数理解析研究所講究録
第 1693 巻 2010 年 1-10

形状記憶合金ワイヤーの運動を記述する熱弾性方程式の導出

岩手大学・人文社会科学部　岡部 真也 (Shinya Okabe),
Faculty of Humanities and Social Sciences,
Iwate University,

大阪大学・大学院基礎工学研究科　鈴木 貴 (Takashi Suzuki),
Graduate School of Engineering Science,
Osaka University,

宇部工業高等専門学校　吉川 周二 (Shuji Yoshikawa)[1]
Ube National College of Technology

1 序

形状記憶合金は, 常温下で変形をさせてもお湯をかけるなどして温度を高めるとその形状を復元する合金である. この形状記憶の効果は, 合金の格子構造が相転移を起こすことで生じることが知られている. 一方, 弾性曲線の問題は, 弾性変形をするワイヤーの運動を考察する問題であり, 多くの結果が知られている (例えば, [O] とその参考文献など). 本稿では, 空間内に配置された形状記憶合金製のワイヤー, 即ち, 熱移動の効果を加え Falk 型の自由エネルギーから定まる非線形的に弾性変形をするワイヤーの運動について考察する. ただしワイヤーは伸び縮みをしないものであり, またワイヤーのなす曲線は閉曲線であると仮定する. この形状記憶合金ワイヤーの熱弾性方程式の導出について紹介する.

古典的な形状記憶合金のモデルとして知られる Falk モデルは, まっすぐに配置された形状記憶合金の剪断歪み ϵ を秩序変数として相転移の Ginzburg-Landau 理論を適用することで得られる ([F]). Falk の提唱した Helmholz の自由エネルギー密度は,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(\epsilon,\theta,u_{xx}) &= \frac{1}{2}|u_{xx}|^2 + f(\epsilon,\theta) + f_0(\theta) \\
&= \frac{1}{2}|u_{xx}|^2 + \left(\frac{1}{6}|\epsilon|^6 - \frac{1}{4}|\epsilon|^4 + \frac{1}{2}(\theta-\theta_c)|\epsilon|^2\right) + f_0(\theta)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

で与えられる. ただし, u は変位, θ は温度を表す変数で, θ_c は相転移の臨界温度を表す正定数とする. このエネルギーの, 第一項 $|u_{xx}|^2/2$ を曲率エネルギー密度, 第二項 $f(\epsilon,\theta)$ を非線形弾性エネルギー密度, 第三項 $f_0(\theta)$ を熱エネルギー密度と呼ぶことにする. 形状記憶合金の相転移を表現する非線形弾性エネルギー $f(\epsilon,\theta)$ が, Falk モデルの特徴と言える. このエネルギーについての詳しい説明は [BS] を参照されたい. また, 本稿では簡単のため, 臨界温度を除く全ての物理定数を 1 に規格化した.

---

[1]E-mail: shoe@ube-k.ac.jp

ワイヤーの形状を表す閉曲線をΓで表す. ただし, $\Gamma = \{\gamma(\xi) : \xi \in \Xi\}$であり, ξは弧長パラメータとは限らない任意のパラメータとする. $\Gamma_0 = \{\gamma_0(\xi) : \xi \in \Xi\}$からの各点での変位ベクトルを$u(\xi)$とする, 即ち,

- $\gamma(\xi) := (\gamma_1(\xi), \gamma_2(\xi), \gamma_3(\xi))$: 形状を表す任意ベクトル.
- $\gamma_0(\xi) := (\gamma_1^0(\xi), \gamma_2^0(\xi), \gamma_3^0(\xi))$: 自然な形状 (original form), 簡単のため, 後で円と仮定するかもしれない.
- $u(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi), u_3(\xi))$: 変位を表すベクトル

とすると, $\gamma(\xi) = \gamma_0(\xi) + u(\xi)$が成り立つことが分かる (図 1).

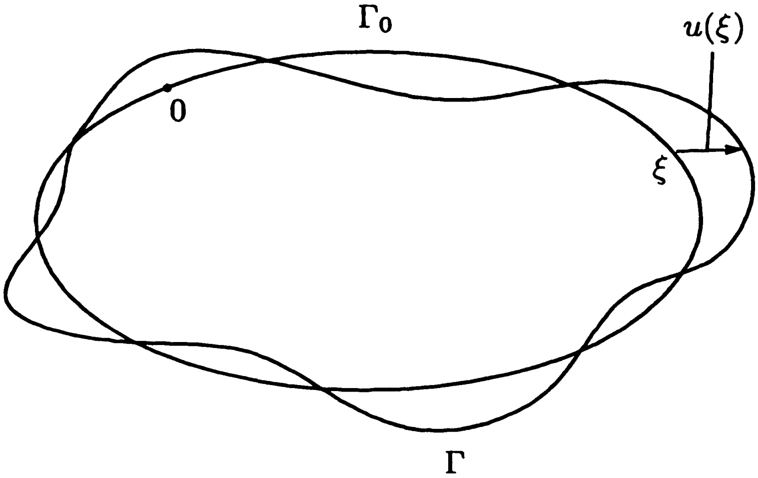

図 1. 自然な形状Γ_0と変形した形状Γ.

Falk のアイデアを利用するには, 歪みと自由エネルギー (1.1) がこの設定のもとでどのような形をとるかを考察する必要がある.

1.1 歪み

まず, 歪みについて考える. $\gamma_0(\xi)$を空間閉曲線とする. ただし, ξは任意のパラメータである (ここでは特に弧長パラメータとはしない). $\gamma_0(\xi)$に対して, 各点での変位ベクトルを$u(\xi)$と定義し, $\gamma(\xi) = \gamma_0(\xi) + u(\xi)$と表す. "歪み$\approx$線素の差" であることから, $\gamma_0(\xi)$と$\gamma(\xi)$の線素の差を求める:

$$\begin{aligned} |\gamma'(\xi)|^2 - |\gamma_0'(\xi)|^2 &= \{\gamma_0'(\xi) + u'(\xi)\} \cdot \{\gamma_0'(\xi) + u'(\xi)\} - \gamma_0'(\xi) \cdot \gamma_0'(\xi) \\ &= 2\gamma_0'(\xi) \cdot u'(\xi) + |u'(\xi)|^2 . \end{aligned}$$

ここで, 微小変化であるならば,

$$|\gamma_0'(\xi) \cdot u'(\xi)| \gg |u'(\xi)|^2$$

となることが期待されるから, 以下では歪みを

$$\gamma_0{}'(\xi)\cdot u'(\xi) \tag{1.2}$$

として議論を進めることとする.

1.2 エネルギー汎函数の定義

以下, $\gamma_0(\xi)$ を初期曲線とし, $\gamma(\xi,t)$ で時間に依存して変形する閉曲線を表す. また ξ は弧長パラメータとは限らない任意のパラメータとする. まず, エネルギー汎函数を定義する. 運動エネルギーを

$$M(\gamma) := \oint \left|\frac{\partial\gamma}{\partial t}(\xi,t)\right|^2 \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right| d\xi$$

と表す. ただし, $s(\xi,t)$ を $\gamma(\xi,t)$ の弧長とするとき,

$$ds = \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right| d\xi$$

であることに注意されたい. 同様に熱エネルギーを

$$F_0(\theta) := \oint f_0(\theta)\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right| d\xi,$$

曲率エネルギーを

$$E(\gamma) := \oint \left|\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\right|^2 \left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right| d\xi$$

と定義する. ただし, γ_{ss} は ξ に関する微分では

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2} = \left\{\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right|\frac{\partial^2\gamma}{\partial\xi^2} - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\gamma}{\partial\xi^2}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right\}\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right|^{-3}$$

と表示される. 最後に非線形弾性エネルギーだが,

$$f(\gamma_\xi,\theta;\gamma_{0\xi}) := \frac{1}{6}\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^6 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^4 + \frac{1}{2}(\theta-\theta_c)\left(\frac{\partial\gamma_0}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2 \tag{1.3}$$

と定義することによって, 非線形弾性エネルギーは

$$F(\partial_\xi\gamma,\theta;\partial_\xi\gamma_0) := \oint f(\partial_\xi\gamma,\theta;\partial_\xi\gamma_0)\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right| d\xi$$

と表現される (ただし, $u=\gamma-\gamma_0$). 以上より, 以降で考察していくエネルギー汎函数を以下で定義する:

$$\mathcal{E}(\gamma,\theta;\gamma_0) := M(\gamma) + E(\gamma) + F(\partial_\xi\gamma,\theta;\partial_\xi\gamma_0) + F_0(\theta).$$

以下, $\gamma_0 = \gamma_0(x)$ を初期閉曲線とし, $x \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z} =: S^1_L$ を γ_0 の弧長パラメータであるとする. つまり, $|\gamma_0{}'(x)| \equiv 1$ とする. 初期状態 $\gamma_0(x)$ から時間発展した閉曲線を $\gamma(x,t)$ とする. 以下, $\gamma(x,t)$ は

$$\text{(C)} \qquad |\partial_x \gamma(x,t)| \equiv 1$$

を満たすと仮定する. つまり, 「x は初期時刻のみならず各時刻 t において γ の弧長パラメータである」とする. この仮定から次が成り立つ:

$$M(\gamma) = \|\partial_t \gamma(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1_L)}, \; F_0(\theta) = \int_0^L f_0(\theta)dx, \; F(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0) = \int_0^L f(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0)dx.$$

また, (C) より $\partial_x\gamma \cdot \partial_x^2\gamma = 0$ だから,

$$E(\gamma) = \int_{S^1_L} \left| \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} \right) \frac{\partial\gamma}{\partial x} \right|^2 dx = \int_{S^1_L} \left| \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} \right|^2 dx$$

が成り立つ. よって Helmholtz の自由エネルギーは

$$\mathcal{E}(t) = \|\partial_t\gamma(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1_L)} + \left\|\partial_x^2\gamma(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(S^1_L)} + F(\partial_x\gamma(\cdot,t), \theta(\cdot,t); \partial_x\gamma_0(\cdot)) + F_0(\theta(\cdot,t))$$

で与えられる.

この自由エネルギーに対して, 適当な仮定のもと以下の方程式が得られることを次節で説明する;

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2\gamma + \partial_x^4\gamma + \partial_x f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0) - \partial_x \left\{ (v - 2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2)\partial_x\gamma \right\} = 0, \\ -\partial_x^2 v + \left|\partial_x^2\gamma\right|^2 v = 2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2 - \left|\partial_x^3\gamma\right|^2 + \left|\partial_x\partial_t\gamma\right|^2 + \partial_x^2 f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0) \cdot \partial_x\gamma, \\ \partial_t\theta - \partial_x^2\theta = (\partial_x\gamma_0 \cdot \partial_x(\gamma - \gamma_0))(\partial_t\partial_x\gamma \cdot \partial_x\gamma_0), \end{cases}$$

ただし,

$$\begin{aligned} f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0) &= (f_{\gamma_{1x}}, f_{\gamma_{2x}}, f_{\gamma_{3x}}) \\ &= \{ (\partial_x\gamma_0 \cdot \partial_x u)^5 - (\partial_x\gamma_0 \cdot \partial_x u)^3 + (\theta - \theta_c)(\partial_x\gamma_0 \cdot \partial_x u) \}\partial_x\gamma_0 \end{aligned}$$

とする.

2 方程式の導出

2.1 運動方程式

Hamilton 原理により方程式を導出する. つまり, 次の汎函数

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(\gamma, \theta; \gamma_0) = \int_{t_1}^{t_2} \{ & \|\partial_t\gamma(\cdot,t)\|^2_{L^2(S^1_L)} - \left\|\partial_x^2\gamma(\cdot,t)\right\|^2_{L^2(S^1_L)} \\ & - F(\partial_x\gamma(\cdot,t), \theta(\cdot,t); \partial_x\gamma_0(\cdot)) - F_0(\theta(\cdot,t)) \} \, dt \end{aligned}$$

に対する Euler-Lagrange 方程式を導出する. 次のように γ の変分を考える:

$$\gamma(x,t;\varepsilon) := \gamma(x,t) + \varepsilon\varphi(x,t).$$

ただし, ε は十分小さな正のパラメータ, φ は十分滑らかかつ $\varphi(x,t_1) = \varphi(x,t_2) = 0$ をみたすものとする. さらに, 今, 条件 (C) を仮定しているので,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left|\partial_x\gamma(x,t;\varepsilon)\right|\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

が成り立たねばならない. このとき,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left|\partial_x\gamma(x,t;\varepsilon)\right|\Big|_{\varepsilon=0} = \partial_x\gamma(x,t)\cdot\partial_x\varphi(x,t)$$

であるから, φ は任意の $x \in S_L^1$ と $t > 0$ に対して

$$\partial_x\gamma(x,t)\cdot\partial_x\varphi(x,t) = 0$$

を満たさねばならない. さて, 実際にエネルギー汎函数の第一変分を計算する.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{\mathcal{E}}(\gamma,\theta;\gamma_0)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\langle\partial_t\gamma,\partial_t\varphi\rangle - \langle\partial_x^2\gamma,\partial_x^2\varphi\rangle - \langle f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma,\theta;\partial_x\gamma_0),\partial_x\varphi\rangle\right\}dt.$$

部分積分により, この右辺は次のように変形される:

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\partial_t^2\gamma + \partial_x^4\gamma - \partial_x f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma,\theta;\partial_x\gamma_0),\varphi\right\rangle dt. \tag{2.2}$$

よって, この積分 (2.2) が $\varphi(x,t_1) = \varphi(x,t_2) = 0$ かつ $\partial_x\gamma\cdot\partial_x\varphi \equiv 0$ を満たすような任意の φ に対して 0 となればよい. そこで,

$$V := \{\varphi \mid \partial_x\gamma\cdot\partial_x\varphi \equiv 0\}$$

と定める. この空間 V の x の $L^2(S_L^1)$ 内積に関する直行補空間 $V^\perp$ は次のように与えられる:

$$V^\perp = \{\partial_x(w\partial_x\gamma) \mid w = w(x,t) \text{ はスカラー函数}\}.$$

ただし, γ が空間曲線の場合には, $\partial_x^2\gamma \neq \mathbf{0}$ が任意の $(x,t) \in S_L^1 \times \mathbb{R}_+$ に対して成り立つ必要がある ($V^\perp$ がこのように与えられることは, 本節最後の補題において証明を与える). したがって, $\partial_t^2\gamma + \partial_x^4\gamma + \partial_x f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma,\theta;\partial_x\gamma_0)$ に対してあるスカラー函数 $w = w(x,t)$ が存在して

$$\partial_t^2\gamma + \partial_x^4\gamma - \partial_x f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma,\theta;\partial_x\gamma_0) = \partial_x(w\partial_x\gamma) \tag{2.3}$$

が成り立てば, (2.2) は常に 0 となる. 次に w が満たすべき方程式を導出する. 条件 (C) より

$$0 = \partial_t^2 |\partial_x \gamma|^2 = 2\partial_x \partial_t^2 \gamma \cdot \partial_x \gamma + 2 |\partial_x \partial_t \gamma|^2$$

が得られるから, (2.3) より

$$\left\{ -\partial_x^5 \gamma + \partial_x^2 f_{\gamma_x}(\partial_x \gamma, \theta; \partial_x \gamma_0) + \partial_x^2 (w \partial_x \gamma) \right\} \cdot \partial_x \gamma = - |\partial_x \partial_t \gamma|^2 \tag{2.4}$$

がしたがう. ここで, 条件 (C) から生じる関係式

$$\begin{aligned} \partial_x \gamma \cdot \partial_x^2 \gamma &= 0, \\ \partial_x \gamma \cdot \partial_x^3 \gamma &= - \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2, \\ \partial_x \gamma \cdot \partial_x^4 \gamma &= -\frac{3}{2} \partial_x \left(\left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \right), \\ \partial_x \gamma \cdot \partial_x^5 \gamma &= -2 \partial_x^2 \left(\left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \right) + \left|\partial_x^3 \gamma\right|^2, \end{aligned}$$

を利用して (2.4) を整理する. まず,

$$\begin{aligned} -\partial_x^5 \gamma \cdot \partial_x \gamma &= 2 \partial_x^2 \left(\left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \right) - \left|\partial_x^3 \gamma\right|^2, \\ \partial_x^2 (w \partial_x \gamma) \cdot \partial_x \gamma &= \partial_x^2 w - w \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \end{aligned}$$

を得る. 次に,

$$\begin{aligned} f_{\gamma_x}(\partial_x \gamma, \theta; \partial_x \gamma_0) = \Big\{ &(\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^5 - (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^3 \\ &+ (\theta - \theta_c) (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0)) \Big\} \partial_x \gamma_0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f_{\gamma_x}(\partial_x \gamma, \theta; \partial_x \gamma_0) \cdot \partial_x \gamma = \partial_x^2 \Big[\Big\{ &(\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^5 - (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^3 \\ &+ (\theta - \theta_c) (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0)) \Big\} \partial_x \gamma_0 \Big] \cdot \partial_x \gamma \end{aligned}$$

以上より, (2.4) は次のようにかける:

$$\begin{aligned} &2 \partial_x^2 \left(\left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \right) - \left|\partial_x^3 \gamma\right|^2 + \partial_x^2 w - w \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 + |\partial_x \partial_t \gamma|^2 \\ &\quad + \partial_x^2 \Big[\Big\{ (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^5 - (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^3 \\ &\quad + (\theta - \theta_c) (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0)) \Big\} \partial_x \gamma_0 \Big] \cdot \partial_x \gamma = 0 \end{aligned}$$

ここで, $v(x,t) := w(x,t) + 2 \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2$ とおけば, これは

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 v + \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 v = &2 \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 - \left|\partial_x^3 \gamma\right|^2 + |\partial_x \partial_t \gamma|^2 \\ &+ \partial_x^2 \Big[\Big\{ (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^5 - (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0))^3 \\ &+ (\theta - \theta_c) (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x (\gamma - \gamma_0)) \Big\} \partial_x \gamma_0 \Big] \cdot \partial_x \gamma \end{aligned}$$

とかける. 以上より, 求める運動方程式は次で与えられる:

$$\begin{cases} \partial_t^2\gamma + \partial_x^4\gamma + \partial_x f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0) - \partial_x\left\{(v - 2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2)\partial_x\gamma\right\} = 0, \\ -\partial_x^2 v + \left|\partial_x^2\gamma\right|^2 v = 2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2 - \left|\partial_x^3\gamma\right|^2 + \left|\partial_x\partial_t\gamma\right|^2 - \partial_x^2 f_{\gamma_x}(\partial_x\gamma, \theta; \partial_x\gamma_0)\cdot\partial_x\gamma. \end{cases}$$

さて, 以下を証明する:

補題 1. $\gamma(x,t)$ を滑らかな空間曲線とする. ただし, $x \in S_L^1$ は常に γ の弧長パラメータであるとする. $\partial_x^2\gamma \neq \mathbf{0}$ が任意の $(x,t) \in S_L^1 \times \mathbb{R}_+$ に対して成り立つと仮定する. このとき, 空間 $V = \{\varphi \mid \partial_x\gamma\cdot\partial_x\varphi \equiv 0\}$ の x の $L^2(S_L^1)$ 内積に関する直行補空間 $V^\perp$ は次のように与えられる:

$$V^\perp = \{\partial_x(w\partial_x\gamma) \mid w = w(x,t) \text{ はスカラー函数}\}.$$

証明. $\eta = \eta(x,t) \in V$ を任意に与える. このとき, $\partial_x\gamma$, $\partial_x^2\gamma$, およびそれらの外積 $\partial_x\gamma\times\partial_x^2\gamma$ は互いに直交する. また, $\partial_x^2\gamma \neq \mathbf{0}$ と仮定すれば, これらは座標系をなす（必要であれば正規化する）. よって, η は

$$\eta(x,t) = \eta_1(x,t)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t) + \eta_2(x,t)\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,t) + \eta_3(x,t)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)\times\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}(x,t)$$

と表示できる. $\eta \in V$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x\eta\cdot\partial_x\gamma \\ &= \{\partial_x\eta_1\partial_x\gamma + \eta_1\partial_x^2\gamma + \partial_x\eta_2\partial_x^2\gamma + \eta_2\partial_x^3\gamma + \partial_x\eta_3\partial_x\gamma\times\partial_x^2\gamma \\ &\qquad\qquad + \eta_3(\partial_x^2\gamma\times\partial_x^2\gamma + \partial_x\gamma\times\partial_x^3\gamma)\}\cdot\partial_x\gamma \\ &= \partial_x\eta_1 + \eta_2\partial_x\gamma\cdot\partial_x^3\gamma \\ &= \partial_x\eta_1 - \eta_2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\partial_x\eta_1 = \left|\partial_x^2\gamma\right|^2\eta_2 \tag{2.5}$$

を得る. つまり, (2.5) をみたす η_1, η_2, および任意の η_3 によって V の元は構成される. しかし, η_2 は任意ではない. η_1 が周期 L をもつために, 次の直交条件をみたさねばならない:

$$\int_0^L \left|\partial_x^2\gamma\right|^2\eta_2\,dx = 0. \tag{2.6}$$

ここで, $\zeta(x,t) = \zeta_1(x,t)\partial_x\gamma(x,t) + \zeta_2(x,t)\partial_x^2\gamma(x,t) + \zeta_3(x,t)\partial_x\gamma(x,t)\times\partial_x^2\gamma(x,t)$ が $\langle\zeta,\eta\rangle = 0$ をみたすならば, (2.5) および (2.6) をみたす η_1 と η_2 と任意の η_3 に対して,

$$\int_0^L \{\zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2\left|\partial_x^2\gamma\right|^2 + \zeta_3\eta_3(\partial_x\gamma\times\partial_x^2\gamma)^2\}\,dx = 0 \tag{2.7}$$

が成り立つ．とくに，$\eta_2 \equiv 0$, $\eta_3 \equiv 0$ とすると，(2.5) より $\eta_1 \equiv C$ となり，(2.7) より，

$$\int_0^L \zeta_1 \, dx = 0$$

を得る．これより，ζ_1 を用いて

$$\varphi(x,t) = \zeta_1(0,t) + \int_0^x \zeta_1(s,t) \, ds$$

と定義する．この函数 φ は周期 L をもち，かつ，$\partial_x \varphi = \zeta_1$ をみたす．これを (2.7) に代入し (2.5) を用いると，

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \{\partial_x \varphi \eta_1 + \zeta_2 \eta_2 \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 + \zeta_3 \eta_3 (\partial_x \gamma \times \partial_x^2 \gamma)^2\} \, dx \\
&= \int_0^L \{-\varphi \partial_x \eta_1 + \zeta_2 \eta_2 \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 + \zeta_3 \eta_3 (\partial_x \gamma \times \partial_x^2 \gamma)^2\} \, dx \\
&= \int_0^L \{-\varphi \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \eta_2 + \zeta_2 \eta_2 \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 + \zeta_3 \eta_3 (\partial_x \gamma \times \partial_x^2 \gamma)^2\} \, dx \\
&= \int_0^L \{(-\varphi + \zeta_2) \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2 \eta_2 + \zeta_3 (\partial_x \gamma \times \partial_x^2 \gamma)^2 \eta_3\} \, dx
\end{aligned}$$

と変形できる．ゆえに，(2.6) より，ベクトル値函数 (η_2, η_3) はベクトル値函数 $(|\partial_x^2 \gamma|^2, 0)$ と L^2 内積の意味で直交することから，t のみに依存するある関数 $\mu = \mu(t)$ が存在して

$$(\{-\varphi + \zeta_2\} \left|\partial_x^2 \gamma\right|^2, (\partial_x \gamma \times \partial_x^2 \gamma)^2 \zeta_3) = \mu(\left|\partial_x^2 \gamma\right|^2, 0),$$

すなわち，

$$-\varphi + \zeta_2 = \mu, \qquad \zeta_3 \equiv 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ．ここで，

$$\mu + \varphi(x,t) = w(x,t)$$

とおくと，函数 $w(x,t)$ は周期 L をもち，さらに，$\partial_x w = \zeta_1$ をみたす．(2.8) より，

$$\zeta_2(x,t) = w(x,t)$$

が従う．よって，V の元と L^2 内積の意味で直交する $\zeta(x)$ は

$$\zeta(x,t) = \partial_x w(x,t) \partial_x \gamma(x,t) + w(x,t) \partial_x^2 \gamma(x,t) = \partial(w(x,t) \partial_x \gamma(x))$$

と表される．これより，$V^\perp$ が得られる． □

注意 1. 補題 1 における仮定 $\partial_x^2 \gamma \neq 0$ は，曲率が常に 0 でないことを意味する．もし $\partial_x^2 \gamma = 0$ となると，その点において，接ベクトル $\partial_x \gamma$ に直行するベクトルを一意に定めることができない．ゆえに，曲線 γ の各点における座標系を定めるために，この仮定が必要となる．一方，平面曲線であれば，この仮定は必要ない．なぜなら，接ベクトルを 90 度回転させることによって，座標系を構成できるからである．

2.2 熱方程式の導出

熱移動の条件としては, 熱力学第一法則である熱エネルギー保存則と, 熱力学第二法則であるエントロピー減少の二つを満たす必要がある.

まず, 熱力学第一法則について考える. [LL] によると, エントロピー S, 熱流ベクトル q, 外部熱源 H に対して熱エネルギーの保存則は次で与えられる:

$$\theta \partial_t S + \nabla \cdot q = H. \tag{2.9}$$

エントロピー変化と熱の移動の関係式 ($d'Q = \theta dS$, Q は熱量) より, (2.9) は理解できる. この問題では, 熱の移動はワイヤー上で起こり, かつ伸び縮みしない条件があるので, 1 次元の直線の時と全く同様に, $\nabla \cdot q$ の項は $\partial_x q$ と考えてよい (x は弧長パラメータ). 同様に Fourier の法則

$$q = -\partial_x \theta \tag{2.10}$$

を仮定すると, (2.9) の左辺第二項は, $-\partial_x^2 \theta$ となる. Helmholtz の自由エネルギー密度

$$\begin{aligned}\widetilde{f} &= \widetilde{f}(\partial_x^2 \gamma, \partial_x \gamma, \theta; \gamma_0) \\ &= \frac{1}{2}|\partial_x^2 \gamma|^2 + f(\partial_x \gamma, \theta; \gamma_0) + f_0(\theta)\end{aligned}$$

とエントロピー S の間には関係式

$$S = -\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta} = -\widetilde{f}_\theta$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\partial_t S &= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\partial_x^2 \gamma, \partial_x \gamma, \theta; \gamma_0) \\ &= -\widetilde{f}_{\theta\theta}\partial_t \theta - \partial_t \partial_x \gamma \cdot \widetilde{f}_{\theta \gamma_x} - \partial_t \partial_x^2 \gamma \cdot \widetilde{f}_{\theta \gamma_{xx}} \\ &= -f_{\theta\theta}\partial_t \theta - \partial_t \partial_x \gamma \cdot f_{\theta \gamma_x} \\ &= -f_0''(\theta)\partial_t \theta - (\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x(\gamma - \gamma_0))(\partial_t \partial_x \gamma \cdot \partial_x \gamma_0).\end{aligned}$$

よって (2.9) は,

$$-\theta f_0''(\theta)\partial_t \theta - \partial_x^2 \theta = \theta(\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x(\gamma - \gamma_0))(\partial_t \partial_x \gamma \cdot \partial_x \gamma_0) + H \tag{2.11}$$

となりこれが求める方程式である.

熱力学第二法則と同等の意味を持つ Clausius-Duhem の不等式

$$\partial_t S + \partial_x \left(\frac{q}{\theta}\right) \geq \frac{H}{\theta}$$

は自動的に満たされていることを示す (Clausius-Duhem の不等式については, 例えば [BS, P154, (1.11) 式] を参照されたい). 等式 (2.9) と仮定 (2.10) より,

$$\begin{aligned}\partial_t S + \partial_x \left(\frac{q}{\theta}\right) &= \frac{H - \partial_x q}{\theta} + \partial_x \left(\frac{q}{\theta}\right) \\ &= \frac{H}{\theta} - \frac{q\partial_x \theta}{\theta^2} \\ &= \frac{H}{\theta} + \left|\frac{\partial_x \theta}{\theta}\right|^2 \geq \frac{H}{\theta}.\end{aligned}$$

ところで外部からの熱の流入がないという仮定 $H = 0$ を課し, 更に f_0 として, しばしば利用される形

$$f_0(\theta) = \theta - \theta \log \theta$$

を適用すると, $f_0''(\theta) = -1/\theta$ だから方程式 (2.11) は次のようになる,

$$\partial_t \theta - \partial_x^2 \theta = \theta(\partial_x \gamma_0 \cdot \partial_x(\gamma - \gamma_0))(\partial_t \partial_x \gamma \cdot \partial_x \gamma_0).$$

以上より, ワイヤーの形状記憶合金方程式が (1.4) で与えられることが確かめられた.

参考文献

[BS] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and phase transitions*, Applied Mathematical Sciences, 121. Springer-Verlag, New York, 1996.

[F] F. Falk, Elastic phase transitions and nonconvex energy functions. Free boundary problems: theory and applications, Vol. I (Irsee, 1987), 45–59, Pitman Res. Notes Math. Ser., 185, Longman Sci. Tech., Harlow, 1990.

[LL] J. Lagnese and J.-L. Lions, *Modelling analysis and control of thin plates*, Recherches en Mathematiques Appliquees (Research in Applied Mathematics), 6. Masson, Paris, 1988.

[O] S. Okabe, The motion of elastic planar closed curves under the area-preserving condition. Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), no. 4, 1871–1912.