数理解析研究所講究録
第1694巻 2010年 35-42

リーマン面の塔に沿うベルグマン核の挙動について

大沢健夫（名大多元数理）

要旨: S_1を種数が２以上のコンパクトなリーマン面とし、Γ_1を上半平面Hに作用するフックス群で　$H/\Gamma_1=S_1$　をみたすものとする。このとき次が成立する。「もしS_1が超楕円的ならば、フックス群の減少列　$\Gamma_1\supset\Gamma_2\supset\cdots\supset\Gamma_k\supset\cdots$ で $[\Gamma_k,\Gamma_{k+1}]<\infty$ かつ $\bigcap_k\Gamma_k=\{id\}$をみたすものを適当にとることによって、H/Γ_k 上のベルグマン核のHへの引き戻しからなる列がHのベルグマン核に収束しないようにできる。このような非収束性は、S_1の（超楕円的とは限らない）変形に関して安定な性質である。」

§1.背景

解析的対象としてのベルグマン核：　Mをn次元複素多様体とする。M上のL^2(n,0)形式のなすベクトル空間$L^2_{n,0}(M)$上には、Mの計量によらない内積 $<,>$ が

$$<f,g> = i^{n^2}\int_M f\wedge\bar{g}$$

で定まる。シュワルツの超関数の意味での(0,1)型複素外微分を$\bar\partial$で表し、$\mathrm{Ker}\bar\partial\cap L^2_{n,0}(M)$を$A^2_{n,0}(M)$で表す。$A^2_{n,0}(M)$への直交射影Pは、$A^2_{n,0}(M)$の再生核である**ベルグマン核** K(z,w)を用いて

$$Pu(w) = <u,K(\cdot,w)>$$

と表せる。

キーワード：　ベルグマン核（～複素再生核）多様体塔（～被覆多様体の増大列）安定性（～助変数に関する連続性⊂ポテンシャル論）

M上に計量を与えると、L^2 (n,1) 形式の空間上の複素ラプラス作用素 $\square=\bar{\partial}^*\bar{\partial}+\bar{\partial}\bar{\partial}^*$ が定まる。ただし$\bar{\partial}^*$は$\bar{\partial}$の随伴作用素(adjoint)を表す。$\square$が有界な逆 N を持つとき、$L^2_{n,0}(M)$ における $A^2_{n,0}(M)$ の直交補空間は $\bar{\partial}^*N\bar{\partial}$ の像として特徴づけられる。より詳しくは $P = Id - \bar{\partial}^*N\bar{\partial}$ が成立する。このNを**ノイマン作用素**という。ノイマン作用素の存在条件はベルグマン核の解析において重要である。たとえば完備なケーラー計量を持つようなMに対し、M上のどんな計量に関してノイマン作用素が存在するかについて有用な十分条件が知られている。J.コーンやL.ヘルマンダーらによるレヴィ問題の定量的な解はこの視点からのもので、ベルグマン核の境界挙動の解析はその著しい成果である。たとえば $\mathbf{C}^n$ 内の滑らかな境界を持つ有界擬凸領域がユークリッド計量に関してノイマン作用素を持つことは、この一般論の一例である。ノイマン作用素の解析によりベルグマン核の境界挙動についての情報が得られ、それを用いて双正則写像の境界挙動の著しい性質が導けることが知られている（C.フェファーマン、S.ベル、E.リゴツカらの仕事）。

一般にも、有界作用素 $T : L^2_{n,0}(M) \longrightarrow L^2_{n,0}(M)$に対し、Tのコンパクト性などの作用素論的性質と対応

$$w \longmapsto P(T(K(\cdot,w)K(w,w)^{-1/2})$$

の境界挙動との間には密接な関係があり、Tがテプリッツ作用素の場合には詳しいことが知られている。

幾何学的対象としてのベルグマン核： ベルグマン核を対角線集合に制限したK(z,z)は、Mの複素構造に付随する擬体積要素であると同時に、双正則同型で不変な計量のポテンシャルとしての幾何学的な意味を持っている。すなわち、対応

$$x \longmapsto \{f\in A^2_{n,0}(M) \mid f(x) = 0\}$$

によって M から $A^2_{n,0}(M)$ の双対の射影化への埋め込みが決まるとき、この写像で射影空間上の Fubini-Study計量を引き戻したものは logK(z,z) の複

素ヘッシアン $\partial\bar{\partial}\log K(z,z)$ に一致する（小林昭七の観察）。 この計量を**ベルグマン計量**という。より一般に、$K(z,z)$ が M 上に零点を持たないときにも、擬計量 $\partial\bar{\partial}\log K(z,z)$ を（ここでは）便宜上ベルグマン計量と呼ぶ。$A^2_{n,0}(M)$ は M の標準直線束のL^2正則断面の集合であるが、一般の正則直線束に対しても上と同様の対応があるので、Fubini-Study計量の引き戻しとして定まるより広い擬計量のクラスが存在する。その族の中でベルグマン計量がどんな位置を占めるかは興味深い問題である。

§2.ベルグマン核の帰納族と射影族

拙論[O−3]の解題が以下の目的である。[M]でMumfordによって述べられ[R]でRhodesによって部分的に解決された予想に、[O−3]では反例を与えた。その話に入る前に、この結果がほんの一例の解明に過ぎないような一般的な問題を設定してみよう。（解ければ応用があるというわけではないのだが。）糸口はベルグマン核の定義からほとんど自明な次の観察である。

観察： Ωは $\mathbf{C}^n$ の有界領域であり、Ω_k $(k=1,2,\dots)$はΩの部分領域で$\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots\subset\Omega$, $\bigcup_k\Omega_k=\Omega$ をみたすとする。このとき $\lim_{k\to\infty} K_{\Omega_k} = K_\Omega$ (広義一様)である。ただしK_Ω でΩのベルグマン核を表す。Ωが複素多様体でも同様である。

n次元複素多様体M_1,M_2の間に正則写像$f:M_1 \longrightarrow M_2$ があるとき、$K_{M_2}(z,z)$をfによって引き戻したものはM_1上の擬体積要素である。これに乗せて上の観察をどこまで拡げることができるだろうか。

ベルグマン核の帰納族： 有向集合Λによって添字づけられた、n次元の複素多様体M_α （$\alpha\in\Lambda$）と正則写像 ι^α_β $:M_\alpha \longrightarrow$ M_β （$\alpha\leq\beta$）

から成る帰納系 $(M_\alpha, \iota_\beta^\alpha)$に対し、

問１．$\lim_{\gamma\to\infty}\lim_{\alpha,\beta\to\infty}|\iota_\alpha^{\gamma *}K_{M_\alpha} - \iota_\beta^{\gamma *}K_{M_\beta}| = 0$ はいつ成立するか。

問２．$\varinjlim M_\alpha (= M)$（および $\iota^\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$)が存在するとき、任意の$\gamma$に対して $\lim_{\alpha\to\infty}\iota_\alpha^{\gamma *}K_{M_\alpha} = \iota^{\gamma *}K_M$ が成立するための条件は何か。

ただし収束はすべて広義一様とする。

これらは上の観察を素朴に敷衍しようとしたものだが、さらに矢印を逆向きにして問題を射影系へと拡げることが可能である。

ベルグマン核の射影族：Λで添字づけられたn次元複素多様体と正則写像の射影系 $(M_\alpha, \rho_\alpha^\beta)$に対し、

問３．$\lim_{\alpha,\beta\to\infty}\lim_{\gamma\to\infty}|\rho_\alpha^{\gamma *}K_{M_\alpha} - \rho_\beta^{\gamma *}K_{M_\beta}| = 0$ はいつ成立するか。

問４．$\lim_{\alpha\to\infty}\rho_\alpha^* K_{M_\alpha} = K_M$ は成り立つか（ただし$\varprojlim M_\alpha = M$ が存在するとき）。

問１～４は ι_β^α や ρ_α^β が有理型写像であっても意味を持つ。ハルトークスの接続定理より、$\iota_\beta^{\alpha *}K_{M_\beta}$や$\rho_\alpha^{\beta *}K_{M_\alpha}$の特異点が除去可能になるからである。（これは双有理幾何的には重要な点である。）また、ι_β^α や ρ_α^β が局所同相写像ならば、ベルグマン計量に関しても同様の問題が考えられる。これらを問１'～４'で表す。

射影系$(M_\alpha, \rho_\alpha^\beta)_{\alpha\le\beta}$の例：　複素多様体M上に、Mの正則自己同型から成る群Γが固定点なしに真性不連続に作用しているとする。$\Lambda(\Gamma)$で、Γの部分群を要素とし、包含関係A⊆Bにより順序A≥Bを定めた有向集合を表す。このとき$A\in\Lambda(\Gamma)$に対して$M_A := M/A$, $B\ge A$ に対して $\rho_A^B : M_B \longrightarrow M_A$ を（標準的）射影として射影系(M_A, ρ_A^B)が定まる。$\varprojlim M_A = M$ であり、$\rho_A : M \longrightarrow M_A$ は射影である。一般に、(M_A, ρ_A^B)の部分系$(M_{A'}, \rho_{A'}^{B'})$で

$\varprojlim M_{\Lambda'} = M$ をみたすものを、Mを屋上とする（複素）多様体塔と呼ぶ。

M/Γはいわばground floorである。M上のベルグマン核はΓ不変な擬体積要素であるから、M/Γ上の擬体積要素を引き戻したものである。これとM/Γ上のベルグマン核の（微妙な）相違は何を反映しているのだろうか。M.Atiyahの有名な論文[A]は、指数定理の拡張という観点からこの問題に一つの示唆を与えている。（[A]と単葉関数論の関係については[O−1]を参照されたい。）

§3. リーマン面の塔とベルグマン核

問3,4(問3',4')は、多様体塔の屋上におけるベルグマン核の安定性を問う形で提出された問題を、より一般的な設定で述べたものである。もとの問題は、D.Kazhdanの論文[K]に示唆されたものとして、Mumfordの講義録[M]の中で以下の形で提出された。

Sを種数が２以上のコンパクトなリーマン面とする。ケーベの一意化定理より、Sの普遍被覆空間は上半平面 $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ に同型であり、従ってAutH (=PSL(2,**R**)) の離散部分群Γがあって S はH/Γと同型になる。Γの部分群の減少列$\{\Gamma_k\}$ $(\Gamma_1 = \Gamma)$で $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}] < \infty$ かつ $\bigcap_k \Gamma_k = \{id\}$をみたすものに対し、$S_k = H/\Gamma_k$ とおき、S_k上のベルグマン計量のHへの引き戻しをds_k^2とする。

Mumfordの予想(1975)：　ある数列 λ_k に対し

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k ds_k^2 = (\mathrm{Im} z)^{-2} dz d\bar{z}$$

が成立する。

ちなみにこれに先立ってMumfordはS上の高次のワイアシュトラス点について論じ、その分布が次数が∞の極限においてはベルグマン計量に関して一様であると述べている（証明は書かれていない）。これは前節とは別

の意味で、射影族の安定性と双対的な主張である。

1986年、S.-T.YauはKadzdanが次の命題を証明したと述べた(cf.[Ya])。

命題X Ωは複素多様体、Γは$\mathrm{Aut}\Omega$の固定点なしの真性不連続群、$\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\Gamma_1=\Gamma)$はΓの部分群の減少列で$[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}]<\infty$ かつ $\bigcap_k \Gamma_k = \{id\}$をみたすとする。このとき、もし$\Omega$が正定値なベルグマン計量$ds^2$を持てば、$\Omega/\Gamma_k$ 上のベルグマン計量のΩへの引き戻しから成る列は ds^2に収束する。

これはMumford予想よりずっと強い言明である。従って、次節で述べるMumford予想の反例は命題Xが偽であることも示している。（実は命題Xの反例は、ΩをH、Γを階数２の主合同群にとれば簡単に構成できる。）

とはいえ、問3,4 および問3',4'の答は以下の場合には肯定的である。

１．(1993, A.Rhodes [R]) M = H かつ M/Γはコンパクトであり、以下の二つのどれか（または両方）がみたされる。

a) Γ_k はすべてΓの正規部分群である。

b) M/Γ_k 上のポアンカレ計量に関するラプラス作用素の正固有値の下限をσ_k としたとき、$\inf_k \sigma_k > 0$.

２.(2000, S.-K. Yeung [Ye]) Mは対称有界領域であり、M/Γ_k のケーラー・アインシュタイン計量に関する入射半径は $k \longrightarrow \infty$のとき無限大に発散する。

§4. Mumford予想の反例

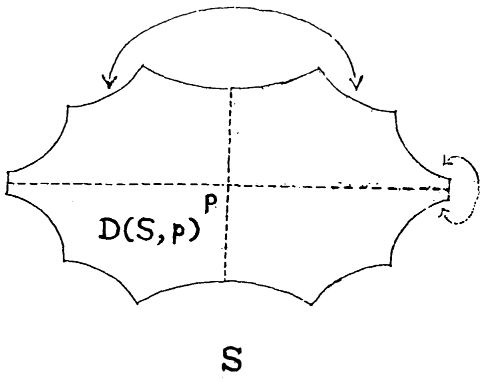
Rhodesは論文[R]中で、条件a)およびb)は技術的な理由でつけただけで、「それらなしでは結論が成り立たないと考える理由はない」と述べている。慎重な言いまわしだが、Mumford予想が無条件に成り立つ可能性も含みとして残っているので、この主張が無条件には偽であることをはっきりさせておくことには意味があるだろう。

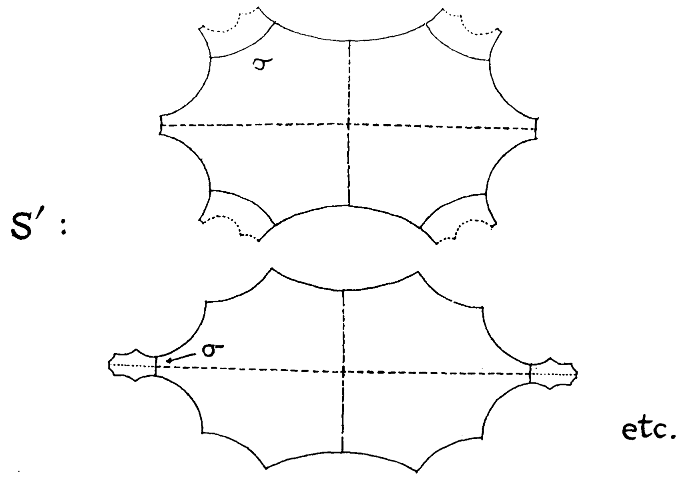
反例：　Sを超楕円的リーマン面とし、$g(\geq 2)$をSの種数とする。このときAutSの位数が２の元τで$S/\{id, \tau\} \approx \hat{\mathbb{C}}$となるものが存在し、$\tau$の固定点すなわち射影$S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$の分岐点において、Sのベルグマン計量は退化する。$\tau$の固定点はSのワイアシュトラス点に他ならない。

τの固定点を一つ選び、それをpとする。S上のポアンカレ計量に関するτ不変な閉測地線を、便宜上不変ループと呼ぶ。不変ループでどれかのワイアシュトラス点を含むがpを含まないものすべてに沿ってSを切り開けば、$8g-4$個の辺を持ち、内角がすべて直角であるようなSの基本領域が得られる。この基本領域をD(S,p)で表す。pを通る２本の不変ループはD(S,p)の対称軸に対応する。D(S,p)を単位円板**D**内の、ポアンカレ計量に関する多角形と同一視する。その際、pは原点に、対称軸はx軸とy軸に移す。これによって定まる**D**からSへの射影をπで表す。S上の不分岐被覆の基本領域Dが、不変ループのπによる逆像の一部を辺とし、かつD(S,p)を含むとき、DはSに同伴するという。このとき次が成り立つ。

補題　Sが超楕円的ならば、Sの任意のワイアシュトラス点pとD(S,p)の任意の辺σに対し、超楕円的なリーマン面S'と不分岐２重被覆$\rho: S' \longrightarrow S$があって、$\rho(p')=p$なるp'に対し、D(S',p')はSに同伴し、かつσを辺として含まない（σは両端を除けばD(S',p')の開核に含まれる）。

証明はσが軸と交わる時とそうでない時とに分けて行なう。（次図を参照）





補題より、超楕円的なリーマン面からなる多様体塔で、屋上がD（Hでもよい）であり、屋上のある一点の（射影）像がすべてワイアシュトラス点であるものが存在する。よってこの塔に関して問４'の答は否定的である。これとベルグマン核の基本的な性質をあわせると、問４の答も否定的であることが分かる。（問３と問３'については不明である。）

反例の安定性：Sの種数が３以上なら、Sの非超楕円的な微小変形が存在する。このとき上で作ったS上の塔も変形を受けるが、屋上でのベルグマン核の不安定性はこの変形に関して安定な性質である。これはL^2拡張定理の一般型(cf.[O−2])を用いて示すことができる。従って、命題XはΩ/Γ_k上のベルグマン計量がすべて正定値であるとしても偽である。

References

[A] Atiyah, M., Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Astérisque **32-3** (1976), 43–72.
[K] Kajdan(=Kazhdan), D., Arithmetic varieties and their fields of quasi-definition, Actes du Congrès Internationale Mathématiciens, 1970, pp.321-325.
[M] Mumford, D., Curves and their Jacobians, University of Michgan Press, Ann Arbor, 1975.
[O–1] Ohsawa, T., On the hyperbolicity of certain planar domains, Math. Z. **195** (1987), 127–128.
[O–2] ———, On the extension of L^2 holomorphic functions V — Effects of generalization, Nagoya Math. J. **161** (2001), 1--21.
[O–3] ———, A tower of Riemann surfaces whose Bergman kernels jump at the roof, to appear in Publ. RIMS.
[R] Rhodes, J.A., Sequences of metrics on compact Riemann surfaces, Duke Math. J. **72** (1993), 725-738.
[Ya] Yau, S.T., Nonlinear Analysis in Geometry (Monograph de l'enseignement mathématique, 33), 'Enseignement Mathématique, Genève, 1986.
[Ye] Yeung, S.-K., Effective estimates on the very ampleness of the canonical bundle of locally Hermitian symmetric spaces, Trans. AMS **353** (2000), 1387-1401.