

# Birkhoff標準化と Gustavson標準化のハイブリッド応用<sup>1</sup>

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 複雑系科学科<sup>2</sup>  
上野 嘉夫 (Yoshio Uwano)

Department of Complex Systems, Future University Hakodate

## 概要

Birkhoff標準化と Gustavson標準化は、非線形 Hamilton 系の安定平衡点近傍の解析に有効である。対象を 2 自由度系に限った場合、線形化系の周波数比に応じて Birkhoff標準化（無理比）と Gustavson標準化（有理比）が適用される。パラメータ依存する非線形 Hamilton 系の例として Josephson 接合キュビット系をとりあげ、適用される標準化に応じて得られる結果を古典力学レベルで比較検討する。

## §1 はじめに

Birkhoff標準化と Gustavson標準化は、非線形 Hamilton 系の半単純安定平衡点近傍の正則領域<sup>3</sup>における有効な解析手法として知られている [1]。本稿では、以下のような 2 自由度 Hamilton 系のみを対象とする。  $U$  を  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R}^4$  の原点を含む領域とし、デカルト座標  $(q, p)$  ( $q, p \in \mathbf{R}^2$ ) を、  $U \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$  の正準座標とする。すなわち、  $U$  のシンプレクティック構造を、  $\sum_{j=1}^2 dp_j \wedge dq_j$  で与える。  $U$  上の  $C^\infty$  関数を Hamiltonian とする Hamilton 系が、原点  $(0, 0) \in U$  を半単純安定平衡点として許容していると仮定する。このとき、適当な  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 (\supset U)$  上のシンプレクティック変換、  $(q, p) \rightarrow (x, y)$  により、Hamiltonian は以下の様な級数形

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x, y), \tag{1}$$

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + x_1^2) + \frac{\Omega}{2}(y_2^2 + x_2^2) \quad (\omega : \text{正定数}), \tag{2}$$

$$H_k(x, y) : (x, y) \text{ の斉 } k \text{ 次多項式 } (k = 3, 4, \dots) \tag{3}$$

として表現できる<sup>4</sup>。式 (2) において  $\omega$  が無理数のとき、原点を保つ適当な局所シンプレクティック変換  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  により、  $H(x, y)$  を以下を満たすような  $(\xi, \eta)$  の級数、

$$\mathcal{N}^B(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^r \mathcal{N}_k^B(\xi, \eta) + o_r(\xi, \eta), \tag{4}$$

$$\mathcal{N}_2^B(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{\Omega}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2), \tag{5}$$

$$\mathcal{N}_k^B(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \text{ の斉 } k \text{ 次多項式 } (k = 3, \dots, r), \tag{6}$$

$$\{\mathcal{N}_k^B, \mathcal{N}_2^B\} = 0 \quad (k = 3, \dots, r) \tag{7}$$

<sup>1</sup>本稿は、数理解析研究所共同研究集会「幾何学的力学系理論とその周辺」(2009年12月21日-22日)での講演を基にしている。

<sup>2</sup>〒 041-8655 函館市亀田中野町 116-2

<sup>3</sup>正則 (非カオスの) 運動が支配的な部分という意味で用いられる。

<sup>4</sup>収束半径が 0 の場合もありうるが、標準化を応用する状況では有限次で打ち切られることが多い。

に変換できることが知られている [1, 2]. ただし,  $r$  は与えられた 3 以上の自然数で,  $o_r(\xi, \eta)$  は  $r+1$  次以上の項を表わしている. また,  $\{\cdot, \cdot\}$  は

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial F_2}{\partial \eta_j} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta_j} \frac{\partial F_2}{\partial \xi_j} \right) \quad (8)$$

で定まる  $(\xi, \eta)$  に関する正準 Poisson 括弧式である. このような級数  $\mathcal{N}^B(\xi, \eta)$  は「 $r$  次まで Birkhoff 標準形」であるといわれ, Birkhoff によりその変換可能性が証明されている [2].

Birkhoff による標準形への変換においては, 線形化系の角周波数に対する非共鳴条件, すなわち  $\Omega$  の無理性が仮定されていたが,  $\Omega$  が有理数である場合の標準形は Gustavson によって導かれている [3]. 実際, 式 (2) において  $\Omega$  が有理数である場合には, 原点を保つ適当な局所シンプレクティック変換  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  により,  $H(x, y)$  は以下を満たすような  $(\xi, \eta)$  の級数,

$$\mathcal{N}^G(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^r \mathcal{N}_k^G(\xi, \eta) + o_r(\xi, \eta), \quad (9)$$

$$\mathcal{N}_2^G(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{\Omega}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2), \quad (10)$$

$$\mathcal{N}_k^G(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \text{ の斉 } k \text{ 次多項式 } (k = 3, \dots, r), \quad (11)$$

$$\{\mathcal{N}_k^G, \mathcal{N}_2^G\} = 0 \quad (k = 3, \dots, r) \quad (12)$$

に変換できる [1, 3].  $r$  や  $o_r(\xi, \eta)$  は, Birkhoff 標準形の場合と同様の意味で用いられている. また,  $\{\cdot, \cdot\}$  は (8) で定義されている. このような級数は, 「 $r$  次まで Gustavson 標準形」であるといわれる. Birkhoff 標準形を説明する式 (4)-(7) と, Gustavson 標準形を説明する式 (9)-(12) とは, 単にラベル ( $B$  か  $G$  か) の付け替えが行なわれたに過ぎないように見える. しかしながら, 3 節にて述べるように,  $\Omega$  が無理数か否かに応じて, Poisson 可換条件 ((7), (12)) を満たす斉次多項式のなすベクトル空間は構造を異にしている.

さて, Birkhoff あるいは Gustavson 標準化を適用したい 2 自由度 Hamilton 系がパラメータ<sup>5</sup>に依存している場合を考えよう. このとき, その Hamilton 系の Hamiltonian の級数展開形 (1)-(3) に現れる角周波数  $\Omega$  もまた, それらのパラメータに依存するであろう. もしも, 複数パラメータの数値が揺らぐとすれば,  $\Omega$  は四六時中, 無理数と有理数を往復し, Hamiltonian  $H(x, y)$  を標準化する際にも, Birkhoff 標準形と Gustavson 標準化を往復しなければならない. 上で強調したように, Birkhoff 標準化に必要な斉次多項式のなすベクトル空間と Gustavson 標準化に必要な斉次多項式のなすベクトル空間とは異なる構造である. すなわち, パラメータの揺らぎにより  $\Omega$  の連続的な摂動を追跡する場合においても, 対応する  $H(x, y)$  の標準形は「不連続」に変化し, それは系にある種の「分岐」を発生せしめるという期待を持たせる. しかしながら, 平衡点の極めて近くを解析する場合や, 量子化を経由した場合には, 標準形の不連続な変化が質的に反映されていないように見える事例もある. 以上より, 角周波数  $\Omega$  の連続的な変化に応じて生じる 2 種類の標準形間の不連続な推移が, どのような現象に (質的) 影響を及ぼすか? あるいは, 影響を与えないか? を知ることは興味深い問いと言えよう. 本稿では, Josephson 接合キュビット系 [4] を標準化の適用例としてとりあげ, 平衡点周りでの (概) 周期軌道の状況を議論する. Josephson 接合キュビットは, 筆者が定式化した Gustavson 標準化逆

<sup>5</sup>一般に, 複数个パラメータを想定している.

問題の具体的適用対象とした系である。また、量子計算素子の有力候補として量子系としての解析が進んでいる系でもある。以下、本稿の構成を述べる。

本稿の2節では、Josephson 接合キュビット (JJQ) 系を導入する。3節では、2節で JJQ 系の Hamiltonian を標準化する。標準化を用いて、標準化系における退化した不変トラスにより近似される周期軌道と、その周辺の幾何構造について述べる。4節では議論のまとめと展望を述べる。

## §2 Josephson 接合キュビット系の標準化

Josephson 接合キュビット系とは、Josephson 接合素子を4個接続して得られる回路で、量子計算における情報表現単位であるキュビット素子を実現する有力候補のひとつである。本稿では、Yukon[4]と上野・奥[5]を参考に Josephson 接合キュビット系を Hamilton 形式で導入し標準化する。

### 2.1 Josephson 接合素子

図1に示されるような、2つの超伝導体が薄い絶縁体を中間に挟んで接合された素子を Josephson 接合素子という。図1は、紙面の裏側から表側に向けた総磁束  $\Phi$  の一様磁場が素子にかかっている。古典力学的には電子は絶縁体を通過できないが、量子力学的にはトンネル効果による波動

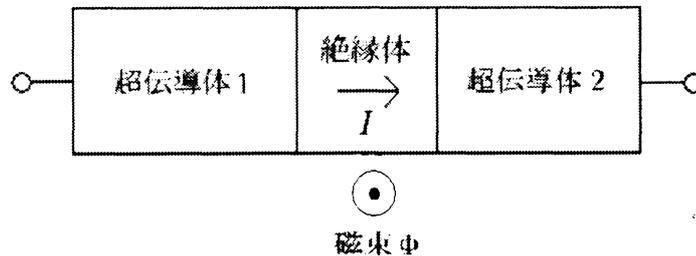


図 1: Josephson 接合素子の概念図

関数の「滲みだし」により超伝導体1から超伝導体2へ電流  $I$  が流れる。この現象を Josephson 効果という [6, 7]。超伝導体  $j$  ( $j = 1, 2$ ) における自由電子対の波動関数の位相を  $\theta_j$  で表わし、その位相差を  $\theta$  で表わす。すなわち

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (13)$$

とする。Josephson 効果によって超伝導体1から超伝導体2への電流  $I$  は、位相差  $\theta$  の関数

$$I(\theta) = I_C \sin \theta \quad (14)$$

として表される。  $I_C$  は臨界電流と呼ばれる定数である。位相差  $\theta$  と素子を貫く磁束  $\Phi$  とは

$$\theta = \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^{-1} \Phi = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}) \quad (15)$$

という関係で結ばれている．式 (14) と，

$$2eV = \hbar \frac{d\theta}{dt} \quad (16)$$

の対を Josephson 接合の基本方程式という [6, 7].

位相差  $\theta$  の時間変化の記述には，図 2 の Josephson 接合の等価回路モデルを考えると便利である．外部駆動電流  $\tilde{I}$  がない場合，Kirchhoff の法則から得られる関係式

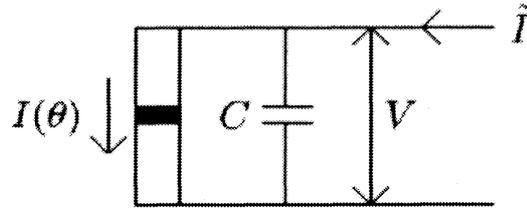


図 2: Josephson 素子の等価回路

$$\tilde{I} = C \frac{dV}{dt} + I(\theta) = C \frac{dV}{dt} + I_C \sin \theta \quad (17)$$

と基本方程式のひとつ (16) を組み合わせて， $\theta$  に対する 2 階の常微分方程式

$$\frac{1}{C} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left( \frac{2e}{\hbar} \right) I_C \sin \theta = 0 \quad (18)$$

を得る．この式は，単振子の方程式と同じである．運動量変数  $p_\theta$  を

$$p_\theta = \frac{1}{C} \left( \frac{\hbar}{2e} \right) \frac{d\theta}{dt} \quad (19)$$

によって導入し，Hamiltonian  $\mathcal{J}(\theta, p_\theta)$  を

$$\mathcal{J}(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2} C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^{-2} p_\theta^2 - \left( \frac{\hbar}{2e} \right) I_C \cos \theta \quad (20)$$

で導入するとき，(18) は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial p_\theta} = C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^{-2} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} = -\left( \frac{\hbar}{2e} \right) I_C \sin \theta \quad (21)$$

という，Yukon が [4] で与えたものと同様である Hamilton 方程式の形で表わされる．

## 2.2 Josephson 接合キュビット系

Josephson 接合素子 4 個を図 3 のように配線したものを，Yukon [4] に従って Josephson 接合キュビット系 (JJQ 系) と呼ぶ．回路接続による制約条件を考慮しないならば，JJQ 系の Hamiltonian は (20) で与えた形の 4 個の Hamiltonian の和

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = \sum_{k=1}^4 \left[ \frac{1}{2} C_k \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^{-2} p_{\theta,k}^2 - \left( \frac{\hbar}{2e} \right) I_k \cos(\theta_k) \right] \quad (22)$$

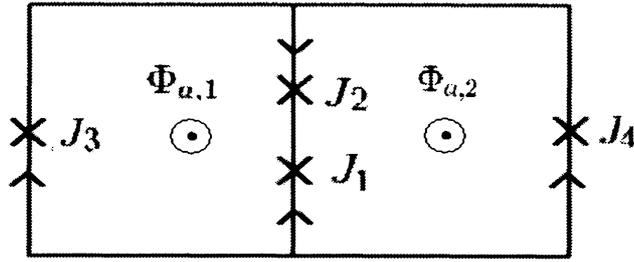


図 3: Josephson 接合キュビット系の回路図

で表される．ここで， $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$  は，4 個の接合素子  $J_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) における位相差を表す変数で， $p_\theta = (p_{\theta,1}, p_{\theta,2}, p_{\theta,3}, p_{\theta,4})^T$  は， $\theta$  に正準共役な運動変数である． $C_k$  は接合素子  $J_k$  のキャパシタンスである ( $k = 1, 2, 3, 4$ )．左側のループを紙面の裏から表へ貫く磁束を  $\Phi_{a,1}$ ，右側のループを紙面の裏から表へ貫く貫く磁束を  $\Phi_{a,2}$  とすると， $\theta_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) の間には，(15) を各 Josephson 接合素子  $J_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) に適用して得られる

$$\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,1}, \quad -\theta_1 + \theta_2 + \theta_4 = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,2} \quad (23)$$

という制約が付加される．磁束  $\Phi_{a,1}$  と  $\Phi_{a,2}$  が一定とすると，(23) は，運動量変数間の制約

$$p_{\theta,1} - p_{\theta,2} - p_{\theta,3} = 0, \quad -p_{\theta,1} + p_{\theta,2} + p_{\theta,4} = 0 \quad (24)$$

を導出する．(23) と (24) より，正準 4 変数  $(\psi, p_\psi)$  を

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \quad p_{\psi,1} = \frac{1}{2}(p_{\theta,1} + p_{\theta,2}), \quad p_{\psi,2} = \frac{1}{2}(p_{\theta,1} - p_{\theta,2}) \quad (25)$$

で導入すると，JJQ 系は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\psi, p_\psi) = & \frac{1}{2} \left[ (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) p_{\psi,1}^2 + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4) p_{\psi,2}^2 \right] \\ & - \tilde{I}_1 \cos(\psi_1 + \psi_2) - \tilde{I}_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \\ & - \tilde{I}_3 \cos(2\psi_2 - \tilde{\Phi}_{a,1}) - \tilde{I}_4 \cos(2\psi_1 + \tilde{\Phi}_{a,2}) \end{aligned} \quad (26)$$

を Hamiltonian とする 2 自由度 Hamilton 系として記述できる．ここでは，諸定数を

$$\tilde{C}_k = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-2} C_k, \quad \tilde{I}_k = \left(\frac{\hbar}{2e}\right) I_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (27)$$

$$\tilde{\Phi}_{a,j} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^{-1} \Phi_{a,j} \quad (j = 1, 2) \quad (28)$$

で定義した．

JJQ 系の Hamiltonian の級数展開を 4 次まで具体的に求めよう．JJQ 系の諸定数の間に

$$-\tilde{I}_3 \sin \tilde{\Phi}_{a,1} + \tilde{I}_4 \sin \tilde{\Phi}_{a,2} = 0 \quad (29)$$

が成立を仮定すると，原点  $(\psi, p_\psi) = (0, 0)$  は JJQ 系の平衡点になる．仮定 (29) に，

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 \quad (30)$$

という仮定を追加すると，正準変換  $(\psi, p_\psi) \rightarrow (x, y)$  を

$$x_j = \omega_j \psi_j, \quad y_j = \omega_j^{-1} p_{\psi,j} \quad (j = 1, 2) \quad (31)$$

$$\omega_1 = \left( \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2} \right)^{1/4}, \quad \omega_2 = \left( \frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 4\tilde{I}_3 \cos \tilde{\Phi}_{a,1} + 4\tilde{I}_4 \cos \tilde{\Phi}_{a,2}}{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4} \right)^{1/4} \quad (32)$$

によって定めるとき， $\tilde{\mathcal{H}}(\psi, p_\psi)$  から

$$H(x, y) + o_4(x, y) = \frac{1}{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)^{1/2} (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2)^{1/2}} \tilde{\mathcal{H}}(\psi, p_\psi) \quad (33)$$

という関係で定まる，4次多項式 Hamiltonian  $H(x, y)$  は，

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y_1^2 + x_1^2) + \frac{\Omega}{2}(y_2^2 + x_2^2) + f_1 x_1^4 + f_2 x_1^2 x_2^2 + f_3 x_2^4 \quad (34)$$

という形である．定数  $\Omega, f_1, f_2, f_3$  は，JJQ 系の諸物理定数から

$$\Omega = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \frac{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4}{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2}, \quad (35)$$

$$f_1 = -\frac{1}{24} \omega_1^{-2}, \quad (36)$$

$$f_2 = -\frac{1}{4} \omega_2^{-2} \quad (37)$$

$$f_3 = -\frac{1}{24} \left( \frac{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2}{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2} \right)^{1/2} \frac{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4}{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)^2} \times \left\{ 4(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) - \frac{3(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + 4\tilde{C}_3 + 4\tilde{C}_4)}{\Omega^2} \right\} \quad (38)$$

で定まっている．式 (34) で与えられた JJQ 系の 4 次近似 Hamiltonian は，確かに標準化が適用可能な (1)-(3) の形をしている ( $r = 4$ )． $\Omega = 1$  の場合は 1 : 1 共鳴の場合に相当し，上野・奥 [5] が与えた Hamiltonian に帰着する．次節では定数  $\Omega$  の値が正の無理数か有理数かに応じて，Birkhoff 標準化か Gustavson 標準化が適用される．

**注意 2.1** 上野・奥 [5] の中で課された定数間の制約 (23), (25), (26) は Yukon が [4] にて設定した仮定を弱めたものであった．本稿では，上野・奥 [5] が設定していた 1 : 1 共鳴条件 (26) を外している．

### §3 JJQ 系の周期軌道と周辺構造

本節では，前節で得られた JJQ 系の 4 次近似 Hamiltonian  $H(x, y)$  を標準化し，標準化系の周期軌道とその周辺構造を調べる．

### 3.1 $H(x, y)$ の標準化

標準化の処方箋はすでに確立したものであり (例えば, [1] 参照), 標準化に用いる正準変換母関数に予め弱い制約を課しておけば, 与えられた Hamiltonian の標準形は一意的に定まる<sup>6</sup> [8, 9]. 本稿では標準化のための変換の詳細は割愛するが, Birkhoff 標準形と Gustavson 標準形の構造の差異に関して少し詳しく述べる. 構造の差異のポイントは, Poisson 可換条件 (7) と (12) に由来している. Poisson 括弧の定義 (8) により, Poisson 可換条件 (7) と (12) は, まとめて

$$\{\mathcal{N}_k^s, \mathcal{N}_2^s\} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{N}_k^s(e^{-it}\zeta_1, e^{-i\Omega t}\zeta_2) = 0 \quad (s = B, G, k = 3, \dots, r) \quad (39)$$

と表わすことができる. ここで,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$  は,

$$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \quad (j = 1, 2) \quad (40)$$

で定義される複素変数である. 式 (39) より, Poisson 可換条件 (7) と (12) を満たす斉  $k$  次多項式のなすベクトル空間  $V_k^s$  ( $s = B, G$ ) は, 以下のように定まる.  $\Omega$  が正の無理数のときには,  $\Omega$  の値によらず

$$V_k^B = \text{span} \left\{ \zeta_1^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2} \bar{\zeta}_1^{\beta_1} \bar{\zeta}_2^{\beta_2} \mid \alpha_j = \beta_j \quad (j = 1, 2) \right\} \quad (41)$$

となる. 一方,  $\Omega$  が正の有理数で, 互いに素な自然数  $\mu_1, \mu_2$  によって

$$\Omega = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (42)$$

と表わされる場合には,  $\Omega$  の値に応じて

$$V_k^G(\Omega) = \text{span} \left\{ \zeta_1^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2} \bar{\zeta}_1^{\beta_1} \bar{\zeta}_2^{\beta_2} \mid \sum_{j=1}^2 (\alpha_j + \beta_j) = k, \sum_{j=1}^2 \mu_j (\alpha_j - \beta_j) = 0 \right\} \quad (43)$$

となる.  $V_{2\ell+1}^B = \emptyset$  ( $\ell = 1, 2, \dots$ ) や,  $V_k^B \subseteq V_k^G(\Omega)$  ( $k = 3, 4, \dots$ ) などが直ちに従う. 本稿では 4 次までの標準化を議論するが, 次の補題は有用である.

**補題 3.1** 正の有理数  $\Omega$  に対して, 以下が成り立つ.

$$V_3^G(\Omega) = \begin{cases} \emptyset & (\Omega \neq 1/2, 2), \\ \text{span} \left\{ \zeta_1 \bar{\zeta}_2, \zeta_2 \bar{\zeta}_1 \right\} & (\Omega = 1/2), \\ \text{span} \left\{ \zeta_1 \bar{\zeta}_2, \zeta_2 \bar{\zeta}_1 \right\} & (\Omega = 2), \end{cases} \quad (44)$$

$$V_4^G(\Omega) = \begin{cases} V_4^B = \text{span} \left\{ \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1, \zeta_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2, \zeta_2^2 \bar{\zeta}_2 \right\} & (\Omega \neq 1/3, 1, 3), \\ V_4^B \oplus \text{span} \left\{ \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1, \zeta_1^2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2, \zeta_1^2 \bar{\zeta}_2, \zeta_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_1, \zeta_1 \zeta_2 \bar{\zeta}_2, \zeta_2^2 \bar{\zeta}_1, \zeta_2^2 \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 \right\} & (\Omega = 1), \\ V_4^B \oplus \text{span} \left\{ \zeta_1^3 \bar{\zeta}_2, \zeta_2 \bar{\zeta}_1^3 \right\} & (\Omega = 1/3), \\ V_4^B \oplus \text{span} \left\{ \zeta_1 \bar{\zeta}_2^3, \zeta_2^3 \bar{\zeta}_1 \right\} & (\Omega = 3). \end{cases} \quad (45)$$

<sup>6</sup>BG 標準化の逆問題 [8, 9] を考える際には, この一意性が重要である.

補題 3.1 は、我々が角周波数  $\Omega = 1$  の近傍で 4 次までの標準化のみを考える限りは、 $\Omega = 1$  以外での Gustavson 標準形は Birkhoff 標準形に一致することを保証する。標準形に関して以下の結果が得られる。

**命題 3.2** 式 (34)-(38) で与えられる JJQ 系の 4 次近似 Hamiltonian  $H(x, y)$  の標準形  $\mathcal{N}^s(\xi, \eta)$  ( $s = B, G$ ) を 4 次までで打ち切った多項式  $\tilde{\mathcal{N}}^s(\xi, \eta)$  ( $s = B, G$ ) は、 $\Omega$  の値が 1 に十分近いとき、以下のとおりである。

$$\tilde{\mathcal{N}}^B(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \frac{\Omega}{2}\zeta_2\bar{\zeta}_2 + \frac{3}{8}f_1\zeta_1^2\bar{\zeta}_1^2 + \frac{1}{4}f_2\zeta_1\zeta_2\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 + \frac{3}{8}f_3\zeta_2^2\bar{\zeta}_2^2 \quad (\Omega: \text{無理数}), \quad (46)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}^G(\xi, \eta) = \tilde{\mathcal{N}}^B(\xi, \eta) \quad (\Omega \neq 1: \text{有理数}), \quad (47)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}^G(\xi, \eta) = \tilde{\mathcal{N}}^B(\xi, \eta) + \frac{1}{16}f_2\zeta_1^2\bar{\zeta}_2^2 + \frac{1}{16}f_2\zeta_2^2\bar{\zeta}_1^2 \quad (\Omega = 1). \quad (48)$$

ただし、 $f_\ell$  ( $\ell = 1, 2, 3$ ) は (36)-(38) で与えられた定数で、 $\zeta_j$  ( $j = 1, 2$ ) は (40) で定義された複素変数である。

補題 3.2 のとおり、JJQ 系の物理諸定数が  $\Omega = 1$  近傍の値を与えている場合、 $\Omega = 1$  において 4 次標準形が不連続に変化する。

### 3.2 周期軌道

標準形 4 次多項式を Hamiltonian に持つ Hamilton 系を 4 次打ち切り系を呼ぼう。1 節で与えた標準形の定義より、4 次打ち切り系は第 1 積分として  $\mathcal{N}_2^s$  ( $s = B, G$ ) を許容している。従って、4 次打ち切り系は Liouville-Arnold の意味で可積分である。したがって、コンパクトな等エネルギー部分多様体は、ほとんど到るところ不変トラスで埋め尽くされる。このような構造は、もとの Hamiltonian の原点近傍の正則領域と似ていることが知られている。特に、退化した不変トラスとして得られる打ち切り系の周期軌道の近くには、もとの Hamilton 系の周期軌道が存在することが知られている [1, 10]。ここでは、第 1 積分  $\mathcal{N}_2^s$  ( $s = B, G$ ) のレベル集合として定義されるコンパクト部分多様体

$$M_{\Omega, J}^s = \left\{ \zeta \in \mathbf{C}^2 \mid \frac{1}{2}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \frac{\Omega}{2}\zeta_2\bar{\zeta}_2 = J \right\} \quad (J > 0, s = B, G) \quad (49)$$

も、ほとんど到るところ不変トラスで埋め尽くされることに着目し、退化した不変トラスとして得られる周期軌道について調べる。以下の結果が得られる。

**命題 3.3** 式 (34) で与えられる、JJQ 系の 4 次近似 Hamiltonian  $H(x, y)$  のパラメータ  $\Omega$  の値が 1 に等しくないが十分 1 に近いとする。このとき、4 次までの Birkhoff あるいは Gustavson 標準化打ち切り系の退化した不変トラスとして与えられる周期軌道で、レベル集合  $M_{\Omega}^s(J)$  ( $s = B, G$ ) 上を流れるものの軌跡は、標準化の種類によらず以下の 2 本である。

$$\mathcal{O}_{\Omega, J}^{(1)} = \{ \zeta \in D \mid \zeta_1 = \sqrt{2J}e^{it}, \zeta_2 = 0 \ (t \in \mathbf{R}) \} \quad (J > 0), \quad (50)$$

$$\mathcal{O}_{\Omega, J}^{(2)} = \{ \zeta \in D \mid \zeta_1 = 0, \zeta_2 = \sqrt{2J/\Omega}e^{it}, \ (t \in \mathbf{R}) \} \quad (J > 0). \quad (51)$$

このように、Birkhoff 標準形の場合（あるいは Gustavson 標準形が結果として Birkhoff 標準形と同じ場合）には、退化した不変トラスとして得られる周期軌道の軌跡は単純である。一方、命題 3.2 で述べたように、 $\Omega = 1$  の場合の 4 次 Gustavson 標準形は、 $\Omega \neq 1$  の場合の 4 次

標準形とは異なる形をしている。形の違いは、周期軌道に関して異なる情報を与えることも予想されるが、実際には  $\Omega \neq 1$  の場合と似た結果が得られる。

**命題 3.4**<sup>7</sup> 式 (34) で与えられる、JJQ 系の 4 次近似 Hamiltonian  $H(x, y)$  のパラメータ  $\Omega$  の値が 1 に等しいとする。このとき、4 次までの Gustavson 標準化打ち切り系の退化した不変トーラスとして与えられる周期軌道で、レベル集合  $M_\Omega^s(J)$  ( $s = G$ ) 上を流れるものの軌跡は 2 本存在し、(50) と (51) で与えられる 2 本である。

レベル集合  $M_\Omega^s(J)$  を埋め尽くす不変トーラスについては、 $\Omega = 1$  か否かに依らず以下の結果を得る。

**命題 3.5** JJQ 系の 4 次標準化打ち切り系において、Hamiltonian  $\mathcal{N}^s$  ( $s = B, G$ ) と第 1 積分第  $\mathcal{N}_2^s$  ( $s = B, G$ ) のレベル集合

$$L_{\Omega, E, J}^s == \{ \zeta \in \mathbf{C}^2 \mid \mathcal{N}^s = E, \mathcal{N}_2^s = J \} \quad (J > 0, s = B, G) \quad (52)$$

の位相構造は、 $E$  の値に応じて以下のとおり分類される。

$$L_{\Omega, E, J}^s \cong \begin{cases} T^2 & (J + \frac{3f_3}{2\Omega^2} J^2 < E < J + \frac{3f_1}{2} J^2) \\ S^1 & (E = J + \frac{3f_3}{2\Omega^2} J^2, J + \frac{3f_1}{2} J^2) \\ \emptyset & (\text{その他}). \end{cases} \quad (53)$$

## §4 おわりに

本稿では、量子計算素子の有力候補である Josephson 接合キュビット (JJQ) 系を対象に、Birkhoff 標準化および Gustavson 標準化の 4 次打ち切り系の解析を行なった。共鳴を支配するパラメータ  $\Omega$  の値が 1 の周辺では、 $\Omega = 1$  (1:1 共鳴) においてのみ標準形が異っていた。 $\Omega = 1$  における標準化 Hamiltonian の不連続性の影響を、標準化打ち切り系の特徴である可積分性を利用して解析した。その結果、標準化 Hamiltonian の不連続性は、標準化打ち切り系の原点近傍の不変トーラス族の構造や、退化トーラスとして得られる周期軌道には全く影響しないことが確かめられた。したがって、もとの JJQ 系に関しても原点近傍において、Hamiltonian の級数展開における斉 2 次部分である調和振動子の軌道の‘生き残り’と捉えられる周期軌道はパラメータ変化に関して‘安定’に振舞っていることが導かれる。

JJQ 系は本来は量子力学系として扱われるべきものであるが、その固有エネルギー値はパラメータ変化に関して連続的な変化を示しているように見える [4]。我々が今回構成した標準化の枠組みにおいても、トーラス量子化と命題 3.5 を組み合わせることでエネルギー固有値のパラメータに関する連続的な変化を導き出せると期待される。

今回のような結果が、最初に与える Hamiltonian の係数に最も一般性を持たせたり、標準化の次数を上げた際にも成り立つのが、ハイブリッド応用を進める上で、明らかにすべき今後の課題であろう。

<sup>7</sup>上野・奥 [5] における補題 3.2 は修正を要するが、論文全体としての主張（周期軌道分岐は生じず安定）には変更は生じない。

## 参考文献

- [1] J.K.Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems* (Memoirs of American Mathematical Society 81) (AMS, Providence, RI, 1968).
- [2] G.D.Birkhoff, *Dynamical Systems* (AMS, Providence, RI, 1927).
- [3] F.G.Gustavson, *Astron.J.*, **71** (1966), 670.
- [4] S.P.Yukon, *Quantum Computing in Solid State Systems* (Eds. B.Ruggiero *et al*, Springer-Verlag, NY, 2006), 137.
- [5] 上野嘉夫, 奥佑子, 数理解析研究所講究録 **1576** (2008), 1.
- [6] 勝本信吾, 河野公俊, 超伝導と超流動 (岩波書店, 2006).
- [7] A.C. Rose-Innes, E.H. Rhoderick, *Intorduction to Superconductivity*, 2nd ed. (Pergamon Press,1978).
- [8] Y.Uwano, *Journal of Physics A*, **33**(2000), 6635.
- [9] Y.Uwano, N.Chekanov,V.Rostovtev and S.Vinitsky, *Computer Algebra in Scientific Computing* (Eds.V.Ganzha *et al*, Springer-Verlag, Berlin, 1998), 441.
- [10] M.Kummer, *Commun. Math. Phys.*, **48**(1976), 53.