

# ハミルトン・ポントリヤーギン原理とリー・ディラック簡約 — 非圧縮性理想流体への応用 —

早稲田大学 基幹理工学部 吉村 浩明

Hiroaki Yoshimura

School of Science and Engineering, Waseda University

本稿では、配位空間がリー群で与えられる場合のハミルトン・ポントリヤーギン原理とラグランジュ・ディラック系及びその簡約化理論について述べる。すなわち、変分原理とディラック構造の簡約化を統合するリー・ディラック簡約によって陰的なオイラー・ポアンカレ方程式が導かれることを示し、さらに移流パラメータを含む場合へ拡張した上で、非圧縮性理想流体への応用を示す。

## 1 はじめに

ディラック構造は、シンプレクティック構造とポアソン構造を一般化した概念であり、元々、退化ラグランジュ系のためのディラックの拘束理論と関連して考案されたものである (Courant and Weinstein [1988]; Courant [1990])。ハミルトン力学と関連して、van der Schaft and Maschke [1995] や Bloch and Crouch [1997] 等によって、陰的なハミルトン系の枠組みが導入され、非ホロノミック系や回路系への応用が示された。ラグランジュ力学との関連では、Yoshimura and Marsden [2006a] によって、ディラック構造と陰的なラグランジュ系の枠組み提案され、拘束を受ける退化ラグランジュ系として回路や非ホロノミック系への応用が示された (Yoshimura and Marsden [2007a] も参照)。さらに、ディラック構造と変分原理の関係として、ハミルトン・ポントリヤーギン原理から標準的なラグランジュ・ディラック系が導かれることが解明された (Yoshimura and Marsden [2006b])。本稿では、配位多様体がリー群で与えられる場合の簡約化理論として、変分原理とディラック構造の両者の簡約を可能とするリー・ディラック簡約の理論について述べる。さらに、移流パラメータを含む場合への拡張を行い、その応用として非圧縮性理想流体の運動について考察する。

## 2 ディラック構造

**ディラック構造.** ディラック構造は Courant and Weinstein [1988] によって開発された幾何学的概念であり、シンプレクティック構造と概ポアソン構造の両者を包含する性質を有するものとして下記のように

定義が与えられる。すなわち、滑らかな多様体  $P$  に対して、接バンドル  $TP$  と余接バンドル  $T^*P$  のペアリングを  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  とすると、ポントリヤーギンバンドル  $TP \oplus T^*P$  は、全ての  $X, \bar{X} \in TP$  と  $\alpha, \bar{\alpha} \in T^*P$  に対して、非退化な対称なペアリング

$$\langle \langle (X, \alpha), (\bar{X}, \bar{\alpha}) \rangle \rangle := \langle \alpha, \bar{X} \rangle + \langle \bar{\alpha}, X \rangle$$

を備えており、 $P$  上のディラック構造は、 $D_P = D_P^\perp$  なる部分バンドル

$$D_P \subset TP \oplus T^*P$$

と定義できる。ここに、直交補空間  $D_P^\perp$  は、すべての  $x \in P$  に対して、

$$D_P^\perp(x) = \{(u_x, \beta_x) \in T_x P \times T_x^* P \mid \alpha_x(u_x) + \beta_x(v_x) = 0, \text{ for all } (v_x, \alpha_x) \in D_P(x)\}$$

として与えられる。ディラック構造の積分可能条件は、ポアソン構造のヤコビ恒等式やシンプレクティック構造の閉形式の条件に対応するものとして、 $D_P$  で値を持つ全ての  $(X_1, \alpha_1), (X_2, \alpha_2), (X_3, \alpha_3)$  に対する条件

$$\langle \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2, X_3 \rangle + \langle \mathcal{L}_{X_2} \alpha_3, X_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_{X_3} \alpha_1, X_2 \rangle = 0$$

によって与えられる。ここに、 $\mathcal{L}_X$  は、 $M$  上のベクトル場  $X$  に沿ったリー微分である。

上の条件はクーラン括弧  $[[\cdot, \cdot]] : \Gamma(TP \oplus T^*P) \times \Gamma(TP \oplus T^*P) \rightarrow \Gamma(TP \oplus T^*P)$ 、すなわち、

$$[[ (X, \alpha), (Y, \beta) ]]:= \left( [X, Y], \mathcal{L}_X \beta - \mathcal{L}_Y \alpha - \frac{1}{2} \mathbf{d}(\beta(X) - \alpha(Y)) \right)$$

が閉じている条件

$$[[\Gamma(D_P), \Gamma(D_P)]] \subset \Gamma(D_P) \quad \text{for } (X, \alpha), (Y, \beta) \in \Gamma(D_P)$$

と等価である。非ホロノミック拘束を受ける系では、ディラック構造に対する積分可能条件は成立しない。

**誘導されたディラック構造.** Yoshimura and Marsden [2006a] をもとに、配位多様体  $Q$  上の拘束ディストリビューションから誘導されるディラック構造について述べる。 $Q$  を  $n$  次元の微分可能多様体とし、その局所座標を  $q = (q^1, \dots, q^n)$  とする。運動学的な拘束は、ディストリビューション  $\Delta_Q \subset TQ$  によって与えられる。すなわち、各点  $q$  において、

$$\Delta_Q(q) = \{v \in T_q Q \mid \langle \omega^a(q), v \rangle = 0, a = 1, \dots, m < n\}$$

として与えられる。ここに、 $\omega^a$  は  $m$  個の独立した  $Q$  上の 1 形式である。 $\Delta_Q \subset TQ$  は、各点  $q$  で滑らか、かつ一定の次元  $n - m$  を有する。次に、 $T^*Q$  上のディストリビューション  $\Delta_{T^*Q}$  を

$$\Delta_{T^*Q} = (T\pi_Q)^{-1}(\Delta) \subset TT^*Q$$

のように定義する。但し,  $T\pi_Q : TT^*Q \rightarrow TQ$  は射影  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$  の微分写像である。一方,  $\Delta_{T^*Q}$  の零化元  $\Delta_{T^*Q}^\circ$  は, 各点  $z = (q, p) \in T^*Q$  に対して,

$$\Delta_{T^*Q}^\circ(z) = \{\alpha_z \in T_z^*T^*Q \mid \langle \alpha_z, w_z \rangle = 0, \forall w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)\}$$

と与えられる。

余接バンドル  $T^*Q$  上の正準シンプレクティック構造を  $\Omega$  としよう。このとき, 各点  $z = (q, p) \in T^*Q$  で, ファイバーが

$$\begin{aligned} D_{\Delta_Q}(z) &= \{(v_z, \alpha_z) \in T_zT^*Q \times T_z^*T^*Q \mid v_z \in \Delta_{T^*Q}(z), \\ &\quad \alpha_z(w_z) = \Omega_{\Delta_Q}(z)(v_z, w_z), \forall w_z \in \Delta_{T^*Q}(z)\} \end{aligned} \quad (1)$$

によって与えられる部分バンドル  $D_{\Delta_Q} \subset TT^*Q \oplus T^*T^*Q$  は,  $T^*Q$  上のディラック構造である。但し,  $\Omega_{\Delta_Q}$  は,  $\Omega$  の  $\Delta_{T^*Q}$  への制限を表す。式 (1) と等価な表現として下記のように与えることもできる。すなわち, 写像  $\Omega^\flat : TT^*Q \rightarrow T^*T^*Q$  を  $\Omega$  から誘導されるバンドル写像とすると,  $D_{\Delta_Q}$  は,

$$\begin{aligned} D_{\Delta_Q}(z) &= \{(w_z, \alpha_z) \in T_zT^*Q \times T_z^*T^*Q \mid w_z \in \Delta_{T^*Q}(z), \\ &\quad \alpha_z - \Omega^\flat(z) \cdot w_z \in \Delta_{T^*Q}^\circ(z)\} \end{aligned} \quad (2)$$

と表すことができる。 $D_{\Delta_Q}$  を  $\Delta_Q$  から  $T^*Q$  上に誘導されたディラック構造と呼ぶ。

**ディラック構造の局所表現.**  $n$  次元の配位多様体  $Q$  が  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  によって表されるように,  $Q$  の局所座標  $q^1, \dots, q^n$  を選ぶ。ディストリビューション  $\Delta_Q$  は, 各点  $q \in U$  で  $\Delta(q) \subset \mathbb{R}^n$  となるように,  $TQ$  の部分空間を定める。拘束部分空間の次元を  $n - m$  とすれば,  $\Delta(q)$  の基底として  $e_{m+1}(q), e_{m+2}(q), \dots, e_n(q)$  を選ぶことができる。

いま, 正準射影  $\pi_Q : T^*Q \rightarrow Q$  は, 各点  $z \in T^*Q$  に関する局所座標  $(q, p)$  を用いると,  $(q, p) \mapsto q$  と表すことができる。その微分写像  $T\pi_Q : (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \mapsto (q, \dot{q})$  を用いると,  $\Delta_{T^*Q}$  は,

$$\Delta_{T^*Q}(z) = \{v_{(q,p)} = (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \mid q \in U, \dot{q} \in \Delta(q)\}$$

となる。 $T^*T^*Q$  の点を  $\alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w)$  とする。但し,  $\alpha$  はコベクトルで  $w$  はベクトルである。 $\Delta_{T^*Q}$  の零化元  $\Delta_{T^*Q}^\circ$  は, 局所的に,

$$\Delta_{T^*Q}^\circ(z) = \{\alpha_{(q,p)} = (q, p, \alpha, w) \mid q \in U, \alpha \in \Delta^\circ(q), w = 0\}$$

と表される。ここに,  $\Delta^\circ$  は  $\Delta$  の零化元である。いま,  $\Omega$  に付随するバンドル写像  $\Omega^\flat : TT^*Q \rightarrow T^*T^*Q$  は, 各点  $z = (q, p)$  で,

$$\Omega^\flat(z) \cdot v_z = (q, p, -\dot{p}, \dot{q})$$

となり, 式 (2) における条件  $\alpha_z - \Omega^\flat(z) \cdot v_z \in \Delta_{T^*Q}^\circ(z)$  より, 各点  $z = (q, p)$  で,

$$(q, p, \alpha + \dot{p}, w - \dot{q}) \in \Delta_{T^*Q}^\circ(z)$$

となる。すなわち、

$$\alpha + \dot{p} \in \Delta^\circ(q) \quad \text{及び} \quad w - \dot{q} = 0$$

を得る。従って、 $D_{\Delta_Q}$  の局所表現として

$$D_{\Delta_Q}(z) = \{((q, p, \dot{q}, \dot{p}), (q, p, \alpha, w)) \mid \dot{q} \in \Delta(q), w = \dot{q}, \alpha + \dot{p} \in \Delta^\circ(q)\} \quad (3)$$

を得る。

### 3 ラグランジュ・ディラック系

この節では、余接バンドル  $T^*Q$  上に誘導されたディラック構造  $D_{\Delta_Q}$  を用いて、ラグランジュ・ディラック系の定義を行う。この理論は、ディラックの意味での1次拘束に加えて、非ホロノミック拘束を有する退化ラグランジュ系に適用することが可能である。

**ルジャンドル変換.**  $Q$  を配位空間とし、ラグランジアン  $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$  を与えよう。但し、 $L$  は退化していてもよい。ルジャンドル変換  $\mathbb{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$  を  $L$  のファイバー微分

$$\mathbb{F}L(v) \cdot w = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(v + sw)$$

によって定義する。ここで、 $v, w \in T_qQ$  であり、 $\mathbb{F}L(v) \cdot w$  は、 $L$  の  $v$  における  $w$  方向のファイバー  $T_qQ$  に沿った微分である。写像  $\mathbb{F}L$  はファイバー保存写像であり、各点  $q \in Q$  で、ファイバー  $T_qQ$  からファイバー  $T_q^*Q$  へ写像される。 $TQ$  の局所座標  $(q, v)$  では、 $L$  のファイバー微分は、局所座標で、

$$\mathbb{F}L(q, v) = \left( q, \frac{\partial L}{\partial v} \right)$$

と表される。すなわち、

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

となる。ここに、 $(q, p)$  は余接バンドル  $T^*Q$  の局所座標である。

ラグランジアンが正則な場合、写像  $\mathbb{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$  は、逆写像を持ち、いわゆるルジャンドル変換のナイーブな定義を与えるが、ラグランジアン  $L$  が退化した場合でも、 $\Delta_Q \subset TQ$  の  $\mathbb{F}L$  による像  $P = \mathbb{F}L(\Delta_Q) \subset T^*Q$  は、運動量相空間の拘束部分空間として意味を持つ。 $\Delta_Q = TQ$  の場合、ルジャンドル変換によって定義される  $P$  は、ディラックの拘束理論の意味で、**1次拘束の空間**と一致する。すなわち、ここで、我々が扱う  $P = \mathbb{F}L(\Delta_Q)$  は、拘束ディストリビューション  $\Delta_Q \subset TQ$  を含むという意味で、ディラックの拘束理論における1次拘束を一般化したものとなっている。これを**運動量拘束空間**と呼ぶことにしよう。

以下に、ラグランジアンが退化している場合を含めて、ラグランジュ・ディラック系 (陰的なラグランジュ系) の理論的な枠組みを見てみよう。

**注意.** 実際に、ディラックの意味での1次拘束を考える場合、それに付随して**整合条件**も考える必要があることは言うまでもない。

**一般化エネルギー関数.** ラグランジアン  $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$  に付随して、一般化エネルギー関数  $E: TQ \oplus T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$E(q, v, p) := \langle p, v \rangle - L(q, v)$$

と定義する。  $E$  の微分  $dE: TQ \oplus T^*Q \rightarrow T^*(TQ \oplus T^*Q)$  は、局所的に、

$$dE(q, v, p) = \left( -\frac{\partial L}{\partial q}, p - \frac{\partial L}{\partial v}, v \right)$$

と書ける。言い換えれば、各点  $(q, v, p) \in TQ \oplus T^*Q$  に対して、  $dE(q, v, p): T_{(q, v, p)}(TQ \oplus T^*Q) \rightarrow \mathbb{R}$  なる  $T_{(q, v, p)}(TQ \oplus T^*Q)$  上の関数を定義すると考えることもできる。いま、これをルジャンドル写像による拘束ディストリビューション  $\Delta_Q \subset TQ$  の像、すなわち、運動量拘束空間  $P = \mathbb{F}L(\Delta_Q)$  の点  $(q, p)$  における接空間  $T_{(q, p)}P$  に制限すると

$$dE(q, v, p)|_{TP} = \left( q, p, -\frac{\partial L}{\partial q}, v \right) \quad (4)$$

となる。但し、  $p = \partial L / \partial v$  である。

**部分ベクトル場.**  $X: TQ \oplus T^*Q \rightarrow TT^*Q$  を部分ベクトル場としよう。但し、局所座標を用いて、

$$X(q, v, p) = (q, p, \dot{q}, \dot{p}) \quad (5)$$

と表される。ここで、

$$(X(q, v, p), dE(q, v, p)|_{TP}) \in D_{\Delta_Q}(q, p) \quad (6)$$

を満足する  $(E, X, D_{\Delta_Q})$  を**陰的なラグランジュ系**または**ラグランジュ・ディラック系**と呼ぶ。式(3)–(6)を用いて

$$\dot{q} = v \in \Delta(q), \quad \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta^\circ(q), \quad p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

を得る。

ラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D_{\Delta_Q})$  の**解曲線**  $(q(t), v(t), p(t))$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  は、  $(q(t), p(t)) = \mathbb{F}L(q(t), v(t))$  のもと、  $(q(t), p(t))$  がベクトル場  $X$  の積分曲線となるように与えられる。

**非ホロノミック系.**  $Q$  を  $n$  次元の配位多様体とする。拘束条件は、  $Q$  上の1形式  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$  の核、すなわち、1形式  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$  で張られる  $\Delta(q)$  の零化元  $\Delta^\circ(q)$  によって

$$\Delta(q) = \{v^i \in \mathbb{R}^n \mid \omega_i^a(q)v^i = 0, a = 1, \dots, m\}$$

と表すことができる。ここに、 $\omega^a = \omega_i^a(q) dq^i$ ,  $a = 1, \dots, m$  である。ラグランジュの未定乗数  $\mu_a$ ,  $a = 1, \dots, m$  を用いて、非ホロノミック系は、ラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D_{\Delta_Q})$  の局所表現として、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial L}{\partial q^i} \\ v^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_a \omega_i^a(q) \end{pmatrix}, \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial v^i}, \\ 0 &= \omega_i^a(q) v^i \end{aligned}$$

と表すことができる。

**エネルギーの保存.** ラグランジュ・ディラック系では、次のように、エネルギー保存が成立する。すなわち、 $(q(t), v(t), p(t))$  をラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D_{\Delta_Q})$  の解曲線とする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(q(t), v(t), p(t))|_P) &= \langle \dot{p}, v \rangle + \langle p, \dot{v} \rangle - \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial v} \dot{v} \\ &= \left\langle \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q}, v \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成立し、エネルギー  $E(q(t), v(t), p(t))|_P$  は、時間  $t$  に関して一定であることが分る。但し、 $v = \dot{q} \in \Delta(q)$  及び  $\dot{p} - \partial L / \partial q \in \Delta^\circ(q)$  であり、ルジャンドル変換  $p = \partial L / \partial v$  を用いた。

**標準的なラグランジュ・ディラック系.** 拘束がない場合、すなわち、 $\Delta_Q = TQ$  のとき、 $T^*Q$  上の**正準ディラック構造**  $D$  は、各点  $z \in T^*Q$  で、 $\Omega$  を用いて、

$$D(z) = \{(v_z, \alpha_z) \in T_z T^*Q \times T_z^* T^*Q \mid \alpha_z(w_z) = \Omega_z(v_z, w_z), \forall w_z \in T_z T^*Q\}$$

と与えられる。局所座標を用いて、 $X(q, v, p) = (q, p, \dot{q}, \dot{p})$  及び

$$\Omega((q, p, u_1, \alpha_1), (q, p, u_2, \alpha_2)) = \langle \alpha_2, u_1 \rangle - \langle \alpha_1, u_2 \rangle$$

とすると、ラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D)$  は、条件

$$(X, \mathbf{d}E|_{TF}) \in D$$

を満たす。すなわち、

$$\left\langle -\frac{\partial L}{\partial q}, u \right\rangle + \langle v, \alpha \rangle = \langle \alpha, \dot{q} \rangle - \langle \dot{p}, u \rangle$$

が全ての  $u$  と  $\alpha$  について成立する条件として与えられる。但し、 $(u, \alpha)$  は、 $T_{(q,p)} T^*Q$  の点の局所表現である。上記の条件が全ての  $(u, \alpha)$  で成立することから、

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{7}$$

とともに、2階のベクトル場の条件

$$\dot{q} = v \quad (8)$$

が導かれる。さらに、ベース点が一致する条件、すなわち、ルジャンドル変換

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} \quad (9)$$

を伴うことから、これら3つの式がオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

と等価であることは明らかである。このような標準的なラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D)$  から導かれた式(7)–(9)は、陰的に、オイラー・ラグランジュ方程式を含むことから、これらを陰的なオイラー・ラグランジュ方程式と呼ぶことにする。

**ハミルトン・ポントリヤーギン原理。** 次にラグランジュ・ディラック系と変分原理の関係を考えてみよう。いま、 $TQ \oplus T^*Q$  上の曲線について、

$$\mathfrak{F}(q, v, p) = \int_{t_1}^{t_2} \{L(q(t), v(t)) + \langle p(t), \dot{q}(t) - v(t) \rangle\} dt$$

なる作用積分を考える。ハミルトン・ポントリヤーギン原理は  $\mathfrak{F}$  の停留条件

$$\delta \mathfrak{F} = 0$$

として与えられる (Yoshimura and Marsden [2006b])。但し、曲線  $q(t)$  の変分は両端固定であり、 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  である。直接計算によって、

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{F}(q, v, p) &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \{L(q(t), v(t)) + \langle p(t), \dot{q}(t) - v(t) \rangle\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (\dot{q} - v) \delta p + \left( -\dot{p} + \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left( -\dot{p} + \frac{\partial L}{\partial v} \right) \delta v \right\} dt + p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が全ての  $\delta q, \delta v$  及び  $\delta p$  に対して成立することから、陰的なオイラー・ラグランジュ方程式

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{q} = v, \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

が得られる。すなわち、標準的な陰的ラグランジュ系  $(E, X, D)$  をハミルトン・ポントリヤーギン原理によって定式化することができる。

## 4 リー・ディラック簡約

力学系の配位空間  $Q$  がリー群  $G$  によって与えられる場合は、剛体や理想流体の運動を考える上で極めて重要である。これらに関連して、オイラー・ポアンカレ簡約やリー・ポアソン簡約の理論が知られており、

ディラック構造の簡約化としては、リー・ポアソン簡約に基づくものが Courant [1990], Blankenstein and van der Schaft [2001] 等によって提案されている。ここでは、余接バンドル  $P = T^*G$  上の標準的なディラック構造  $D \subset TP \oplus T^*P$  とリー群上のハミルトン・ポントリヤーギン原理の両者を包含する統一的な簡約化として、リー・ディラック簡約について述べる (Yoshimura and Marsden [2007b]).

**リー群上のポントリヤーギンバンドルとその商空間.** ハミルトン・ポントリヤーギン原理における作用積分中の曲線  $(g(t), v(t), p(t))$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  に対してリー群  $G$  は、各要素に対して、左移動、接リフト及び余接リフトによって作用する。すなわち、 $h \in G$  の要素の作用は、曲線  $g(t) \in G$ ,  $v(t) \in T_{g(t)}G$  及び  $p(t) \in T_{g(t)}^*G$  に対して、

$$h \cdot (g(t), v(t), p(t)) = (hg(t), T_{g(t)}L_h \cdot v(t), T_{hg(t)}^*L_{h^{-1}} \cdot p(t))$$

のようになる。ここに、 $T_{g(t)}L_h : T_{g(t)}G \rightarrow T_{hg(t)}G$  は点  $g(t)$  における  $h$  による左移動  $L_h : G \rightarrow G$ ;  $g(t) \mapsto hg(t)$  の接写像であり、 $T_{hg(t)}^*L_{h^{-1}} : T_{g(t)}^*G \rightarrow T_{hg(t)}^*G$  は  $T_{hg(t)}L_{h^{-1}} : T_{hg(t)}G \rightarrow T_{g(t)}G$  の双対写像である。

ここで、以下の微分同相写像によって、余接バンドル  $T^*G$  を  $G \times \mathfrak{g}^*$  として局所自明化しよう。すなわち、

$$\bar{\lambda} : T^*G \rightarrow G \times \mathfrak{g}^* : \bar{\lambda}(p_g) = (g, T_e^*L_g(p)).$$

同様に、接バンドル  $TG$  も微分同相写像

$$\lambda : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g} : \lambda(v_g) = (g, T_gL_{g^{-1}}(v))$$

により、 $G \times \mathfrak{g}$  として局所自明化できる。これらを用いて、ポントリヤーギンバンドル  $TG \oplus T^*G$  に対する  $G$  の作用による商空間として

$$(TG \oplus T^*G) / G \cong V$$

を定義する。但し、 $V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  である。これを簡約化されたポントリヤーギンバンドルと呼ぼう。

さらに、ポントリヤーギンバンドル  $TT^*G \oplus T^*T^*G$  を以下のように局所自明化する。すなわち、

$$\begin{aligned} TT^*G \oplus T^*T^*G &\cong T(G \times \mathfrak{g}^*) \oplus T^*(G \times \mathfrak{g}^*) \\ &\cong (G \times \mathfrak{g}^*) \times (V \oplus V^*). \end{aligned}$$

ここに、 $V^*$  は  $V$  の双対空間であり、 $V^* = \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}$  である。リー群  $G$  の要素  $h$  による  $(g, \mu, \xi, \rho, \nu, \eta) \in (G \times \mathfrak{g}^*) \times (V \oplus V^*)$  への作用は、第一要素への作用のみである。すなわち、

$$h \cdot (g, \mu, \xi, \rho, \nu, \eta) = (h \cdot g, \mu, \xi, \rho, \nu, \eta)$$

である。

こうしてポントリヤーギンバンドル  $TT^*G \oplus T^*T^*G$  に対する  $G$  の作用による商空間として

$$(TT^*G \oplus T^*T^*G) / G \cong \mathfrak{g}^* \times (V \oplus V^*)$$

を定義できる。



**ハミルトン・ポントリヤーギン原理の簡約化.** ラグランジアン  $L$  を左不変としよう. 関数  $\langle p(t), \dot{g}(t) - v(t) \rangle$  もまた左不変であることが容易に示せるので, 作用積分

$$\mathfrak{F}(g, v, p) = \int_{t_1}^{t_2} \{L(g(t), v(t)) + \langle p(t), \dot{g}(t) - v(t) \rangle\} dt$$

は左不変となる. これより,  $TG \oplus T^*G$  上の陰的なオイラー・ポアンカレ方程式

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{g} = v, \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial g}$$

が得られることは明らかである.

次に, ハミルトン・ポントリヤーギン原理を簡約化するために, ポントリヤーギンバンドル  $(TG \oplus T^*G)/G \cong V$  上の作用積分

$$[\mathfrak{F}]_G(\eta, \mu) = \int_{t_1}^{t_2} \{l(\eta(t)) + \langle \mu(t), \xi(t) - \eta(t) \rangle\} dt$$

を考えよう. ここに,  $\xi = g^{-1}\dot{g}$ ,  $\eta = g^{-1}v$  及び  $\mu = T_e^*L_g p$  である. **簡約化されたハミルトン・ポントリヤーギン原理**は

$$\delta[\mathfrak{F}]_G = \delta \int_{t_1}^{t_2} \{l(\eta(t)) + \langle \mu(t), \xi(t) - \eta(t) \rangle\} dt = 0$$

として定義できる. 但し,

$$\delta\xi(t) = \dot{\zeta}(t) + [\xi(t), \zeta(t)]$$

であり,  $\zeta(t_1) = \zeta(t_2) = 0$  を満たす. 直接計算をすると

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial l}{\partial \eta} \delta\eta + \delta\mu \cdot (\xi - \eta) + \mu \cdot (\delta\xi - \delta\eta) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} - \mu \right) \delta\eta + \delta\mu \cdot (\xi - \eta) + \mu \cdot \delta\xi \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} - \mu \right) \delta\eta + \delta\mu \cdot (\xi - \eta) + \mu \cdot (\dot{\zeta} + \text{ad}_\xi \zeta) \right\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \frac{\partial l}{\partial \eta} - \mu \right) \delta\eta + \delta\mu \cdot (\xi - \eta) + (-\dot{\mu} + \text{ad}_\xi^* \mu) \cdot \zeta \right\} dt + [\mu \cdot \zeta]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

となり, **陰的なオイラー・ポアンカレ方程式**

$$\mu = \frac{\partial l}{\partial \eta}, \quad \xi = \eta, \quad \dot{\mu} = \text{ad}_\xi^* \mu$$

を得る.

**ディラック構造の自明化.** 微分同相写像  $\bar{\lambda}: P = T^*G \rightarrow \bar{P} = G \times \mathfrak{g}^*$ , すなわち,  $\bar{\lambda}(p_g) = (g, \mu = T_e^*L_g(p))$  による左自明化により,  $\bar{P}$  上の正準1形式  $\theta$  は, 各  $(g, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  に対し,

$$\theta(g, \mu) \cdot (v, \rho) = \mu(T_g L_{g^{-1}} v)$$

と表される. 但し,  $(v, \rho) \in T_g G \times \mathfrak{g}^*$  である. 正準2形式  $\omega = -d\theta$  は, 各  $(g, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  に対し,

$$\omega(g, \mu)((v, \rho), (w, \sigma)) = \langle \sigma, T_g L_{g^{-1}} v \rangle - \langle \rho, T_g L_{g^{-1}} w \rangle + \langle \mu, [T_g L_{g^{-1}} v, T_g L_{g^{-1}} w] \rangle$$

となる。但し、 $(v, \rho), (w, \sigma) \in T_g G \times \mathfrak{g}^*$  であり、以下の恒等式を用いた (Abraham and Marsden[1978])、

$$\omega(X, Y) = -d\theta(X, Y) = -X[\theta(Y)] + Y[\theta(X)] + \theta([X, Y]).$$

こうして、 $P = T^*G$  上の正準ディラック構造

$$D \subset TP \oplus T^*P$$

から、 $\bar{\lambda}: P = T^*G \rightarrow \bar{P} = G \times \mathfrak{g}^*$  を用いて、 $\bar{P}$  上の自明化されたディラック構造  $\bar{D}$  を定義できる。すなわち、 $\bar{D}$  は各  $(g, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$  に対して、

$$\begin{aligned} \bar{D}(g, \mu) = \{ & ((v, \rho), (\beta, \eta)) \in (T_g G \times \mathfrak{g}^*) \times (T_g^* G \times \mathfrak{g}) \mid \\ & \langle \beta, w \rangle + \langle \sigma, \eta \rangle = \omega(g, \mu)((v, \rho), (w, \sigma)) \text{ for all } (w, \sigma) \in T_g G \times \mathfrak{g}^* \} \end{aligned}$$

と表すことができる。

**ディラック構造の不変性.**  $\Phi: G \times \bar{P} \rightarrow \bar{P}$  をリー群  $G$  の  $\bar{P}$  への作用とする。すなわち、

$$\Phi_h(g, \mu) = (hg, \mu).$$

ここに、 $h, g \in G$  及び  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  である。リー群  $G$  の作用による  $\bar{D}$  の左不変性は

$$\bar{D}(hg, \mu) = \bar{D}(g, \mu)$$

と表される。言い換えると、全ての  $(X, \alpha) \in \bar{D}$  に対して、

$$(\Phi_h \cdot X, (\Phi_h^*)^{-1} \alpha) \in \bar{D}$$

が成立する時、 $\bar{D}$  は  $G$ -不変であるという。

**リー・ディラック構造.**  $\bar{D}$  を  $G$  で割った商空間は

$$[\bar{D}]_G \cong D/G \subset (TP \oplus T^*P)/G$$

で与えられる。ここに、 $[\bar{D}]_G$  は、 $P/G \cong \mathfrak{g}^*$  上のベクトルバンドル

$$TP/G \cong \mathfrak{g}^* \times V$$

上のディラック構造であり、 $P = T^*G$  上の正準ディラック構造  $D$  の簡約として定義できる。局所座標を用いて、各  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  に対して、 $[\bar{D}]_G(\mu)$  は

$$[\bar{D}]_G(\mu) = \{ ((\xi, \kappa), (\nu, \xi)) \in V \oplus V^* \mid \nu + \kappa = \text{ad}_\xi^* \mu \}$$

と与えられる。

**一般化エネルギーの微分写像に関する簡約.** ラグランジアン  $L : TG \rightarrow \mathbb{R}$  は左不変であるので, 全ての  $g, h \in G$  と  $v \in T_g G$  に対して

$$L(T_g L_h \cdot v) = L(v)$$

が成立する. ポントリヤーギンバンドル  $TG \oplus T^*G$  上の一般化エネルギー関数

$$E(g, v, p) = \langle p, v \rangle - L(g, v)$$

も左不変である.  $E$  の微分写像  $dE : TG \oplus T^*G \rightarrow T^*(TG \oplus T^*G)$  は同変的であり, 局所的に

$$dE = \left( g, v, p, -\frac{\partial L}{\partial g}, p - \frac{\partial L}{\partial v}, v \right)$$

と表される.  $G$  による商空間  $(TG \oplus T^*G)/G$  及び  $T^*(TG \oplus T^*G)/G$  は共に滑らかであり, 写像  $dE$  の商として

$$[dE]_G : (TG \oplus T^*G)/G \rightarrow T^*(TG \oplus T^*G)/G$$

を定義できる. 一方,  $TG \oplus T^*G \cong G \times V$  による局所自明化のもと, 一般化エネルギー関数  $\bar{E} : G \times V \rightarrow \mathbb{R}$  は,

$$\bar{E}(g, \eta, \mu) = \langle \mu, \eta \rangle - \bar{L}(g, \eta)$$

と表され, これを  $V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  に制限した関数

$$[\bar{E}]_G := \bar{E}|_V = \langle \mu, \eta \rangle - l(\eta)$$

を簡約化された一般化エネルギー関数と呼ぼう.  $\bar{E}$  の微分写像は

$$d\bar{E} : G \times V \rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \times (V \oplus V^*)$$

と与えられ,  $d\bar{E}$  の簡約は, 写像  $d\bar{E}$  の  $G$  による商, すなわち,

$$[d\bar{E}]_G : V \rightarrow V \times \mathfrak{g}^* \times V^*$$

として, 各  $(\eta, \mu) \in V$  に対して,

$$[d\bar{E}]_G(\eta, \mu) = \left( \eta, \mu, 0, \mu - \frac{\partial l}{\partial \eta}, \eta \right)$$

のように定義できる. ここに,  $l : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  は簡約化されたラグランジアンであり,  $\lambda : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  を用いて,  $\bar{L} = L \circ \lambda^{-1} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  をリー環に制限することによって,  $l = \bar{L}|_{\mathfrak{g}} = [\bar{L}]_G$  として与えられる.

**簡約化したルジャンドル変換.** ルジャンドル変換  $\mathbb{F}\bar{L} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}^*$  は同変的であり, 簡約化したルジャンドル変換は

$$\mathbb{F}l := [\mathbb{F}\bar{L}]_G : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*; \quad \eta \mapsto \mu = \frac{\partial l}{\partial \eta}$$

のように定義できる。これにより、簡約化された運動量拘束空間は  $[\bar{P}]_G = \mathbb{F}l(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^*$  と定義できる。ここに、 $[\bar{P}]_G$  は、 $[\bar{E}]_G$  の  $\eta$  に関する停留条件、すなわち、

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \eta} = \mu - \frac{\partial l}{\partial \eta} = 0$$

からも求めることができる。よって、写像  $[\mathbf{d}\bar{E}]_G : V \rightarrow \mathfrak{g}^* \times (V \oplus V^*)$  を  $[T\bar{P}]_G \subset \mathfrak{g}^* \times V$  に制限して

$$[\mathbf{d}\bar{E}]_G(\eta, \mu)|_{\mathfrak{g}^* \times V} = (\mu, 0, \eta) \in \mathfrak{g}^* \times V^*$$

を得る。

**簡約化された部分ベクトル場。** 部分ベクトル場  $X : TG \oplus T^*G \rightarrow TT^*G$ 、すなわち、

$$X(g, v, p) = (g, p, \dot{g}, \dot{p})$$

において、 $\dot{g}$  と  $\dot{p}$  は  $(g, v, p)$  の関数である。 $X$  は左不変であり、

$$h \cdot X(g, v, p) = X(hg, T_g L_h \cdot v, T_{hg}^* L_{h^{-1}} \cdot p)$$

である。 $TG \oplus T^*G \cong G \times V$  により、部分ベクトル場は  $\bar{X} : G \times V \rightarrow G \times \mathfrak{g}^* \times V$  として局所自明化できる。これより、 $\bar{X}$  の簡約として  $[\bar{X}]_G : V \rightarrow \mathfrak{g}^* \times V$ 、すなわち、

$$[\bar{X}]_G(\eta, \mu) = (\mu, \xi, \dot{\mu}) \in \mathfrak{g}^* \times V$$

を導入できる。ここに、 $\xi$  と  $\dot{\mu}$  は  $(\eta, \mu)$  の関数である。

**オイラー・ポアンカレ・ディラック簡約。** 式(6)で述べたように、リー群上の標準的なラグランジュ・ディラック系  $(E, X, D)$  は、 $p_g = \mathbb{F}L(v_g) \in P$  のもと、各点  $(g, v, p) \in TG \oplus T^*G$  に対して

$$(X(g, v, p), \mathbf{d}E(g, v, p)|_{TP}) \in D(g, p)$$

を満たす。この  $(E, X, D)$  の簡約は、 $(\eta, \mu) \in V$  に対して、条件

$$([\bar{X}]_G(\eta, \mu), [\mathbf{d}\bar{E}]_G(\eta, \mu)|_{\mathfrak{g}^* \times V}) \in [\bar{D}]_G(\mu)$$

を満たす  $([\bar{E}]_G, [\bar{X}]_G, [\bar{D}]_G)$  として与えられる。但し、 $\mu = \mathbb{F}l(\eta) \in \mathfrak{g}^*$  が成立する。ここに、

$$([\bar{E}]_G, [\bar{X}]_G, [\bar{D}]_G)$$

を簡約化されたラグランジュ・ディラック系と呼ぼう。これより、 $V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  上の陰的なオイラー・ポアンカレ方程式

$$\mu = \frac{\partial l}{\partial \eta}, \quad \xi = \eta, \quad \frac{d\mu}{dt} = \text{ad}_\xi^* \mu$$

が自然に導かれる。

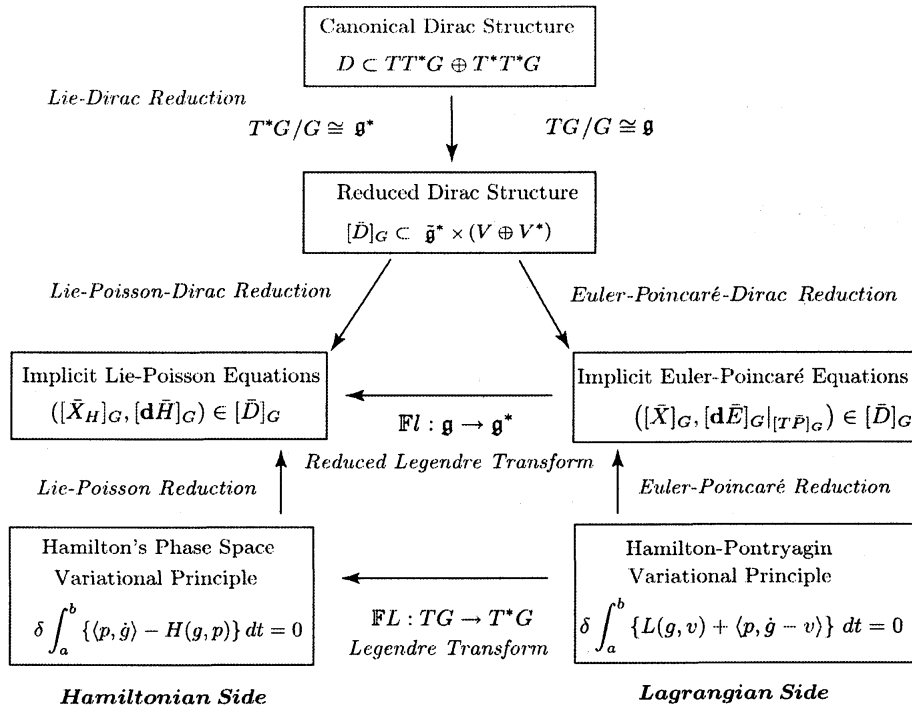


図 1: リー・ディラック簡約

リー・ポアソン・ディラック簡約. 標準的なラグランジュ・ディラック系と同様に, リー群上の標準的なハミルトン・ディラック系 (陰的なハミルトン系) は

$$(X_H, \mathbf{d}H) \in D$$

を満たす  $(H, X_H, D)$  として与えられる. ここに,  $H: T^*G \rightarrow \mathbb{R}$  はハミルトニアン,  $X_H: T^*G \rightarrow TT^*G$  は  $T^*G$  上のベクトル場, さらに,  $D$  は  $T^*G$  上の正準ディラック構造である. この条件から,

$$\dot{g} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial g}$$

としてハミルトン方程式を得ることができる. 標準的なハミルトン・ディラック系  $(H, X_H, D)$  の簡約は, 各点  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  に対して, 条件

$$([\bar{X}_H]_G(\mu), [\mathbf{d}\bar{H}]_G(\mu)) \in [\bar{D}]_G(\mu)$$

を満たす  $([\bar{H}]_G, [\bar{X}_H]_G, [\bar{D}]_G)$  によって与えられる. 但し,  $[\bar{X}_H]_G = (\mu, \xi(\mu), \dot{\mu})$ ,  $\bar{H} = H \circ \bar{\lambda}^{-1}: G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  及び  $[\mathbf{d}\bar{H}]_G = (\mu, 0, \partial h / \partial \mu)$  である. ここに  $h: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  は簡約化されたハミルトニアンであり,  $\bar{H}$  を  $\mathfrak{g}^*$  に制限することによって  $h = \bar{H}|_{\mathfrak{g}^*} = [\bar{H}]_G$  と与えられる. これより,  $V = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$  上の陰的なリー・ポアソン方程式が

$$\xi = \frac{\partial h}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \text{ad}_\xi^* \mu$$

のように導かれる。

以上に述べたリー群上のディラック構造と変分原理の簡約化は、図1に示すように、ラグランジュ・ディラック系及びハミルトン・ディラック系の簡約化を統合する一般化理論であることは言うまでもない。本稿では、この簡約化理論をリー・ディラック簡約と呼ぶ。

## 5 非圧縮性理想流体力学への応用

**完全流体の幾何学と歴史的経緯.** Arnol'd [1966] は、向き付けされた右不変の計量

$$T(\mathbf{v}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 d^3x$$

を持つリーマン多様体  $\mathcal{D}$  上の体積保存の微分同相写像群  $\text{Diff}_{\text{Vol}}(\mathcal{D})$  の測地線として非圧縮性理想流体 (完全流体) の運動を表現した。ここに、 $T(\mathbf{v})$  は流体の運動エネルギー密度である。Ebin and Marsden [1969] は同様の観点から非圧縮性理想流体に関するオイラー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

の局所解の存在と一意性を示した。Bretherton [1970] は完全流体の運動方程式を導くハミルトンの原理を示した。Marsden and Ratiu [1999] は、体積保存の微分同相写像群  $\text{Diff}_{\text{Vol}}(\mathcal{D})$  を配位空間として、右不変のラグランジアン  $L : T\text{Diff}_{\text{Vol}}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}$  に関するオイラー・ポアンカレ簡約, すなわち、変分  $\delta \xi = \dot{\eta} - [\xi, \eta]$ のもと、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} l(\xi(t)) dt = 0$$

から導かれるオイラー・ポアンカレ方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta l}{\delta \xi} = -\text{ad}_{\xi}^* \frac{\delta l}{\delta \xi}$$

によって、式(10)の非圧縮性理想流体のオイラー方程式が定式化できることを示した。ここに、 $\delta l / \delta \xi$  は  $l(\xi)$  の汎関数微分を表す。さらに、Marsden and Weinstein [1983] は Clebsch ポテンシャルを用いて完全流体の運動をリー・ポアソン構造の枠組みで定式化した。また、Cendra and Marsden [1987] は、Clebsch ポテンシャルを用いて流体に関する Lin 拘束を取り込んだ一般化された変分原理について研究を行った。

以上の研究は、Holm, Marsden and Ratiu [1998] によって、より一般化されたラグランジュ簡約の理論へと発展させられた。すなわち、ラグランジアンに関する半直積理論に基づく、移流パラメータ  $a_0 \in W^*$  に依存する右不変ラグランジアン  $L_{a_0} : TG \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$  に関するハミルトン原理の簡約化理論として、移流項を含むオイラー・ポアンカレ簡約

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} l(\xi(t), a(t)) dt = 0$$

が開発された。ここに、 $a(0) = a_0$  及び  $a(t) = g^{-1}a_0$  であり、変分形式  $\delta\xi = \dot{\eta} - [\xi, \eta]$  及び  $\delta a = -\eta a$  が成り立つ。さらに、 $W^*$  はベクトル空間  $W$  の双対空間である。これより、**移流パラメータを持つオイラー・ポアンカレ方程式**

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta l}{\delta \xi} = -\text{ad}_\xi^* \frac{\delta l}{\delta \xi} + \frac{\delta l}{\delta a} \diamond a$$

が導かれる。ここに、 $\diamond : W \times W^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  は**ダイヤモンド作用素**と呼ばれ

$$\diamond : W \times W^* \rightarrow \mathfrak{g}^*; \quad (v, w) \mapsto v \diamond w := \rho_v^*(w)$$

のように、線形写像  $\rho_v : \mathfrak{g} \rightarrow W$ ;  $\xi \mapsto \rho_v(\xi) := v\xi$  によって定義される。

**移流パラメータを持つハミルトン・ポントリヤーギン原理の簡約化。** 本稿では、移流パラメータに依存する右不変のラグランジアン  $L_{a_0} : TG \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$  を用いたリー・ディラック簡約について述べる。すなわち、ラグランジアンが移流パラメータに依存する場合のハミルトン・ポントリヤーギン原理の簡約は

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \{l(\eta(t), a(t)) + \langle \mu(t), \xi(t) - \eta(t) \rangle\} dt = 0$$

と与えられる。ここに、 $\xi = \dot{g}g^{-1}$  の変分は

$$\delta\xi = \dot{\eta} - [\xi, \eta]$$

として、また、移流パラメータ  $a \in W^*$  の変分は

$$\delta a = -\eta a$$

として与えられる。この簡約化理論により、**移流パラメータを持つ陰的なオイラー・ポアンカレ方程式**

$$\mu = \frac{\delta l}{\delta \eta}, \quad \xi = \eta, \quad \dot{\mu} = -\text{ad}_\xi^* \mu + \frac{\delta l}{\delta a} \diamond a$$

を導出することができる。

**非圧縮性流体の運動への応用。** 図2に示すように、 $\mathbb{R}^3$  の閉領域  $\mathcal{D}$  の微分同相写像  $G = \text{Diff}(\mathcal{D})$  を配位空間としよう。基準点  $X \in \mathcal{D}$  を設定すると、現在点は

$$x = \eta_t(X) \in \mathcal{D}$$

と表すことができる。但し、 $\eta_t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  は微分同相写像である。言い換えると、流体の運動は、 $G$  の時間依存要素の族として  $x = \eta(X, t)$  によって記述できる。ここに、 $\eta_t(X) = \eta(X, t)$  である。

図2に示すように、ラグランジュ記述の速度場、すなわち、物質速度場は、ラベル  $X$  を固定した運動の時間微分によって

$$\mathbf{V}(X, t) := \frac{\partial \eta_t(X)}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t} \Big|_X \eta_t(X) = \frac{\partial x(X, t)}{\partial t}$$

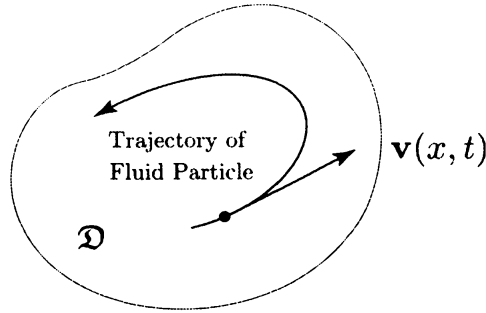


図 2: 流体の運動

と定義できる。一方で、オイラー記述の速度場，すなわち，空間速度場は，ラベル  $x$  を固定して運動を時間微分することで，

$$\mathbf{v}(x, t) := \mathbf{V}(X, t) := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x \eta_t(X) = \mathbf{V}(\eta_t^{-1}(x), t)$$

のように定義できる。オイラー速度  $\mathbf{v}$  は  $\mathcal{D}$  上の時間  $t$  に依存する速度ベクトル場であり， $\mathbf{v}_t(x) := \mathbf{v}(x, t)$  である。

ラグランジュ（物質）速度  $(\eta, \dot{\eta})$  の空間からオイラー（空間）速度  $\mathbf{v}$  の空間への写像は

$$\mathbf{v} = \dot{\eta} \circ \eta^{-1}, \quad \text{i.e.,} \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{V}_t \circ \eta_t^{-1}$$

によって与えられる。ここに， $\mathbf{V}_t(X) := \mathbf{V}(X, t)$  である。

ある固定化された微分可能クラスの  $\mathcal{D}$  上の右不変ベクトル場の空間を  $\mathfrak{X}(\mathcal{D})$  とすると， $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$  である。  $\mathfrak{X}(\mathcal{D})$  の空間は  $\text{Diff}(\mathcal{D})$  のリー環であり，左ヤコビ・リー括弧を有する。左ヤコビ・リー括弧は通常のヤコビ・リー括弧にマイナスサインをつけたものである。ここでは， $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  を左ヤコビ・リー括弧とすると，元  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$  に対して

$$\text{ad}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = -[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

である。これは，左リー環によるそれ自身への随伴作用を表す。

さて， $\mathfrak{X}(\mathcal{D})^* := \Omega^1(\mathcal{D}) \otimes \text{Den}(\mathcal{D})$  を  $\mathfrak{X}(\mathcal{D})$  の幾何学的双対とし， $\mathcal{D}$  の 1 形式密度としよう。いま， $\alpha \otimes m \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})^*$  に対して， $\alpha \otimes m$  と  $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$  の  $L^2$  ペアリングが

$$\langle \alpha \otimes m, \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathcal{D}} \alpha \cdot \mathbf{u} m$$

のように定義できる。ここに， $\alpha \cdot \mathbf{u}$  は 1 形式とベクトル場の縮約であり， $m$  は測度を表す。特に， $\mathbb{R}^n$  の標準的な測度は  $m = d^n x$  として与えられる。随伴表現の双対は

$$\langle \text{ad}_{\mathbf{u}}^*(\alpha \otimes m), \mathbf{v} \rangle = - \int_{\mathcal{D}} \alpha \cdot [\mathbf{u}, \mathbf{v}] m$$

であり，

$$\text{ad}_{\mathbf{u}}^*(\alpha \otimes m) = (\mathcal{L}_{\mathbf{u}} \alpha + (\text{div}_m \mathbf{u}) \alpha) \otimes m = \mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\alpha \otimes m)$$



である。ここで、 $\operatorname{div}_m \mathbf{u}$  は測度  $m$  に関する  $\mathbf{u}$  の発散である。すなわち、 $\mathcal{L}_{\mathbf{u}} m = (\operatorname{div}_m \mathbf{u})m$  である。ダイヤモンド作用素  $\diamond : W \times W^* \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{D})^*$  は

$$\langle \Psi \diamond a, \mathbf{u} \rangle = - \int_{\mathcal{D}} \Psi \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{u}} a$$

として定義できる。但し、 $\Psi \in W$  及び  $a \in W^*$  である。上において、 $W^* \subset \mathfrak{T}(\mathcal{D}) \otimes \operatorname{Den}(\mathcal{D})$  はテンソル密度の空間であることは言うまでもない (Holm, Marsden and Ratiu [1998] を参照)。

**陰的なオイラー・ポアンカレ方程式。** 移流パラメータ  $\rho$  を含む簡約化ラグランジアン  $l : \mathfrak{g} \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$l(\mathbf{u}, \rho) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d^3x = \frac{1}{2} \langle \rho \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

と与えよう。ここに、 $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$  はあるオイラー速度を表す。

質量密度  $\rho$  に関する非圧縮性の条件と  $\mathbf{u}$  が  $\eta(t)$  に対応するフローである条件 (2 階ベクトル場の条件) を付加することにより、オイラー座標における簡約化されたハミルトン・ポントリヤーギン原理は、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} l(\mathbf{u}, \rho) + p(1 - \rho) + \langle \mathbf{\Pi}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle d^3x dt = 0$$

として与えられる。但し、 $\mathbf{v}$  の変分は

$$\delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad \text{及び} \quad \delta(\rho d^3x) = -\mathcal{L}_{\mathbf{w}}(\rho d^3x) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) d^3x$$

である。ここに、 $\mathbf{v} = \eta \circ \eta^{-1}$ 、 $\mathbf{w} = \delta \eta \circ \eta^{-1} \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})$  であり、 $\rho \otimes d^3x \in W^* \subset \mathfrak{T}(\mathcal{D}) \otimes \operatorname{Den}(\mathcal{D})$  は質量密度を表す。

以上において、 $p \in W$  と  $\mathbf{\Pi} \otimes d^3x \in \mathfrak{X}(\mathcal{D})^*$  はラグランジュ未定乗数となっているが、最終的に、各々、**圧力及び運動量密度**となることが分かる。また、境界条件として、ノイマン条件、すなわち、

$$\delta \eta(x, t_i) = 0, \quad \text{for } x \in \mathcal{D}; \quad \delta \eta(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) = 0, \quad \text{for all } t_1 \leq t \leq t_2$$

を与える。

こうして、簡約化されたハミルトン・ポントリヤーギン原理の停留条件より、

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} - \mathbf{\Pi} \right) \delta \mathbf{u} + \left( \frac{\delta l}{\delta \rho} - p \right) \delta \rho + \delta p(1 - \rho) + \langle \delta \mathbf{\Pi}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{\Pi}, \delta \mathbf{v} \rangle d^3x dt = 0,$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} (\rho \mathbf{u} - \mathbf{\Pi}) \delta \mathbf{u} + \left( -\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 + p \right) \cdot \nabla(\rho \mathbf{w}) \\ + \delta p(1 - \rho) + \langle \delta \mathbf{\Pi}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{\Pi}, \dot{\mathbf{w}} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \rangle d^3x dt = 0 \end{aligned}$$

が得られる。但し、

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) \quad \text{及び} \quad \delta \mathbf{v} = \dot{\mathbf{w}} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

である。整理すると、結局、

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{D}} (\rho \mathbf{u} - \mathbf{\Pi}) \delta \mathbf{u} + \delta p (1 - \rho) + \langle \delta \mathbf{\Pi}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle + \left\langle -\dot{\mathbf{\Pi}} - \text{ad}_{\mathbf{v}}^* \mathbf{\Pi} + \rho \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - p \right), \mathbf{w} \right\rangle d^3 x dt = 0$$

が全ての  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta p$ ,  $\delta \mathbf{\Pi}$  及び  $\mathbf{w}_t (= \delta \eta_t \circ \eta_t^{-1})$  について成立する。

以上の導出では、

$$\left\langle \frac{\delta l}{\delta \rho} \diamond (\rho d^3 x), w \right\rangle = \int_{\mathfrak{D}} \frac{\delta l}{\delta \rho} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{w}} (\rho d^3 x)$$

及び

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{\delta l}{\delta \rho} \cdot \delta \rho d^3 x = - \int_{\mathfrak{D}} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - p \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{w}) = \int_{\mathfrak{D}} \left\langle \rho \nabla \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2 - p \right), \mathbf{w} \right\rangle d^3 x$$

を用いた。

こうして、非圧縮性理想流体の運動方程式として、移流パラメータを含む陰的なオイラー・ポアンカレ方程式の枠組みで

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{\Pi} &= \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} = \rho \mathbf{u} \quad : \text{momentum density,} \\ (2) \quad \rho &= 1 \quad : \text{incompressibility constraint,} \\ (3) \quad \mathbf{v} &= \mathbf{u} \quad : \text{second-order vector field,} \\ (4) \quad \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \text{ad}_{\mathbf{v}}^* \mathbf{\Pi} &= \rho \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - p \right) \quad : \text{equation of motion} \end{aligned} \tag{11}$$

を得ることができる。

式 (11) において陰的なオイラー・ポアンカレ方程式から得られた非圧縮性理想流体の運動方程式は、言うまでもなく、通常のオイラー・ポアンカレ方程式から得られる式 (10) のオイラー方程式と等価であるが、より多くの流体力学的な関係式を含んでいる。

**注意.** ここでは、ハミルトン・ポントリヤーギン原理の簡約化によって、陰的なオイラー・ポアンカレ方程式の枠組みで非圧縮性理想流体の運動方程式を導出したが、半直積  $S = G \circledast W^*$  の余接バンドル上のディラック構造

$$D \subset TT^*S \oplus T^*T^*S$$

とそのリー・ディラック簡約によっても同様の結果が得られる。これについては紙面の都合により、他の機会に譲りたい。

**ケルヴィンの循環定理.** オイラー速度  $\mathbf{u}$  の流体のフローを  $\eta_t$  とすると、

$$\mathbf{u}_t = \frac{d\eta_t}{dt} \circ \eta_t^{-1}$$

である。いま、流体とともに動く滑らかな閉曲線を  $C_t := \eta_t \circ C_0$  とする。但し、 $C_t = C(\mathbf{u})$  とする。

閉曲線  $C_t$  に関する循環  $I(t)$  は

$$I(t) = \oint_{C(\mathbf{u})} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{C(\mathbf{u})} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} = \oint_{C(\mathbf{u})} \frac{\Pi}{\rho}$$

と表される。式 (11) の陰的なオイラー・ポアンカレ方程式のもと、循環  $I(t)$  の時間微分をとると

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \oint_{C(\mathbf{u})} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta l}{\delta \mathbf{u}} \right) \\ &= \oint_{C(\mathbf{u})} \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - p \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \oint_{C(\mathbf{u})} \mathbf{d} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 - p \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、循環  $I(t)$  が保存すること、すなわち、**ケルヴィンの循環定理**が成立することが分かる。

## 6 おわりに

本稿では、リー群上のハミルトン・ポントリヤーギン原理とディラック構造について述べ、特に、リー・ディラック簡約の理論によって、ラグランジュ・ディラック系及びハミルトン・ディラック系の簡約化が統一的に理解できることを示した。また、その発展として、ラグランジアンが移流パラメータに依存する場合のハミルトン・ポントリヤーギン原理とその簡約化の方法を示した。最後に、非圧縮性理想流体を例に、移流パラメータを持つ陰的なオイラー・ポアンカレ方程式の枠組みによってダイナミクスの定式化を行い、リー・ディラック簡約の有効性を示した。

## 7 謝 辞

本研究は、カリフォルニア工科大学の Jerrold E. Marsden 教授との共同研究の成果に基づいている。ここに同教授に感謝の意を表します。また、本研究の一部は、科学技術振興財団 CREST、日本学術振興会・科学研究費基盤 C (課題番号 1650216) 及び早稲田大学特定課題研究重点助成 (課題番号 2010A-606) の支援を受けている。

## 参考文献

- Arnol'd, V. [1966], Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16**, 319–361.
- Blankenstein, G. and van der Schaft, A. J. [2001], Symmetry and reduction in implicit generalized Hamiltonian systems, *Rep. Math. Phys.* **47** (1): 57–100.

- Bloch, A. M. and P. E. Crouch [1997], Representations of Dirac structures on vector spaces and nonlinear L–C circuits. In: *Differential Geometry and Control (Boulder, CO, 1997)*. Vol. 64. pp. 103–117. Amer. Math. Soc. Providence, RI.
- Bretherton, F. P. [1970], A note on Hamilton’s principle for perfect fluids, *Journal of Fluid Mechanics* **44**(1), 19–31.
- Cendra, H. and J. E. Marsden [1987], Lin constraints, Clebsch potentials and variational principles, *Physica D* **27**, 63–89.
- Courant, T. J. [1990], Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319**, 631–661.
- Courant, T. and A. Weinstein [1988], Beyond Poisson structures. In: *Action hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986)*. Vol. 27. pp. 39–49. Hermann. Paris.
- Ebin, D. G. and J. E. Marsden [1969], Groups of diffeomorphisms and the solution of the classical Euler equations for a perfect fluid, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (N.S.) **75**, 962–967.
- Holm, D. D., J. E. Marsden and T. S. Ratiu [1998], The Euler-Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories, *Adv. in Math.* **137**, 1–81.
- Marsden, J. E. and T. S. Ratiu [1999], *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 2nd ed. Springer-Verlag, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics*.
- Marsden, J. E. and A. Weinstein [1983], Coadjoint orbits, vortices and Clebsch variables for incompressible fluids, *Physica D* **7**, 305–323.
- van der Schaft, A. J. and B. M. Maschke [1995], The Hamiltonian formulation of energy conserving physical systems with external ports, *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik* **49**, 362–371.
- Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2006a], Dirac structures in Lagrangian mechanics. Part I: Implicit Lagrangian systems, *J. Geom. and Phys.* **57**, 133–156.
- Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2006b], Dirac structures in Lagrangian mechanics. Part II: Variational structures, *J. Geom. and Phys.* **57**, 209–250.
- Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2007a], Dirac structures and the Legendre transformation for implicit Lagrangian and Hamiltonian systems. *Lagrangian and Hamiltonian Methods in Nonlinear Control 2006*, volume 366 of *Lect. Notes in Contr. Inf. Sci. Series*, pages 233–247, Springer-Verlag.
- Yoshimura, H. and J. E. Marsden [2007b], Reduction of Dirac structures and the Hamilton-Pontryagin principle, *Reports on Mathematical Physics* **60**, 381–426.