

# Propagating waves in wave front interaction model \*

Hirokazu Ninomiya

(Department of Mathematics, Meiji University)

BZ(Belousov-Zhabotinskii) 反応は、興奮性が高いとき、スパイラルが見られ、興奮性が低いと化学波の伝播は見られなくなる。興奮性が高い状態からだんだん小さくしていくと、スパイラルは徐々にゆるんできてアーム上の形状に変化し、半直線のようになっていく。それより興奮性が小さい状態では、形を保てなくなるような臨界値が存在する。このとき、1つの自由端のある半直線のような化学波が見られる。この1次元的な化学波は、critical finger と呼ばれる。光の強さによって、興奮性が変化する光感受性 BZ 反応の実験では、光が強いとき興奮性が低くなり、光が強いと興奮性が高くなる。ビデオカメラで化学波の大きさを測定して、その情報をもとに画像パターンを作り、液晶プロジェクターを用いて投影する実験を Mihaliuk, Sakurai, Chirila および Showalter によって行われた [2, 3]。この実験では、孤立した進行化学波が観察された。光による興奮性の制御がない場合は、この孤立化学波は不安定であるが、フィードバックの効果により一定の形状を保つことを可能にしている。孤立化学波の大きさと興奮性には一意的な対応があり、興奮性を下げると大きさがどんどん大きくなった。

この化学波を彼らは、traveling segment と名付けた。これは、スポット進行波解の一種であるのでここではスポット進行波解と呼ぶことにする。このスポット進行波解を理解するために、Zykov-Showalter [4] は、 $u, v$  の2成分の FitzHugh-Nagumo 型の反応拡散系

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D\nabla^2 u + F(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \epsilon[G(u, v) + I(t)],\end{aligned}$$

を用いて、スポット進行波解の界面方程式を導出している。ここで、 $I(t)$  は光強度の制御に関する項である。スポット進行波解のときは、時間に依存しないので、定数となる。彼らが提唱した界面方程式は、フロント波とバック波に分かれているという特徴をもっている。このスポット進行波解は、進行方向 ( $x$  方向) に関して軸対象

---

\*Jong-Sheng Guo 氏 (National Taiwan Normal University) と Je-Chiang Tsai 氏 (National Chung Cheng University) との共同研究 [1] をもとにしている。

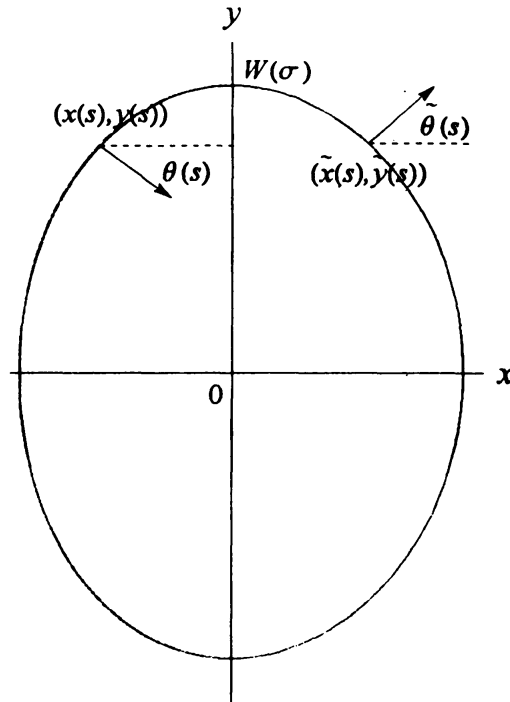


図 1: 変数の取り方の説明

と仮定し,  $y$  の最大値を  $x = 0$  でとるように平行移動しておく. このとき, フロント波, バック波を, それぞれ

$$(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{\theta}(s)), (x(s), y(s), \theta(s))$$

と表すことにする. ここで,  $s$  は弧長であり,  $\theta$  は  $x$ -軸からの外向き・内向き法線ベクトルのなす角である (図 1 参照).

フロント波  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta})$  は

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \sin \tilde{\theta}, \\ \tilde{y}' = -\cos \tilde{\theta}, \\ \tilde{\theta}' = -1 + \sigma \cos \tilde{\theta} \end{cases}$$

および  $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{\theta}(0)) = (0, W(\sigma), \pi/2)$  をみたす. ここで  $\sigma \in (0, 1)$  は正規化されたスポット進行波解の速度で,  $W(\sigma)$  はそのときのスポット進行波解の大きさの半分である. この方程式は,

$$V = \kappa + \sigma$$

という一定外力をもつ曲率流方程式を表現したものに過ぎない. つまり, フロント波は一定の速度で運動しようとする効果と曲率の影響で平らになろうとする効果だけで運動している.  $\tilde{\theta}(s) = 0$  のとき,  $\tilde{y}(s) = 0$  となるような解を探そう. この条件

からフロント波  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  は,  $\tilde{\theta} \in [0, \pi/2]$  を用いて媒介変数表示で一意的に表すことができる:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{1}{\sigma} \log \frac{1}{1 - \sigma \cos \tilde{\theta}}, \\ \tilde{y} &= -\frac{\tilde{\theta}}{\sigma} + \frac{2}{\sigma \sqrt{1 - \sigma^2}} \tan^{-1} \left( \frac{(1 + \sigma) \tan(\tilde{\theta}/2)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \right).\end{aligned}$$

特に,  $W(\sigma)$  は

$$W = W(\sigma) := -\frac{\pi}{2\sigma} + \frac{2}{\sigma \sqrt{1 - \sigma^2}} \tan^{-1} \left( \frac{1 + \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \right)$$

であり,  $W(0^+) = 1$  および  $W(1^-) = \infty$  をみताす. そこで, フロント解の軌道を  $\tilde{x} = f_\sigma(\tilde{y})$  と表すことにしよう.  $f_\sigma$  は,  $\sigma$  に依存し,  $y \in [0, W(\sigma)]$  に関して単調減少で

$$\begin{aligned}f_\sigma(0) &= -\frac{\log(1 - \sigma)}{\sigma}, \quad f_\sigma(W(\sigma)) = 0, \\ f'_\sigma(0) &= 0, \quad f'_\sigma(W^-(\sigma)) = -\infty, \quad f''_\sigma(0) = \sigma - 1 < 0\end{aligned}$$

をみたすことがわかる.

次にバック波を表現しよう.  $(x, y, \theta)$  は,

$$(P_{\sigma,b}) \quad \begin{cases} x' := \frac{dx}{ds} = \sin \theta, \\ y' := \frac{dy}{ds} = -\cos \theta, \\ \theta' := \frac{d\theta}{ds} = 1 + \sigma \cos \theta - b[f_\sigma(y) - x], \end{cases}$$

および初期値

$$x(0) = 0, \quad y(0) = W(\sigma), \quad \theta(0) = -\pi/2,$$

をみたす. この問題を  $(P_{\sigma,b})$  と表そう. ここで,  $b$  は正の定数で,

$$y(s^*) = 0, \quad \theta(s^*) = 0, \quad \text{および } (0, s^*) \text{ 上 } y'(s) < 0$$

となる  $s^* > 0$  が存在するように決定する. この定数  $b$  は, 光の強度に対応するパラメータである. この方程式は,  $b[f_\sigma(y) - x]$  の項を除き, 一定外力をもつ曲率流方程式となっている.  $\pm 1$  の符号の違いは, 法線ベクトルの取り方の違いによるものである.  $f_\sigma(y) - x$  は, フロント波とバック波の距離を表しており, 抑制成分の影響を表現する項となっている.

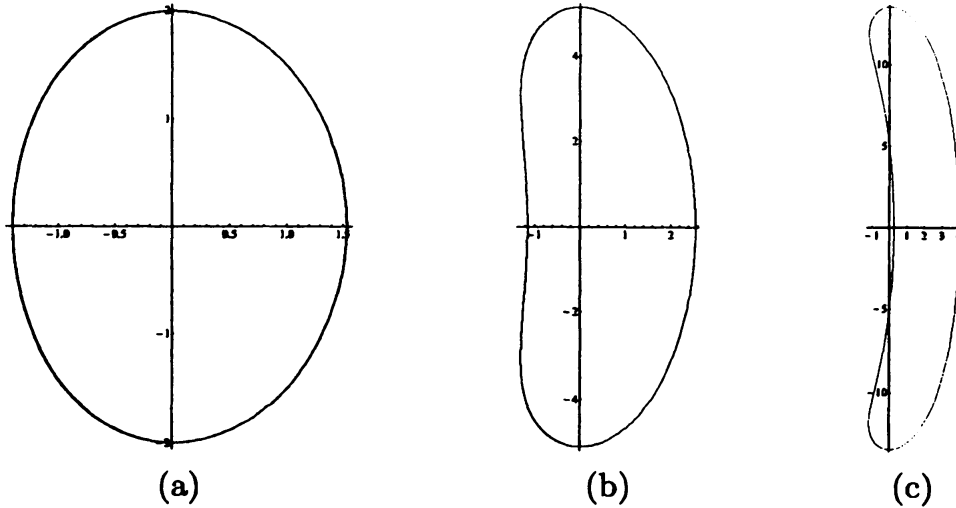


図 2: スポット進行波解の形状: (a)  $(\sigma, b) = (0.6, 0.44)$ ; (b)  $(\sigma, b) = (0.9, 0.5247)$ , (c)  $(\sigma, b) = (0.98, 0.5334145)$ .

**定理 1** 任意の  $\sigma \in (0, 1)$  に対して,  $(P_{\sigma, b^*})$  の解  $(x, y, \theta)$  が以下の 3 条件をみたすような  $b^* = b^*(\sigma) > 0$  と  $s^* = s^*(\sigma) > 0$  が存在する.

- (a).  $(0, s^*)$  上  $y' < 0$ ,
- (b).  $(0, s^*]$  上  $|\theta| < \pi/2$ ,  $x < f_{\sigma}(y)$ ,
- (c).  $y(s^*) = 0$ ,  $\theta(s^*) = 0$ .

スポット進行波解の大きさ  $2W(\sigma)$  は,  $\sigma$  に関して単調増加になる. 光の強度を適切に選ぶことにより, すべての速度  $\sigma \in (0, 1)$  に対応するスポット進行波解が存在することがわかる [2, 3].

なお, スポット進行波解は, 以下の 2 つのタイプに分けられる:

- (I) 凸型:  $[0, s^*)$  上  $\theta' > 0$
- (II) 非凸型:  $(0, s^*)$  上  $\theta'$  が符号を変える.

数値計算では,  $\sigma$  がおよそ 0.84 より大きくなると非凸型となる.

**定理 2** 定理 1 において  $\sigma$  が小さいときは凸型で,  $\sigma$  が 1 に十分近いとき非凸型になる.

まず, バック波は,  $(P_{\sigma, b})$  の解として存在する. しかし,  $y = W(\sigma)$  は Lipschitz

連続でないので、一意性は従わない。そこで、 $s = 0$ の近くでの挙動を

$$\begin{aligned}x(s) &= -s + O(s^3), \\y(s) &= W(\sigma) - \frac{1}{2}s^2 + O(s^3), \\ \theta(s) &= -\frac{\pi}{2} + s + \frac{\sigma - 2b}{2}s^2 + O(s^3)\end{aligned}$$

と決めることにより、解の一意性が従う。この解を  $(x(s; \sigma, b), y(s; \sigma, b), \theta(s; \sigma, b))$  と表すことにする。このとき、 $y(s; \sigma, b) = \pi/2$  かつ  $\theta'(s; \sigma, b) = 0$  のとき、

$$\theta''(s; \sigma, b) > 0$$

となるような性質と (ある範囲で成り立つ) 比較原理を組み合わせることにより解のパラメータ依存性に関する情報を導き出すことができる。これらの手法により定理を示すことができる。

## 参考文献

- [1] J.-S. Guo, H. Ninomiya and J.-C. Tsai, *Existence and uniqueness of stabilized propagating wave segments in wave front interaction model*, Physica D: Nonlinear Phenomena **239** (2010) No. 3-4, 230–239
- [2] E. Mihaliuk, T. Sakurai, F. Chirila and K. Showalter, *Experimental and theoretical studies of feedback stabilization of propagating wave segments*, Faraday Discuss **120** (2001), 383–394.
- [3] E. Mihaliuk, T. Sakurai, F. Chirila and K. Showalter, *Feedback stabilization of unstable propagating waves*, Phys. Review E. **65** (2002), 065602.
- [4] V.S. Zykov and K. Showalter, *Wave front interaction model of stabilized propagating wave segments*, Phys. Review Letters **94** (2005), 068302.