = S(3, 2, 1)$ のとき, つまり, $S(3, 2, 1)$ を枠とする逆平面分割のときの重みは,

$$\begin{aligned} & W_{S(3,2,1)} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline & d & e \\ \hline & & f \\ \hline \end{array}; q, t \right) \\ & = f_{q,t}(a-0;0) \times f_{q,t}(b-a;0) \times f_{q,t}(c-b;0) \times f_{q,t}(d-b;0) \\ & \times \frac{f_{q,t}(e-c;0)f_{q,t}(e-d;0)f_{q,t}(e-a;1)}{f_{q,t}(e-b;0)f_{q,t}(e-b;1)} \\ & \times \frac{f_{q,t}(f-e;0)f_{q,t}(f-b;1)f_{q,t}(f-0;2)}{f_{q,t}(f-a;1)f_{q,t}(f-a;2)} \end{aligned}$$

で与えられる.

重み $W_P(\sigma; q, t)$ は次のように書き換えることもできる. 半順序集合 P に新たな最大元 $\hat{1}$ を付け加えてできる半順序集合を $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{1}\}$ とし, その top tree を $\hat{T} = T \sqcup \{\hat{1}\}$ とする. すると, \hat{T} において $\hat{1}$ はもとの P の最大元 v_0 のみと隣接している. このとき, (6) で定義した重み $W_P(\sigma; q, t)$ は

$$W_P(\sigma; q, t) = \frac{\prod_{\substack{x, y \in \hat{P} \\ \text{s.t. } x < y, \hat{c}(x) \sim \hat{c}(y)}} f_{q,t}(\hat{\sigma}(x) - \hat{\sigma}(y); d(x, y))}{\prod_{\substack{x, y \in P \\ \text{s.t. } x < y, c(x) = c(y)}} f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y)) f_{q,t}(\sigma(x) - \sigma(y); e(x, y) - 1)}$$

と表すことができる. ここで, $\hat{c}: \hat{P} \rightarrow \hat{T}$, $\hat{\sigma}: \hat{P} \rightarrow \mathbb{N}$ は $\hat{c}(\hat{1}) = \hat{1}$, $\hat{\sigma}(\hat{1}) = 0$ によって与えられる c, σ の拡張である.

予想 3.3. P を連結かつ d -complete な半順序集合とする. 上の記号を用いると,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P)} W_P(\sigma; q, t) z^\sigma = \prod_{v \in P} \frac{(tz[H_P(v)]; q)_\infty}{(z[H_P(v)]; q)_\infty}. \quad (7)$$

まず, $q = t$ のときを考えると, $f_{q,q}(n, m) = 1$, $W_P(\sigma; q, q) = 1$, $(tx; q)_\infty / (x; q)_\infty = 1/(1-x)$ だから, Peterson-Proctor の鉤公式 (5) により $q = t$ のとき予想 3.3 が正しいことがわかる. また, 次の節で示すように, Young 図形 $D(\lambda)$, 変形 Young 図形 $S(\mu)$ の場合にも予想 3.3 は正しい. さらに,

命題 3.4. (岡田 [9]) P が根つき木であるとき, 予想 3.3 は正しい.

命題 3.5. (石川 [4]) $P = d_5(1)$ のとき, 予想 3.3 は正しい.

4 Young 図形, 変形 Young 図形の場合の証明

Macdonald 対称関数を利用すると, Young 図形 $D(\lambda)$, 変形 Young 図形 $S(\mu)$ の場合に予想 3.3 を証明できる. この節ではその証明の概要を説明する. (詳細は [9] を参照されたい.)

- 定理 4.1. (a) (岡田 [9], 足立 [1]) λ を分割とするとき, $P = D(\lambda)$ に対して予想 3.3 が成り立つ.
 (b) (岡田 [9]) μ をストリクトな分割とするとき, $P = S(\mu)$ に対して予想 3.3 が成り立つ.

この定理の証明の 1 つの鍵は, 与えられた枠と profile をもつ逆平面分割の母関数が Macdonald 対称関数 Q_τ を用いて表されること (命題 4.5) である. その証明では, 対称関数環上の作用素を用いるが, アイデアは Okounkov たちの論文 [11], [12] にその原形がある.

ストリクトな分割 μ の変形 Young 図形 $S(\mu)$ 上の写像 $\sigma : S(\mu) \rightarrow \mathbb{N}$ が与えられたとき, k 番目の対角線上に並ぶ成分 $\sigma(1, k+1), \sigma(2, k+2), \dots$ を逆順に読んでできる数列を $\sigma[k]$ と表す. 例えば,

$$\sigma = \begin{array}{cccc} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ & & \boxed{2} & \end{array}$$

のとき,

$$\sigma[0] = (2, 1, 0), \quad \sigma[1] = (2, 0), \quad \sigma[2] = (3, 1), \quad \sigma[3] = (2)$$

である. 特に, $\sigma[0]$ を σ の profile と呼ぶ. $S(\mu)$ を枠とし τ を profile にもつ逆平面分割全体のなす集合を $\mathcal{A}(S(\mu); \tau)$ と表す.

また, 分割 α, β に対して, $\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ となるとき, つまり, 歪 Young 図形 $D(\lambda)/D(\mu)$ が水平帯 (各列に高々箱が 1 つしかない) となるとき, $\alpha \succ \beta$ と表すことにする. このとき,

補題 4.2. 写像 $\sigma : S(\mu) \rightarrow \mathbb{N}$ に対して, 次は同値である:

- (i) σ は逆平面分割である.
- (ii) 各 $\sigma[k]$ は分割であり,

$$\begin{cases} \sigma[k-1] \succ \sigma[k] & (k \text{ が } \mu \text{ の成分であるとき}) \\ \sigma[k-1] \prec \sigma[k] & (k \text{ が } \mu \text{ の成分でないとき}) \end{cases}$$

が成り立つ.

Macdonald 対称関数の定義を思い出そう. (詳細は [6, Chap. VI] を参照されたい.) 不定元 q, t を含む体 F 上の対称関数環を Λ とし, Λ 上の内積を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-t^{\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}}$$

(ただし, p_λ はべき和対称関数であり, $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ のとき $z_\lambda = \prod_i i^{m_i} i!$ である) によって定義する. このとき, Macdonald 対称関数 $P_\lambda = P_\lambda(X; q, t)$ は次の 2 つの条件で特徴付けられる:

(i) P_λ は単項対称関数 m_μ の線型結合として, $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda, \mu} m_\mu$ ($u_{\lambda, \mu} \in F$) の形に表される.

(ii) $\lambda \neq \mu$ ならば, $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = 0$.

内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する $\{P_\lambda\}$ の双対基底を $\{Q_\lambda = Q_\lambda(X; q, t)\}$ とする:

$$\langle P_\lambda, Q_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}.$$

次に, 対称関数環 Λ 上の作用素を考える. 非負整数 k に対して, $g_k = Q_{(k)}$ とおき, g_k による掛け算作用素を g_k^+ , その随伴作用素を g_k^- と表す. つまり, $f, h \in \Lambda$ に対して,

$$g_k^+(h) = hg_k, \quad \langle g_k^-(h), f \rangle = \langle h, g_k f \rangle.$$

そして, 母関数

$$G^+(u) = \sum_{k \geq 0} g_k^+ u^k, \quad G^-(u) = \sum_{k \geq 0} g_k^- u^k$$

を考える. また, 線型作用素 $D(z) : \Lambda \rightarrow \Lambda$ を

$$D(z)P_\lambda = z^{|\lambda|} P_\lambda$$

によって定義する. このとき, Macdonald 対称関数に対する Pieri の公式 [6, Chap. VI, (6.24)] は, 次のように述べることができる:

補題 4.3.

$$G^+(u)P_\beta = \sum_{\alpha > \beta} \varphi_{\alpha, \beta}^+(q, t) u^{|\alpha| - |\beta|} P_\alpha,$$

$$G^-(u)P_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \varphi_{\beta, \alpha}^-(q, t) u^{|\alpha| - |\beta|} P_\beta.$$

ここで,

$$\varphi_{\alpha, \beta}^+(q, t) = \prod_{i \leq j} \frac{f_{q, t}(\alpha_i - \beta_j; j - i) f_{q, t}(\beta_i - \alpha_{j+1}; j - i)}{f_{q, t}(\alpha_i - \alpha_j; j - i) f_{q, t}(\beta_i - \beta_{j+1}; j - i)},$$

$$\varphi_{\beta, \alpha}^-(q, t) = \prod_{i \leq j} \frac{f_{q, t}(\alpha_i - \beta_j; j - i) f_{q, t}(\beta_i - \alpha_{j+1}; j - i)}{f_{q, t}(\alpha_i - \alpha_{j+1}; j - i) f_{q, t}(\beta_i - \beta_j; j - i)}$$

である.

注意. [6] では, $\varphi_{\alpha, \beta}^\pm$ は arm, leg の長さを用いて表されているが, 上のよう書き換えることは難しくない.

補題 4.2, 4.3 を用いると, $\mathcal{A}(S(\mu); \tau)$ のトレース母関数について次のような表示ができる:

命題 4.4. μ をストリクトな分割とする. $N \geq \mu_1$ となる正整数 N を固定し, 符号の列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ を

$$\varepsilon_k = \begin{cases} + & (k \text{ が } \mu \text{ の成分であるとき}) \\ - & (k \text{ が } \mu \text{ の成分でないとき}) \end{cases}$$

によって定義する. 逆平面分割 $\sigma \in \mathcal{A}(S(\mu))$ に対して,

$$z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{(i,j) \in S(\mu)} z_{j-i}^{\sigma(i,j)}, \quad V_{S(\mu)}(\sigma; q, t) = \prod_{k=1}^N \varphi_{\sigma[k-1], \sigma[k]}^{\varepsilon_k}(q, t)$$

とおき, 長さ $l(\mu)$ 以下の分割 τ に対して $\mathcal{A}(S(\mu); \tau)$ の重みつきトレース母関数

$$R_{S(\mu), \tau}(z; q, t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(S(\mu); \tau)} V_{S(\mu)}(\sigma; q, t) z^{\text{tr}(\sigma)}$$

を考える. このとき,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau} R_{S(\mu), \tau}(z; q, t) P_{\tau} \\ = D(z_0) G^{\varepsilon_1}(1) D(z_1) G^{\varepsilon_2}(1) D(z_2) G^{\varepsilon_3}(1) \cdots G^{\varepsilon_{N-1}}(1) D(z_{N-1}) G^{\varepsilon_N}(1) 1 \end{aligned} \quad (8)$$

と表される. ここで,

$$\tilde{z}_0 = 1, \quad \tilde{z}_k = z_0 z_1 \cdots z_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

である.

この命題 4.4 の (8) の右辺を書き直すために, $G^+(u)$, $G^-(u)$, $D(z)$ の間の交換関係

$$\begin{aligned} D(z) \circ G^+(u) &= G^+(zu) \circ D(z), \\ D(z) \circ G^-(u) &= G^-(z^{-1}u) \circ D(z), \\ D(z) \circ D(z') &= D(zz'), \\ G^-(u) \circ G^+(v) &= F(uv; q, t) G^+(v) \circ G^-(u) \end{aligned}$$

(ここで, $F(x; q, t) = (tx; q)_{\infty} / (x; q)_{\infty}$ とおいた) を用いる. (最後の式は [6, Chap. III, 5. Ex. 8] の議論と同じようにして証明できる.) さらに, $D(z)1 = G^-(u)1 = 1$ であることに注意し,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(X; q, t) u^n &= \prod_i F(x_i u; q, t), \\ \prod_{i,j} F(x_i y_j; q, t) &= \sum_{\tau} Q_{\tau}(Y; q, t) P_{\tau}(X; q, t) \end{aligned}$$

([6, Chap. VI, (2.8), (4.13)] を見よ) を用いる. すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau} R_{S(\mu), \tau}(z; q, t) P_{\tau}(X; q, t) \\ = \prod_{\mu_k^c < \mu_l} F(\tilde{z}_{\mu_k}^{-1} \tilde{z}_{\mu_l}; q, t) \sum_{\tau} Q_{\tau}(\tilde{z}_{\mu_1}, \dots, \tilde{z}_{\mu_r}; q, t) P_{\tau}(X; q, t) \end{aligned}$$

となることがわかる. 両辺における $P_{\tau}(X; q, t)$ の係数を比較すると, 次の命題が得られる.

命題 4.5. 命題 4.4 の記号を用いると,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}(S(\mu); \tau)} V_{S(\mu)}(\sigma; q, t) z^{\text{tr}(\sigma)} = \prod_{\mu_k^c < \mu_l} \frac{(t \tilde{z}_{\mu_k^c}^{-1} \tilde{z}_{\mu_l}; q)_\infty}{(\tilde{z}_{\mu_k^c}^{-1} \tilde{z}_{\mu_l}; q)_\infty} \cdot Q_\tau(\tilde{z}_{\mu_1}, \dots, \tilde{z}_{\mu_r}; q, t)$$

となる.

この命題 4.5 を用いて, 定理 4.1 を証明しよう.

定理 4.1 の証明. (a) 例 2.7 で与えた d -complete 彩色を考え, 変数 z_v ($v \in T$) の代わりに $z_{c(v)}$ を用いることにする. 分割 λ に対して, $r = \#\{i : \lambda_i \geq i\}$ とおき, ストリクトな分割 μ, ν を

$$\mu_i = \lambda_i - i + 1, \quad \nu_i = \lambda_i - i + 1 \quad (1 \leq i \leq r)$$

(ここで, λ は λ の共役分割である) とおいて定めると, 逆平面分割 $\pi \in \mathcal{A}(D(\lambda))$ は, $S(\mu), S(\nu)$ を枠とする逆平面分割 σ, ρ で同じ profile をもつものを張り合わせることによって得られる. 例えば,

$$\pi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}, \quad \rho = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

である. このとき, $W_{D(\lambda)}(\pi; q, t), z^\pi$ はそれぞれ

$$W_{D(\lambda)}(\pi; q, t) = \frac{1}{b_\tau(q, t)} V_{S(\mu)}(\sigma; q, t) V_{S(\nu)}(\rho; q, t), \quad z^\pi = \mathbf{x}^{\text{tr}(\sigma)} \mathbf{y}^{\text{tr}(\rho)}$$

と表される. ただし, $\tau = \sigma[0] = \rho[0]$ であり,

$$b_\tau(q, t) = \langle P_\tau, P_\tau \rangle = \prod_{i \leq j} \frac{f_{q,t}(\tau_i - \tau_{j+1}; j - i)}{f_{q,t}(\tau_i - \tau_j; j - i)},$$

$$x_0 = z_0^{1/2}, \quad y_0 = z_0^{1/2}, \quad x_k = z_k, \quad y_k = z_{-k} \quad (k \geq 1)$$

である. よって, Cauchy 型の公式 [6, Chap. VI, (4.13)]

$$\sum_\tau \frac{1}{b_\tau(q, t)} Q_\tau(X; q, t) Q_\tau(Y; q, t) = \prod_{i,j} F(x_i y_j; q, t)$$

を用いれば, $P = D(\lambda)$ の場合の予想の式 (7) が導かれる.

(b) (この証明は [3] による.) 例 2.7 で与えた d -complete 彩色を考え, 変数 z_v ($v \in T$) の代わりに $z_{c(v)}$ を用いることにする. まず, 重み $W_{S(\mu)}(\sigma; q, t)$ は

$$W_{S(\mu)}(\sigma; q, t) = \frac{b_\tau^{\text{el}}(q, t)}{b_\tau(q, t)} V_{S(\mu)}(\sigma; q, t)$$

と表される. ただし, $\tau = \sigma[0]$ であり,

$$b_\tau^{\text{el}}(q, t) = \prod_{\substack{i \leq j \\ j-i \text{ は偶数}}} \frac{f_{q,t}(\tau_i - \tau_{j+1}; j - i)}{f_{q,t}(\tau_i - \tau_j; j - i)}$$

である。また、分割 λ に対して、 $r(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \text{ は奇数}\}$ とおくと、

$$\lambda_1 + \lambda_3 + \cdots = \frac{1}{2}(|\lambda| + r(\lambda)), \quad \lambda_2 + \lambda_4 + \cdots = \frac{1}{2}(|\lambda| - r(\lambda))$$

であり、

$$z^\sigma = \begin{cases} \left(\frac{z_{0'}}{z_0}\right)^{(|\tau|+r(\tau))/2} z^{\text{tr}(\sigma)} & (l(\mu) \text{ が偶数のとき}) \\ \left(\frac{z_{0'}}{z_0}\right)^{(|\tau|-r(\tau))/2} z^{\text{tr}(\sigma)} & (l(\mu) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。ここで、Warnaar による Schur–Littlewood 型の公式 [19, (1.18)]

$$\sum_{\lambda} a^{r(\lambda)} b_{\lambda}^{\text{el}}(q, t) P_{\lambda}(X; q, t) = \prod_i \frac{(atx_i; q)_{\infty}}{(ax_i; q)_{\infty}} \prod_{i < j} \frac{(tx_i x_j; q)_{\infty}}{(x_i x_j; q)_{\infty}}$$

において、 a, x_i をそれぞれ $a^{1/2}, a^{1/2}x_i^{1/2}$ で、あるいは $a^{-1/2}, a^{1/2}x_i^{1/2}$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} a^{(|\lambda|+r(\lambda))/2} \frac{b_{\lambda}^{\text{el}}(q, t)}{b_{\lambda}(q, t)} Q_{\lambda}(X; q, t) &= \prod_i \frac{(atx_i; q)_{\infty}}{(ax_i; q)_{\infty}} \prod_{i < j} \frac{(tax_i x_j; q)_{\infty}}{(ax_i x_j; q)_{\infty}}, \\ \sum_{\lambda} a^{(|\lambda|-r(\lambda))/2} \frac{b_{\lambda}^{\text{el}}(q, t)}{b_{\lambda}(q, t)} Q_{\lambda}(X; q, t) &= \prod_i \frac{(tx_i; q)_{\infty}}{(x_i; q)_{\infty}} \prod_{i < j} \frac{(tax_i x_j; q)_{\infty}}{(ax_i x_j; q)_{\infty}} \end{aligned}$$

となるから、これを用いれば、 $P = S(\mu)$ の場合の予想の式 (7) が導かれる。 \square

参考文献

- [1] S. Adachi, Reverse plane partitions and growth diagrams, preprint.
- [2] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thomas, The hook graphs of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–324.
- [3] M. Ishikawa, private communication dated Sep. 17, 2009.
- [4] M. Ishikawa, private communication dated Nov. 24, 2009.
- [5] E. R. Gansner, The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A* **30** (1981), 71–89.
- [6] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials* (2nd ed.), Oxford Univ. Press, 1995.
- [7] K. Nakada, Colored hook formula for a generalized Young diagram, *Osaka J. Math.* **45** (2008), 1085–1120.
- [8] K. Nakada, q -Hook formula for a generalized Young diagram, preprint.
- [9] S. Okada, (q, t) -deformations of multivariate hook product formulae, [arXiv:0909.0086](https://arxiv.org/abs/0909.0086).

- [10] 岡村 修志, 一般化された標準ヤング盤を等確率でランダムに生成するアルゴリズム, 大阪大学大学院理学研究科修士論文, 2003.
- [11] A. Okounkov and N. Reshetikhin, Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 581–603.
- [12] A. Okounkov, N. Reshetikhin, and C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and classical crystals, in “The unity of mathematics”, *Progr. Math.*, 244, Birkhäuser Boston, 2006, pp. 597–618,
- [13] R. A. Proctor, Dynkin diagram classification of λ -minuscule Bruhat lattices and d -complete posets, *J. Algebraic Combin.* **9** (1999), 61–94.
- [14] R. A. Proctor, Minuscule elements of Weyl groups, the number game, and d -complete posets, *J. Algebra* **213** (1999), 272–303.
- [15] R. A. Proctor, Informal description of the hook length property for posets, <http://www.math.unc.edu/Faculty/rap/Hook.html>.
- [16] R. A. Proctor, d -Complete posets generalize Young diagrams for the jeu de taquin property [arXiv:0905.3716](https://arxiv.org/abs/0905.3716).
- [17] R. P. Stanley, Ordered structures and partitions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **119** (1972).
- [18] M. Vuletić, A generalization of MacMahon’s formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 2789–2804.
- [19] S. O. Warnaar, Rogers-Szegő polynomials and Hall–Littlewood symmetric functions, *J. Algebra* **303** (2006), 810–830.