数理解析研究所講究録
第 1689 巻 2010 年 153-163

有限群上の調和解析と統計学に関する話題

Spherical Harmonics on Finite Groups and Their Applications to Statistics

水川 裕司 (Hiroshi Mizukawa)

防衛大学校 総合教育学群 数学教育室

Department of Mathematics, National Defense Academy

mzh@nda.ac.jp

概 要

有限群のゲルファントペアの理論の確率論への応用を考える．有限群のゲルファントペアは多くの場合で帯球関数が様々な形で，しかも明示的に表示されている．このことは計算をする上で大変有用である．ここでは，古典的な壺と玉のモデルを複素鏡映群のゲルファントペアを利用して理解したい．

1 イントロダクション

このノートで使われる原理は次のようなものである:

(G, H) を有限群のゲルファントペアとする．いま，両側 H-不変な G 上の関数 f が与えられたとする．そして f のたたみ込み積による N-乗の計算をしたい．まず，帯球関数 ω_i で f を展開しよう：

$$f = \sum a_i \omega_i \quad (a_i \in \mathbb{C}).$$

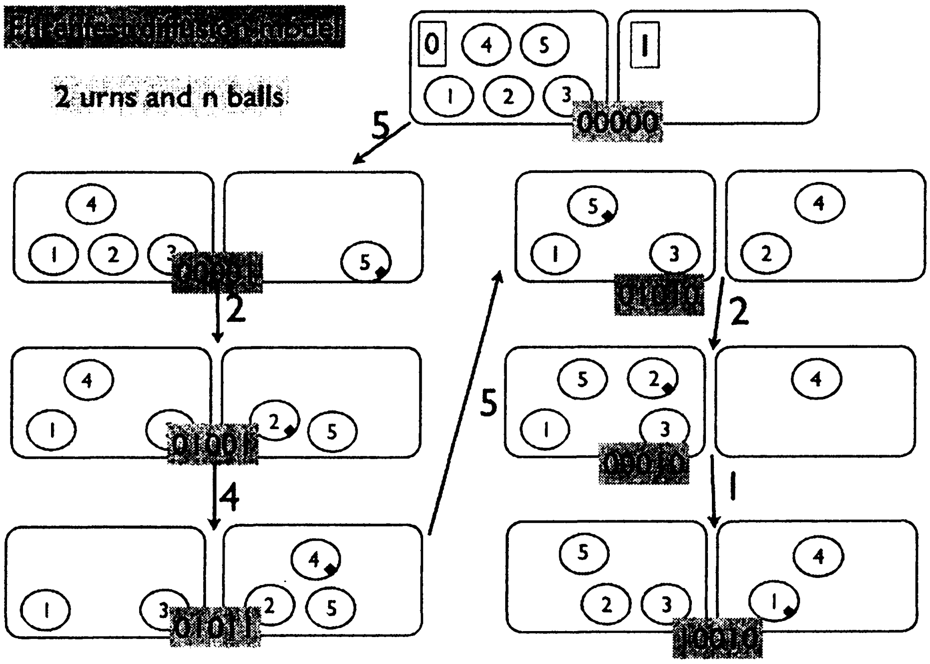
すると，f のたたみ込み積による N-乗は帯球関数の冪等性を利用すると本質的に係数 a_i 達の N-乗の計算に帰着される．
我々の主たる目的は，ある (G-不変な) 確率空間が有限群のゲルファントペアの置換表現の実現になっている時，確率行列の N-乗の計算にこの事実を応用すると言う事である．

まずは確率過程の例から始めよう．二つの壺（U_0 と U_1）と 1 から n までの番号を書かれたボールが一つづつある．始め壺 U_0 に全てのボールが入っているとする．このボール達を次の操作を繰返す事で混ぜ合わせてみよう:

Classification number :20C05,05E05,05E10,05E35.

- ランダムに指定した番号の書かれたボールを取出し，もう一方の壺に入れる．

下にボールが五個の場合の例を載せておく．



以上を Ehrenfest の拡散モデルと言う．さて，ボール j が U_i に入っている時 $\varepsilon_j = i$ と書くと，このシャッフルによる各状態は，集合

$$B(2,n) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$$

と一対一に対応する．例えば初期状態は $(0,0,\cdots,0)$ に対応する．また，先の例にも各状態と $B(2,5)$ の各元との対応を書いておいた．いま $p(x,y)$ を上で決めた一回の操作によって状態 x から状態 y に移る確率とする．これを式で書くと，$x, y \in B(2,n)$ に対して，定義より

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/n & |x-y| = 1 \\ 0 & |x-y| \neq 1 \end{cases}$$

となる，ここで $|x-y| = \#\{i \mid x_i \neq y_i, 1 \leq i \leq n\}$(Hamming 距離) とする．いま，$x_0 = (0,0,\cdots,0)$ から N 回操作を繰返してある状態 x になる確率は

$$\sum_{x_1,\cdots,x_{N-1} \in B(2,n)} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{N-1},x)$$

である．これは行列

$$P = (p(x,y))_{x,y \in B(2,n)}$$

の N 乗 P^N の (x_0, x)-成分である．

このノートでは以上のモデル（とその一般化）を有限群のゲルファントペアを通じて解釈し，P^N の具体的な表示や $N \to \infty$ の評価を試みたい．そのためにまずは次節で有限群のゲルファントペアの復習をする．

2 有限群のゲルファントペア

この章では有限群のゲルファントペアの復習をする．以下全ての表現はユニタリ表現と仮定する．従い現れる内積は全て G-不変なものである．また，そのノルムは絶対値で表す事にする．

Definition 2.1. G を有限群，H をその部分群とする．1 を H の恒等表現とした時，置換表現 $1\uparrow_H^G$ が G の表現として無重複な時 (G, H) をゲルファントペアという．

以下では (G, H) をゲルファントペアとして議論を進める．いま，置換表現が

$$1\uparrow_H^G = \bigoplus_{i=0}^{s} V_i$$

の様に分解したとしよう，ここで各 V_i は G の既約表現である．いま (G, H) がゲルファントペアであることより，フロベニウスの相互律から各既約成分には

$$hv(i) = v(i) \ \& \ |h(i)| = 1$$

を満たす元がただ一つ存在する事がわかる．

Definition 2.2. 上の記号の元で G 上の関数を

$$\omega_i(g) = \langle v(i), gv(i) \rangle \quad (0 \le i \le s)$$

で定義し，これらを帯球関数と呼ぶ．

帯球関数はその定義により両側 H-不変であり，またユニタリ表現行列の成分でもあるので直交する．その直交関係を正確に書くと，

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \omega_i(g)\overline{\omega_j(g)} = \delta_{ij}(\dim V_i)^{-1}$$

である．群 G に対して $\mathbb{C}G$ をその群環，また，$C[G]$ を G 上の（複素数値）関数全体とする．このとき，対応

$$\mathbb{C}G \ni \sum_{g\in G} a_g g \longmapsto (f : g \mapsto a_g) \in C[G]$$

は $\mathbb{C}G$ と $C[G]$ の間の代数の同型を与える．ただし，ここで $C[G]$ の積はたたみ込み積，つまり

$$f * f'(g) = \sum_{xy=g} f(x)f'(y) \quad (f, f' \in C[G])$$

を考えている．この同型により以下では $\mathbb{C}G$ と $C[G]$ を同一視をする．

さらに，

$$C[H\backslash G/H]=\{f\in C[G]\mid f(hgh')=f(g)\quad(\forall h,h'\in H)\}$$

とおくと次の事がわかる．

Proposition 2.3. 帯球関数は $C[H\backslash G/H]$ の直交基底である．

つぎに，冪等元 $e_H=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}h$ に対して

$$\mathcal{H}(G,H)=e_H\mathbb{C}Ge_H=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle e_Hge_H\mid g\in G\rangle$$

とおき，これを (G,H) のヘッケ環と呼ぶ．ヘッケ環は明らかに両側 H-不変な G 上の関数全体の集合であり，帯球関数はヘッケ環の基底である．また，両側剰余類 $H\backslash G/H$ の完全代表系を $\{g_0,g_1,\cdots g_t\}$ とすると $\{e_Hg_ie_H\mid 0\leq i\leq t\}$ をヘッケ環の自然な基底として取ってくる事が出来て，このことより $t=s$ も従う．

さらに上で紹介した直交関係より一般的な式

$$\omega_i*\omega_j(g)=\delta_{ij}|G|(\dim V_i)^{-1}\omega_i(g)$$

が成り立つ．いま，もしヘッケ環の元が

$$f=\sum_{i=0}^{s}a_i\omega_i$$

と展開された時，f^{*N} をたたみ込み積での N 乗と書けば，

$$f^{*N}=\sum_{i=1}^{s}a_i^N\left(\frac{|G|}{\dim V_i}\right)^N\omega_i$$

となる．これとイントロダクションで紹介した P の N 乗の式を比べて欲しい．もし確率関数が上手くヘッケ環の元としてとらえられたならば，それを帯球関数で展開すれば上の公式を使い計算が上手くいくはずである．

3 壺を増やす一般化

3.1 G-不変な確率空間

この章では有限群のゲルファントペアの確率モデルへの応用を考えたい．ここで述べられるような応用は Diaconis による．参考文献として Diaconis 自身による解説 [1] と比較的最近の本 [5] を挙げておく．

始めに確率行列の定義を与えておくが，$p(x,y)$ は集合 X の上の勝手な二点 $x\in X$ から点 $y\in X$ に移る確率，と考えると良い．

Definition 3.1. X を集合とする．行列 $P=(p(x,y))_{x,y\in X}$ が確率行列であるとは

(1) $p(x,y)\geq 0$

(2) $\sum_{y\in X} p(x,y)=1$

を満たす事である．さらに群 G が X に推移的に作用しているとする．この時，任意の $g\in G$ と $x,y\in X$ に対し，

(3) $p(gx,gy)=p(x,y)$

が成り立つ時 P は G-不変確率行列という．

いま，群 G は集合 X に推移的に作用しており，P を X 上の G-不変確率行列であるとしよう．また $x_0\in X$ の固定群を H と置く．さらに (G,H) はゲルファントペアであるとしよう（ただし，以下において大部分の場合でゲルファントペアの仮定は必ずしも必要ではない事を一応注意しておく）．また，記号は第２節で用いたものを使う事にする．

いま X 上の関数 $\nu(x)=p(x_0,x)$ に対して，G 上の関数 $\tilde{\nu}$ を

$$\tilde{\nu}(g)=\frac{1}{|H|}\nu(gx_0)$$

で定義する．この様にすると次の事がわかる．

Proposition 3.2. $\tilde{\nu}$ は両側 H-不変である．

従って $\tilde{\nu}$ は帯球関数で展開出来る．いま

$$\tilde{\nu}=\sum_{i=0}^{s} a_i\omega_i$$

と書いておこう．
いま，x_0 を始点とした X 上のランダムウオークを考える．このときイントロダクションで説明したものと同様に考えると，N ステップ後の点が x_N にいる確率は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_1,\cdots,x_{N-1}} p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{N-1},x_N)\\
&\qquad=\frac{1}{|H|^N}\sum_{g_i\in G\ s.t.\ x_i=g_ix_0} p(x_0,g_1x_0)p(g_1x_0,g_2x_0)\cdots p(g_{N-1}x_0,g_Nx_0)\\
&\qquad=\frac{1}{|H|^N}\sum_{g_i\in G\ s.t.\ x_i=g_ix_0} p(x_0,g_1x_0)p(x_0,g_1^{-1}g_2x_0)\cdots p(x_0,g_{N-1}^{-1}g_Nx_0)\\
&\qquad=\sum_{g_i\in G}\tilde{\nu}(g_1)\tilde{\nu}(g_1^{-1}g_2)\cdots\tilde{\nu}(g_{N-1}^{-1}g_N)=\tilde{\nu}^{*N}(g_N),
\end{aligned}$$

ここで，係数 a_i も直交性を使って反転してやれば求める事が出来て（フーリエ係数）以下のようになる．

Proposition 3.3.

$$a_i = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \tilde{\nu}(g) \overline{\omega_i(g)}$$

μ が X 上の確率分布とは $\mu(x) \geq 0$ かつ $\sum_{x \in X} \mu(x) = 1$ が成り立つ事である．従い，ν は X 上の確率分布であり，$\tilde{\nu}$ は G 上の確率分布である．ここで，全変動距離 (total variation distance) と呼ばれる確率分布の間の距離を紹介しておこう．

Definition 3.4. X 上の確率分布 μ_1 と μ_2 に対して

$$||\mu_1 - \mu_2||_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu_1(x) - \mu_2(x)|$$

と置き，これを μ_1 と μ_2 の全変動距離と呼ぶ．

次節ではある確率モデルを考えて，一様分布との全変動距離の評価を考える．この際，我々の設定の下で以下のような評価式が成り立つ事が知られている．

Proposition 3.5 ([5]). P を X 上の G-不変な確率行列，π を X 上の一様分布とする．このとき，

$$||\tilde{\nu}^{*N} - \mu||_{TV} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{t} \dim V_i | \sum_{g \in G} \tilde{\nu}(g) \overline{\omega_i(g)} |^{2N}.$$

4 Ehrenfest の拡散モデルと $(G(r,1,n), S_n)$

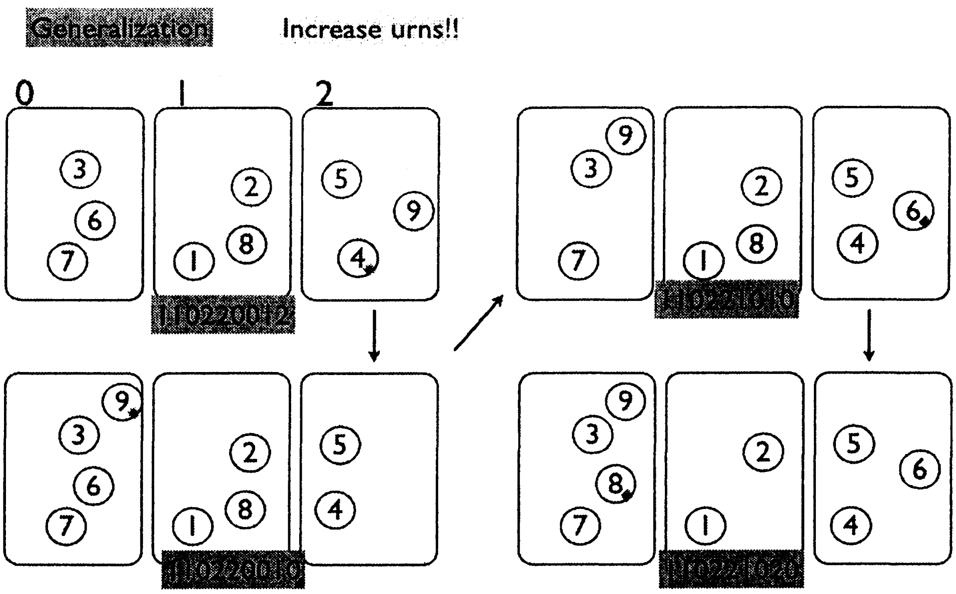
いま r 個の壺 $U_0, U_1, \cdots, U_{r-1}$ と 1 から n までの番号が書かれたボールが一つづつある．始めの状態は全てのボールが壺 U_0 に入っているとする．ここで次の操作を繰返す：

- ランダムに指定した番号の書かれたボールを取出し，ランダムに選ばれた他の壺に入れる．

すぐにわかる事はある状態から一回の操作で他の状態に移る確率が $\frac{1}{n(r-1)}$ で与えられる，と言う事である．また，b_i をボール i の入っている壺の番号だと思うと，集合

$$X = B(r,n) = \{(b_0, b_1, \cdots, b_{r-1}) \mid 0 \leq b_i \leq r-1\}$$

の各元とそれぞれの状態が一対一に対応する事がわかるだろう．



さて，複素鏡映群 $G(r,1,n) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \wr S_n$ とその部分群 $G(1,1,n) = S_n$ を考える．$G(r,1,n)$ の元を $(x_1,\cdots,x_n;\sigma)$ と書く事にする．ここで，$x_i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ そして $\sigma \in S_n$ である．さて，$G(r,1,n)$ の $B(r,n)$ への作用を

$$x(b_i \mid 1 \leq i \leq n) = (x_i + b_{\sigma^{-1}(i)} \pmod r \mid 1 \leq i \leq n),$$

で定義する．このとき，

Proposition 4.1. この作用は推移的．

である．さらに

Proposition 4.2. $b_0 = (0,\cdots,0) \in B(r,n)$ と置くと，b_0 の固定群は S_n である．

このようにして，$B(r,n)$ は $G(r,1,n)/S_n$ と同一視出来る．
$\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$ とおく．
以降，次の定理が基本的である．

Theorem 4.3. ([2])
$N(r,n) = \{(m_0,\cdots,m_{r-1}) \in \mathbb{N}^r \mid m_0 + \cdots + m_{r-1} = n\}$ と置く．

1. $(G(r,1,n),S_n)$ はゲルファントペア．

2. 置換表現の既約分解は

$$\mathbb{C}G(r,1,n)/S_n \sim \bigoplus_{k \in N(r,n)} V(k),$$

で与えられる．ここで $V(k)$ は $k \in N(r,n)$ を横一本のヤング図形の組と見なした時，それに対応する既約表現である．

3. 帯球関数も明示的に与える事が出来る.

さて，$B(r,n)$ において，初期分布は，

$$\nu_0(b) = \begin{cases} 1, & b = (n,0,\cdots,0), \\ 0, & b \neq (n,0,\cdots,0). \end{cases}$$

で与えられている．いま，π を $B(r,n)$ の上の一様分布，つまり $\pi \equiv \frac{1}{r^n}$ とする．同じように $\tilde{\pi}$ を $G(r,1,n)$ の上の一様分布とする.

$B(r,n) \times B(r,n)$ の上の関数を

$$d_r(b,c) = \#\{i \mid b_i \neq c_i\}$$

で定義する．ここで $b = (b_i \mid 1 \leq i \leq n)$ と $c = (b_i \mid 1 \leq i \leq n)$ としている．そして $B(r,n)$ 上の行列を

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)n}, & d_r(x,y) = 1 \\ 0, & d_r(x,y) \neq 1 \end{cases}$$

で定義すれば，これが我々の確率行列である事がわかるだろう．帯球関数 ω_k $(k \in N(r,n))$ 達で $\tilde{\nu}(g) = \frac{1}{n!}\nu(gx_0)$ を展開したものを

$$\tilde{\nu} = \sum_{k \in N(r,n)} f_k \omega_k$$

と書いた時，フーリエ係数は次で与えられる.

Proposition 4.4. $k = (k_0, k_1, \cdots, k_{r-1})$ に対して，

$$f_k = \frac{1}{r-1}\left(\frac{rk_0}{n} - 1\right).$$

この命題から次がわかる.

Proposition 4.5. $|f_k| \leq 1$ である．さらに，$|f_k| = 1 \Leftrightarrow k_0 = n$ $(r \geq 2)$ または $k_0 = 0$ $(r = 2)$.

そして確率行列の N 上も次のように計算される.

Theorem 4.6. $\Phi_i = \xi_i + \xi_i^2 + \cdots + \xi_i^{r-1}$ とおく．$g = (x_1, \cdots, x_n : \sigma)$ にたいして，

$$\tilde{\nu}^{*N}(g) = \frac{1}{r^n n!} \sum_{k_0=0}^{n} \left(\frac{rk_0 - n}{n(r-1)}\right)^N e_{n-k_0}(\Phi_1, \cdots, \Phi_n),$$

ここで $\xi_i = \xi^{x_i}$ とした（ξ は 1 の原始 r 乗根），さらに e_m は m 次の基本対称式である.

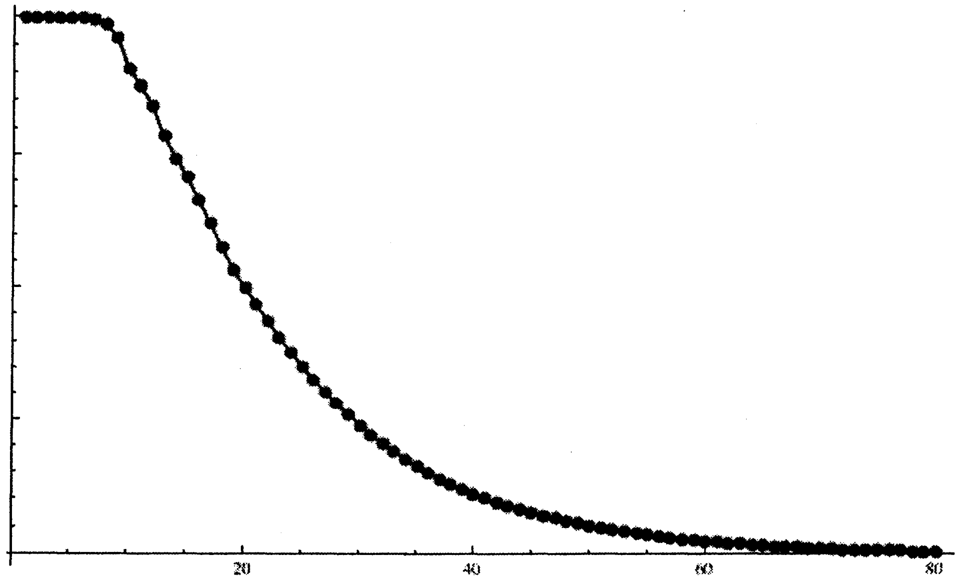
この定理から次の系を得る.

Corollary 4.7. $r>2$ のとき $\lim_{N\to\infty}\tilde{\nu}^{*N}=\frac{1}{r^n n!}$ である．一方，$r=2$ のとき ℓ を壺 U_0 に入っているボールの数とすると，

$$\lim_{N\to\infty}\tilde{\nu}^{*2N}=\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}n!} & (\ell\equiv 0 \pmod 2),\\ 0 & (\ell\equiv 1 \pmod 2)\end{cases},\quad \lim_{N\to\infty}\tilde{\nu}^{*2N-1}=\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}n!} & (\ell\equiv 1 \pmod 2),\\ 0 & (\ell\equiv 0 \pmod 2)\end{cases}$$

である．

Example 4.8. 上の公式を $r=3, n=20$ として *Mathematica* でグラフを描いてみると次のようになる．



１０回位シャッフルしたところから，急激に減っている様子が見て取れると思う．このように序盤ではあまり "混ざらない" がある時点から急に混ざり始める現象を *Cut-Off* という．

前節の最後に紹介した不等式を使い次を得る．

Theorem 4.9. $N=\frac{n(r-1)}{2r}(\log r^n+c)$ と置こう．

1. $r=2$ ならば，

$$||\nu^{*N}-\pi||_{TV}^2-1/4\le\frac{1}{4}e^{-c}$$

が成立する．ここで，"$-1/4$" は $||\nu^{*N}-\pi||_{TV}^2$ の $n\to\infty$ の時の極限である事に注意．

2. $r\ge 3$ ならば，

$$||\nu^{*N}-\pi||_{TV}^2\le\frac{1}{4}e^{-c}$$

を得る．

5 別の混ぜ方

最後にボールの行き先の壺を制限するとどうなるか，フーリエ係数だけ見ておこう．いま時計回りに壺が $U_0, U_1, \cdots, U_{r-1}$ の順に円形に配置されているとする．

5.1 cyclic shuffle 1

ここで取り出されたボールはその両隣の壺のどちらかに入れられるとしよう．この場合の確率行列は

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & d_{c1}(x,y) = 1 \\ 0, & d_{c1}(x,y) \neq 1 \end{cases}$$

となる．この時のフーリエ係数は次で与えられる．

Proposition 5.1. $k = (k_0, \cdots, k_{r-1}) \in N(r,n)$ に対して $f_k = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{k_i}{n} \xi^{-i}$ である．

5.2 cyclic shuffle 2

ここで取り出されたボールはその右側の壺に入れられるとしよう．この場合の確率行列は

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & d_{c2}(x,y) = 1 \\ 0, & d_{c2}(x,y) \neq 1 \end{cases}$$

となる．

Proposition 5.2. $k = (k_0, \cdots, k_{r-1}) \in N(r,n)$ に対して $f_k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{k_i}{n} \left(\xi^{-i} + \xi^{i}\right)$ である．

5.3 さいごに

講演中に紹介したパーティのモデルに関しては，著者による２００９年度の代数学シンポジウムの報告集を見てもらいたい．

参考文献

[1] P. Diaconis, *Group Representation in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes-Monograph Series (1988).

[2] H. Mizukawa, Zonal spherical functions on the complex reflection groups and $(m+1, n+1)$-hypergeometric functions, Advances in Math. 184 (2004) pp. 1-17.

[3] H. Mizukawa, Zonal polynomials for wreath products, J. Alg. Comb. 25, pp. 189-215, 2007.

[4] H. Mizukawa, Finite Gelfand pair approaches for Ehrenfest diffusion model, in progress.

[5] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti amd F. Tolli, *Harmonic Analysis on Finite Groups,* Oxford Science Pub, 1995.