数理解析研究所講究録
第 1694 巻 2010 年 30-34

Weighted Green functions of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$: a study of complex dynamics

京都大学大学院理学研究科 上野康平 (Kohei Ueno)
Department of Mathematics, Kyoto University

kueno@math.kyoto-u.ac.jp

多項式歪積の複素力学系を考える. 特に, そのグリーン関数の存在に関する結果を述べ, グリーン関数の一般化である“重み付きグリーン関数”を導入する. 多項式歪積をある重み付き射影空間上の正則写像に拡張することができ, “重み付きグリーン関数”はその正則写像の力学系と密接な関係をもつ. これらの結果は論文 [7] の要約 (一部) である.

1 序 (多項式写像の力学系とグリーン関数)

多項式写像 $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ で, 代数的次数 $\deg f$ が 2 以上のものが与えられたとしよう. 写像 f の力学系を考えるにあたり, 次のグリーン関数と呼ばれる関数は有効な道具となる:

$$G_f(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \max\{\log|f^n(z,w)|, 0\},$$
$$\text{where } |(z,w)| = \max\{|z|, |w|\}.$$

ここで, f^n は f の n 回反復合成を表し, d は $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\deg(f^n)}$ と定義する. 軌道 $\{f^n(z,w)\}_{n\geq 0}$ が有界となる初期値 (z,w) の集合 K_f 上では $G_f = 0$ となるが, $\mathbb{C}^2 - K_f$ 上で極限 G_f が存在するかは分からない.

多項式写像 f が良い性質をもつ場合, この極限 G_f は複素空間全体で存在することが知られている. 例えば, レギュラーな多項式写像のグリーン関数は複素空間全体で存在し, 複素解析学で学ぶグリーン関数の高次

元化 (無限遠直線で極をもつ K_f の多重複素グリーン関数) と一致することが知られている．ここで，多項式写像がレギュラーであるとは，それが２次元複素射影空間上の正則写像に拡張するときをいう．レギュラーな多項式写像は３次元複素空間上の非退化な斉次多項式写像に持ち上がり，そのグリーン関数の存在を示すことができる．ちなみに，この場合は $\deg(f^n) = (\deg f)^n$ なので $d = \deg f$ となる．

しかし，一般の多項式写像に対して，この極限が存在するかは分かっていない．我々は多項式歪積と呼ばれる写像のグリーン関数がある領域で存在することを示し，さらに，複素空間全体で定義され連続かつ多重劣調和となる“重み付きグリーン関数”を導入する．

2　多項式歪積の力学系

我々は次の多項式歪積と呼ばれる２次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ からそれ自身への多項式写像の力学系を考える: $f(z,w) = (p(z), q(z,w))$ s.t.

$$\begin{cases} p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0, \\ q(z,w) = q_z(w) = w^d + b_{d-1}(z)w^{d-1} + \cdots + b_0(z). \end{cases}$$

ここで，$d \geq 2$ とする．このとき，$d = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\deg(f^n)}$ となる．レギュラーな多項式歪積の力学系の研究としては，[4], [5], [6], [1] 等がある．多項式歪積 f がレギュラーであることと，$\deg q = d$ となることは同値である．ここでは $\deg p = \deg_w q = d$ の場合のみを扱うが，$\deg p \neq \deg_w q$ の場合にもそれぞれ定理１に対応する結果が得られ，定理２の前半 (重み付きグリーン関数の存在) が成り立つ ([7])．さらに一般的な多項式歪積 (w^d の係数が z の多項式となるもの) の力学系の研究としては，[2] がある．

多項式歪積の力学系の簡単な説明を与えよう．多項式歪積の力学系は底空間上の力学系と垂直線上の力学系から成る．底空間上の力学系というのは複素平面 $\mathbb{C}$ 上の多項式 p の力学系のことである．また，多項式歪積は垂直線の族を保つ．写像 f を垂直線 $\{z\} \times \mathbb{C}$ に制限したものを $q_z(w)$ と書くと，写像 f^n を垂直線 $\{z\} \times \mathbb{C}$ に制限したものはこのような n 個の多項式の合成 $q_{p^{n-1}(z)} \circ \cdots q_{p(z)} \circ q_z(w)$ となる．これが垂直線上の力学系である．ゆえに，f^n は次のように書ける:

$$f^n(z,w) = (p^n(z), Q_z^n(w)),$$

$$\text{where } Q_z^n(w) = q_{p^{n-1}(z)} \circ \cdots q_{p(z)} \circ q_z(w).$$

多項式歪積 f の力学系を調べるために, f のグリーン関数 G_f とともに次の 2 つのグリーン関数が重要になる:

$$G_p(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \max\{\log|p^n(z)|, 0\} \text{ and}$$

$$G_z(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \max\{\log|Q_z^n(w)|, 0\}.$$

3 つのグリーン関数 G_f, G_p, G_z は大雑把に言えば次の関係を満たす:

$$G_f(z,w) = \max\{G_p(z), G_z(w)\}.$$

ここで, G_p は多項式 p のグリーン関数であり, 複素平面全体で定義され, 複素解析学で学ぶグリーン関数 (無限遠点で極をもつ K_p のグリーン関数) と一致することが知られている. よって, 極限 G_z の存在が分かれば, 極限 G_f の存在も従う.

3 結果 (重み付きグリーン関数)

我々はそのグリーン関数が複素空間全体では定義されない多項式歪積の具体例を発見した ([7]). このような具体例は多項式直積と半共役なものとして与えられる. さらに, このような写像を考察する過程で, 次の有理数 k が重要な役割を果たすことを発見した:

$$k = \min\left\{ l \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} ld \geq n_j + lm_j \text{ for any integers } n_j \text{ and } m_j \text{ s.t.} \\ c_j z^{n_j} w^{m_j} \text{ is a term in } q(z,w) \text{ for some } c_j \neq 0 \end{array} \right\}.$$

この有理数 k と十分大きな正数 R に対して, $W_R = \{|w| > R|z|^k, |w| > R^{k+1}\}$, $A_f = \cup_{n=0} f^{-n}(W_R)$ とおくと,

定理 1. **極限関数 G_z は A_f 上で定義され, 連続かつ多重調和となる. また,** $G_z(w) \to kG_p(z)((z,w) \in A_f \to \partial A_f)$.

次のグリーン関数を一般化したものを考えよう:

$$G_f^k(z,w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d^n} \max\{\log|f^n(z,w)|_k, 0\},$$

$$\text{where } |(z,w)|_k = \max\{|z|^k, |w|\}.$$

この関数を重み付きグリーン関数と呼ぶことにしよう. 定理1より,

$$G_f^k(z,w)=\begin{cases} G_z(w) & \text{on } A_f \\ kG_p(z) & \text{on } \mathbb{C}^2-A_f \end{cases}$$

となることが分かるので, 次の定理が従う:

定理 **2.** 極限関数 G_f^k は複素空間全体で定義され, 連続かつ多重劣調和となる. さらに, $G_f^k(z,w)=\log|(z,w)|_k+O(1)$ $(|(z,w)|_k\to\infty)$ となり, 方程式 $G_f^k(f(z,w))=dG_f^k(z,w)$ を満たす.

また, 有理数 k の分母と分子をそれぞれ r と s で表すとき, k の定義により, 多項式歪積 f を重み付き複素射影空間 $\mathbb{P}(r,s,1)$ 上の正則写像 $\tilde{f}$ に拡張することができる:

$$\tilde{f}[z:w:t]=\left[p\left(\frac{z}{t^r}\right)t^{dr}:q\left(\frac{z}{t^r},\frac{w}{t^s}\right)t^{ds}:t^d\right].$$

ちなみに, $\deg p\neq\deg_w q$ の場合は, $\tilde{f}$ は不定点をもつので正則写像とはならない. 多項式写像の重み付き複素射影空間上の正則写像への拡張については [3] でも述べられている. 多項式歪積 f に対して, $\mathbb{P}(r,s,1)$ の点 $[0:1:0]$ は $\tilde{f}$ の超吸引固定点となり, A_f はこの点の吸引領域と $\mathbb{C}^2$ との共通部分と一致する. 反復族 $\{\tilde{f}^n\}_{n\geq 0}$ がその上で正規となる最大の開集合をファトウ集合, その補集合をジュリア集合と定義すると,

定理 **3.** $\tilde{f}$ のジュリア集合は, G_f^k が多重調和とならないところの閉包と一致する. ここで, 閉包は $\mathbb{P}(r,s,1)$ 内でとられる.

さらに, 上記の多項式歪積 f の正則写像 $\tilde{f}$ への拡張と同値であるが, 多項式歪積 $f(z,w)=(p(z),q(z,w))$ は3次元複素空間 $\mathbb{C}^3$ 上の非退化な重み付き斉次多項式写像 F に持ち上がる:

$$F(z,w,t)=\left(p\left(\frac{z}{t^r}\right)t^{dr},q\left(\frac{z}{t^r},\frac{w}{t^s}\right)t^{ds},t^d\right).$$

このとき, 次の F の重み付きグリーン関数が $\mathbb{C}^3-\{O\}$ 上の連続な多重劣調和関数になることが示せる:

$$G_F(z,w,t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d^n}\log|F^n(z,w,t)|_k,$$

$$\text{where } |(z,w,t)|_k=\max\{|z|^s,|w|^r,|t|^{rs}\}.$$

また, 方程式 $G_F(z,w,1)=rG_f(z,w)$ が成り立つので, これらの結果から定理2を導くこともできる. ちなみに, $\deg p\neq\deg_w q$ の場合は, 斉次多項式写像 F は非退化とはならないので, この議論は使えない.

参考文献

[1] L. DeMarco and S. L. Hruska, *Axiom A polynomial skew products of $\mathbb{C}^2$ and their postcritical sets*, Ergodic Theory Dynam. Syst. **28** (2008), 1729-1748

[2] C. Favre and V. Guedj, *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 2, 881-934

[3] C. Favre and M. Jonsson, *Dynamical compactifications of $\mathbb{C}^2$*, to appear in Ann. of Math.

[4] S-M. Heinemann, *Julia sets for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{C}^n$*, Ergodic Theory Dynam. Syst. **16** (1996), no. 6, 1275-1296

[5] S-M. Heinemann, *Julia sets of skew products in $\mathbb{C}^2$*, Kyushu J. Math. **52** (1998), no. 2, 299-329

[6] M. Jonsson, *Dynamics of polynomial skew products on $\mathbb{C}^2$*, Math. Ann. **314** (1999), no. 3, 403-447

[7] K. Ueno, *Weighted Green function of polynomial skew product on $\mathbb{C}^2$*, submitted