数理解析研究所講究録
第 1694 巻 2010 年 89-100

放物型 Hardy 空間について

中川　勇人*

概要

上半空間上の放物型作用素の解空間として定まり Hardy 空間に含まれる関数空間，いわゆる放物型 Hardy 空間において Carleson 不等式を扱う．特に，放物型 Hardy 空間 h^p_α において $1<p\leq q<\infty$ という状況のもとでの Carleson 不等式の成立のための必要十分条件を考察する．ここでは，それを上半空間における測度の特徴づけを行うことで実現する．

1 序

$(n+1)$ 次元 Euclide 空間を $\mathbb{R}^{n+1}$ の上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x\in\mathbb{R}^n, t>0\}$ $(n\geq 1)$ において，Hardy 型ノルムが有限になる $L^{(\alpha)}$-調和関数 $(0<\alpha\leq 1)$ である連続関数全体を h^p_α とおき，単に「放物型 Hardy 空間」と呼ぶことにする（詳しい定義は次章参照）．放物型 Hardy 空間の有する性質を調べることは大きな研究テーマであり，筆者は以前に [N1] において境界挙動を，[N2] および [N3] においては Carleson 不等式を取り扱った．今回はより一般的な Carleson 不等式についても必要十分条件を得たことを報告する．

まず以前得られた結果（[N3]）を紹介する．従来の Carleson 測度を放物型 Hardy 空間に対応するようにしたものを T_τ-Carleson 測度として導入した（定義は次章参照）．これを用いて Carleson 不等式の必要十分条件を表現した次の定理が得られた．

定理 A（[N3]）

$0<\alpha\leq 1, 1<p<\infty$，および μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度とする．このとき，p,n にのみよるある定数 $C>0$ が存在して $u\in h^p_\alpha$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} \leq C(\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu])^{\frac{1}{p}}\|u\|_{h^p_\alpha} \tag{1}$$

* 名古屋大学多元数理, E-mail : m04026b@math.nagoya-u.ac.jp
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35K05; Secondary 26D10, 31B10
Keywords and phrases: Parabolic operator, Hardy space, Carleson inequality
A talk at RIMS meeting "ポテンシャル論とベルグマン空間" organized by Takeo Ohsawa, December 2 - 4, 2009.

が常に成立するための必要十分条件は，$\tau = \frac{n}{2\alpha}/(1+\frac{n}{2\alpha})$ として μ が $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 T_τ-Carleson 測度となることである．ここで $\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu]$ は μ の T_τ-Carleson 定数である（次章で定義する）．

今回の結果は不等式の左辺のノルムを L^q $(p \le q)$ ノルムに取り替えることで一般化したものである．

主定理 $0 < \alpha \le 1, 1 < p \le q < \infty$，および μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度とする．このとき，p, q, n にのみよるある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h^p_\alpha$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \le C(\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu])^{\frac{1}{q}} \|u\|_{h^p_\alpha} \tag{2}$$

が常に成立するための必要十分条件は，$\tau = \frac{n}{2\alpha} \cdot \frac{q}{p}/(1 + \frac{n}{2\alpha})$ として μ が $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上 T_τ-Carleson 測度となることである．

なお，$p > q$ の場合にはまだ解決していない．

本稿の構成は次のとおりである．第 2 章では放物型 Hardy 空間およびそれに対応する Carleson 測度である T_τ-Carleson 測度を定義する．これらは [N3] におけるものと同一のものである．また，証明に用いる補題などを準備する．第 3 章では，主定理を証明しやすくするためにある測度条件を提示する．Carleson 不等式が成立するための必要条件と十分条件に分けて，第 4 章および第 5 章においてそれぞれの証明を行うことによって主定理を得ることにする．なお，主定理は名城大学の鈴木紀明教授との共同研究で得られたものである．

本稿では C は定数を表すが，たとえ同一の行にあっても必ずしも同じとは限らない．依存する変数を明示したいときは C_p などと添え字によって表現する．

2 準備

この章では準備として放物型 Hardy 空間，T_τ-Carleson 測度などの定義を与える．

上半空間の境界 $\mathbb{R}^n$ での中心が x で半径が r の開球を $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$ で表す．また，α について特に指定のないときには $0 < \alpha \le 1$ であるものとする．

$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上において，放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は，

$$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

で定義される．ここで Δ_x は x に関する Laplace 作用素である．超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ となる関数を $L^{(\alpha)}$-調和関数とよぶ．$1 < p \le \infty$ として，上半空間における放物型作用素を導入した Hardy 空間 $h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ を

$$h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{上連続関数} \mid L^{(\alpha)}u = 0, \|u\|_{h^p_\alpha} < \infty\}$$

と定義する[*1]．ここでノルムは古典的な Hardy 空間と同様に

$$\|u\|_{h^p_\alpha} := \begin{cases} \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 < p < \infty), \\ \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| & (p = \infty), \end{cases}$$

と定める．以降，$h^p_\alpha(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ を h^p_α と略記し，単に放物型 Hardy 空間と呼ぶことにする．放物型 Hardy 空間は Banach 空間になる．

放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は，

$$W^{(\alpha)}(x,t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

で定義される．ここで $x\cdot\xi$ は x と ξ との内積であり，$|\xi| = (\xi\cdot\xi)^{1/2}$ である．$W^{(\alpha)}(x,t)$ は $\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ Poisson 核，熱核に一致する．古典的な積分核と同様に基本解は正規性を持つ：任意の $t > 0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x,t)dx = 1. \tag{3}$$

基本解は半群の性質も持つ：任意の $0 < s < t$ に対して，

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y, t-s) W^{(\alpha)}(y,s)dy. \tag{4}$$

また，$\mathbb{R}^{n+1}_+$ における任意のコンパクト集合 K 上において，

$$\inf_{(x,t)\in K} W^{(\alpha)}(x,t) > 0 \tag{5}$$

である．

非負整数 k と multi-index $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (各 β_i は非負整数) に対して $|\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_n$ とするとき，関数 f の多重微分を

$$\partial_x^\beta \partial_t^k f(x,t) := \frac{\partial^{|\beta|+k}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n} \partial t^k} f(x,t)$$

で表すことにする．簡単な変数変換により，

$$\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t) = t^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+k} (\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)})(t^{-\frac{1}{2\alpha}}x, 1) \tag{6}$$

であることがわかる．次の命題は基本的な評価である．

[*1] 古典的な調和 Hardy 空間において $p = 1$ の場合は $1 < p \leq \infty$ の場合とは性質がかなり異なるため扱いが難しくなることが知られており，放物型 Hardy 空間においても同じ状況が発生することが予想される．ここでは h^1_α には触れないことにする．

補題 2.1 ([NSS], Lemma 3.1). ある定数 $C>0$ が存在して，$(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ について，

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)| \leq C\frac{t^{1-k}}{(t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+1}}$$

である．特に，

$$W^{(\alpha)}(x,t) \leq C\frac{t}{(t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}} \tag{7}$$

である．

基本解によって，放物型 Hardy 空間に属する関数と境界上の関数が密接に関係していることが次の命題によりわかる．

命題 2.2. $1<p\leq\infty$ とする．任意の $u\in h^p_\alpha$ に対して，

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t)f(y)dy$$

を満たす関数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．さらに，$\|u\|_{h^p_\alpha}=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ が成立する．

最後に，T_τ-Carleson 測度を導入する．

定義 2.3. μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$\tau>0$ とする．このとき，ある定数 $C>0$ が存在して，

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t)) \leq Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} \tag{8}$$

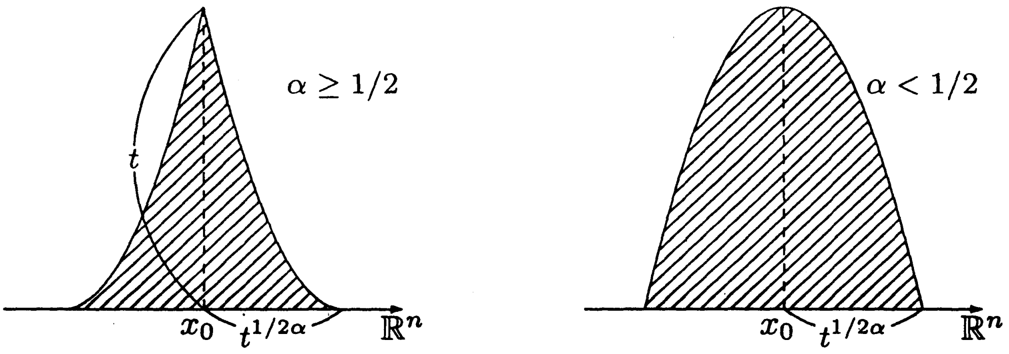
が満たされているとき，μ を（$L^{(\alpha)}$ に関する）T_τ-Carleson 測度と呼ぶ．ここで，

$$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x|^{2\alpha}+s\leq t\}$$

である．また，

$$\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu] = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{t^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}}$$

とおき，T_τ-Carleson 定数と呼ぶ．



$T^{(\alpha)}(x,t)$ の形状

$\alpha = 1/2$ とすると従来の Carleson 測度およびその定数になる.

3　主定理の証明のための方針

本格的な証明に入る前に，見通しを良くするため，ある測度条件を考える．また，必要条件と十分条件に分けて，証明すべき命題を整理する．

開集合 $E(\subset \mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\widehat{E} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid B(x, t^{\frac{1}{2\alpha}}) \subseteq E\}$$

とおく．次の測度条件を考える；

$$\mu(\widehat{B(x, t^{\frac{1}{2\alpha}})}) \leq C t^{\frac{n}{2\alpha}\frac{q}{p}}. \tag{9}$$

主定理の T_τ-Carleson 測度（ただし，$\tau = \frac{n}{2\alpha} \cdot \frac{q}{p} / (\frac{n}{2\alpha} + 1)$）という条件と条件 (9) とは同値である．それは $\alpha \leq 1/2$ のときについては，$0 < t \leq s$ として

$$(s-t)^{\frac{1}{2\alpha}} \leq s^{\frac{1}{2\alpha}} - t^{\frac{1}{2\alpha}} \leq (2s-t)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

であるから，$T^{(\alpha)}(y,s) \subset \widehat{B(y, s^{\frac{1}{2\alpha}})} \subset T^{(\alpha)}(y, 2s)$ であり，同値性が示されるからである．$\alpha > 1/2$ のときについても同様に

$$s^{\frac{1}{2\alpha}} - t^{\frac{1}{2\alpha}} \leq (s-t)^{\frac{1}{2\alpha}} \leq (2s)^{\frac{1}{2\alpha}} - t^{\frac{1}{2\alpha}}$$

より，$\widehat{B(y, s^{\frac{1}{2\alpha}})} \subset T^{(\alpha)}(y,s) \subset \widehat{B(y, (2s)^{\frac{1}{2\alpha}})}$ であるから同値性が示される．ゆえに，以下の２つの命題を示せば主定理が示される．

命題 3.1. $1 < p \le q < \infty$, μ を $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上正 Borel 測度とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h_\alpha^p$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{n+1},d\mu)} \le C\|u\|_{h_\alpha^p}$$

が常に成立するならば，μ はある定数 $C > 0$ が存在して

$$\mu(\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}) \le Ct^{\frac{n}{2\alpha}\frac{q}{p}}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \tag{10}$$

を満たす．

命題 3.2. $1 < p \le q < \infty$, μ を $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上正 Borel 測度とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\mu(\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}) \le Ct^{\frac{n}{2\alpha}\frac{q}{p}}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

を満たすならば，ある定数 $C > 0$ が存在して $u \in h_\alpha^p$ に対して，次の不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}_+^{n+1},d\mu)} \le C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}\|u\|_{h_\alpha^p}$$

が常に成立する．

命題 3.1 および命題 3.2 は第 4 章および第 5 章で証明する．

4 必要性の証明

Carleson 不等式が成立するときに測度の持つ性質を調べる．すなわち命題 3.1 を示す．
$(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ を固定し，$u(y,s) = W^{(\alpha)}(x-y,t+s)$ とする．
まず Carleson 不等式の左辺について評価する．

$$\begin{aligned}
\|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|^q_{L^q(\mathbb{R}_+^{n+1},d\mu)} &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |W^{(\alpha)}(x-y,t+s)|^q d\mu(x,t) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (t+s)^{-\frac{n}{2\alpha}q} \left| W^{(\alpha)}\left(\frac{x-y}{(t+s)^{\frac{1}{2\alpha}}},1\right)\right|^q d\mu(y,s) \\
&\qquad ((6)\text{ による}) \\
&\ge \int_{\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}} (t+s)^{-\frac{n}{2\alpha}q} \left| W^{(\alpha)}\left(\frac{x-y}{(t+s)^{\frac{1}{2\alpha}}},1\right)\right|^q d\mu(y,s).
\end{aligned}$$

である．$\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}$ の決め方により，$(y,s) \in \widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}$ であるならば $0 < s \le t$ である．
また，$|x-y| \le t^{\frac{1}{2\alpha}} - s^{\frac{1}{2\alpha}} \le t^{\frac{1}{2\alpha}} + s^{\frac{1}{2\alpha}} \le 2^{\frac{1}{2\alpha}}(s+t)^{\frac{1}{2\alpha}}$ より $0 \le \dfrac{|x-y|}{(t+s)^{\frac{1}{2\alpha}}} \le 2^{\frac{1}{2\alpha}}$ であ

る．よって，(5) を使うことにより基本解の下からの評価が可能である．

$$\begin{aligned}\|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} &\geq C\int_{\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}}(t+s)^{-\frac{n}{2\alpha}q}d\mu(y,s)\\ &\geq C\int_{\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}}(2t)^{-\frac{n}{2\alpha}q}d\mu(y,s)\\ &\geq Ct^{-\frac{n}{2\alpha}q}\mu(\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}).\end{aligned}$$

ゆえに，

$$Ct^{-\frac{n}{2\alpha}}\left(\mu(\widehat{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})})\right)^{1/q} \leq \|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} \tag{11}$$

である．次に右辺の評価をする．

$$\begin{aligned}\|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|^p_{h^p_\alpha} &= \sup_{s>0}\int_{\mathbb{R}^n}|W^{(\alpha)}(x-y,t+s)|^p dy\\ &\leq C\sup_{s>0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t+s}{(t+s+|x-y|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\right)^p dy\\ &\qquad ((7)\text{ による})\\ &= C\sup_{s>0}\int_{|\xi|=1}\int_0^\infty\left(\frac{t+s}{(t+s+r^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\right)^p r^{n-1}drdS(\xi)\\ &= C\omega_{n-1}\sup_{s>0}\int_0^\infty\left(\frac{t+s}{(t+s+r^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\right)^p r^{n-1}dr\\ &\qquad (\omega_{n-1}: \mathbb{R}^n\text{ における単位球面の表面体積})\\ &= C\omega_{n-1}\sup_{s>0}\int_0^\infty(t+s)^{-\frac{n}{2\alpha}p}\frac{r^{n-1}dr}{(1+\frac{r^{2\alpha}}{t+s})^{(\frac{n}{2\alpha}+1)p}}\\ &= C\frac{\omega_{n-1}}{2\alpha}\sup_{s>0}(t+s)^{\frac{n}{2\alpha}(1-p)}\int_0^\infty\frac{\eta^{\frac{n}{2\alpha}-1}}{(1+\eta)^{(\frac{n}{2\alpha}+1)p}}d\eta.\end{aligned}$$

$p>1$ より $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\eta^{\frac{n}{2\alpha}-1}}{(1+\eta)^{(\frac{n}{2\alpha}+1)p}}d\eta<\infty$ と $\displaystyle\frac{n}{2\alpha}(1-p)\leq 0$ がすぐにわかり，

$$\|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|^p_{h^p_\alpha} < Ct^{\frac{n}{2\alpha}(1-p)}$$

である．よって，

$$\|W^{(\alpha)}(x-\cdot,t+\cdot)\|_{h^p_\alpha} < Ct^{\frac{n}{2\alpha}(\frac{1}{p}-1)} \tag{12}$$

が得られる．

Carleson 不等式が成立するという仮定と (11)(12) の評価より結論が得られる．

5 十分性の証明

T_τ-Carleson 測度の条件を課したとき，$1 < p \leq q < \infty$ のもとでは Carleson 不等式が成立すること，すなわち命題 3.2 を示す．

$u \in h^p_\alpha$ について，

$$\Gamma(x) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x| < s^{\frac{1}{2\alpha}}\}$$
$$u^*(x) = \sup_{(y,s)\in\Gamma(x)} |u(y,s)|$$

とおく．$\lambda > 0$ として $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n \mid u^*(x) > \lambda\}$ とすると，u^* が下半連続であることから E_λ は開集合であり，

$$E_\lambda = \bigcup_{Q\in\mathfrak{F}} Q$$

と Whitney 分解できる（cf. [S]）．ここで，$\mathfrak{F}$ は $\mathbb{R}^n$ 内の cube 全体の集合であり，各 Q は共通部分を持たず，

$$C_1 \mathrm{diam}(Q) \leq \mathrm{dist}(Q, \partial E_\lambda) \leq C_2 \mathrm{diam}(Q) \tag{13}$$

と定数 C_1, C_2 がとれる．$\mathrm{diam}(Q)$ は Q の diameter である．

$$G_\lambda := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |u(x,t)| > \lambda\}$$

とする．$(x_0,t_0) \in G_\lambda, z \in B(x_0, t_0^{\frac{1}{2\alpha}})$ ととったとき $|x_0 - z| < t_0^{\frac{1}{2\alpha}}$ より $(x_0,t_0) \in \Gamma(z)$ であり，

$$\sup_{(y,s)\in\Gamma(z)} |u(y,s)| \geq |u(x_0,t_0)| > \lambda$$

が成立する．ゆえに，$B(x_0, t_0^{\frac{1}{2\alpha}}) \subseteq E_\lambda$ であるが，これは $(x_0,t_0) \in \widehat{E_\lambda}$ であることに他ならない．ゆえに，

$$G_\lambda \subset \widehat{E_\lambda} \tag{14}$$

が成立する．

補題 5.1. $\widehat{E_\lambda} \subset \bigcup_{Q\in\mathfrak{F}} \widehat{C_3 Q}$ が成立する．ここで，$C_3 Q$ は Q と中心を共通とし diameter が C_3 倍の cube とする．

証明 $(x,t) \in \widehat{E_\lambda}$ とすると $B(x, t^{\frac{1}{2\alpha}}) \subset E_\lambda$ であるから，$\mathrm{dist}(B(x, t_0^{\frac{1}{2\alpha}}), \partial E_\lambda) = 0$ となる $t_0 (\geq t)$ がとれる．ここで，∂E_λ は E_λ の境界である．$B(x, t_0^{\frac{1}{2\alpha}}) \subset E_\lambda$ であるから

$x \in E_\lambda (= \bigcup_{Q\in\mathfrak{F}} Q)$ であり，ある $Q_0 \in \mathfrak{F}$ があって $x \in Q_0$ とできる．x_0 を Q_0 の中心とする．$y \in B(x, t_0^{\frac{1}{2\alpha}})$ に対して $|x-y| \le t_0^{\frac{1}{2\alpha}}$ であるから，

$$|y - x_0| \le |y - x| + |x - x_0| \le t_0^{\frac{1}{2\alpha}} + \mathrm{diam}(Q_0)$$

である．$\widetilde{x}_0 \in Q_0 \cap \partial Q_0$ を Q_0 と ∂E_λ が最短，つまり $\mathrm{dist}(\widetilde{x}_0, \partial E_\lambda) = \mathrm{dist}(Q_0, \partial E_\lambda)$ となるようにとると，

$$\begin{aligned} t_0^{\frac{1}{2\alpha}} &= \mathrm{dist}(x, \partial E_\lambda) \\ &\le |x - \widetilde{x}_0| + \mathrm{dist}(Q_0, \partial E_\lambda) \\ &\le \mathrm{diam}(Q_0) + C_2 \mathrm{diam}(Q_0) \\ &= (C_2 + 1)\mathrm{diam}(Q_0) \end{aligned}$$

となる．ゆえに $|y - x_0| \le (C_2 + 2)\mathrm{diam}(Q_0)$ である．これはある定数 C_3 が存在して $y \in C_3 Q_0$ であることを意味する．y は $B(x, t_0^{\frac{1}{2\alpha}})$ から任意にとっているから $B(x, t^{\frac{1}{2\alpha}}) \subset B(x, t_0^{\frac{1}{2\alpha}}) \subset C_3 Q_0$ が示される．ゆえに，$(x,t) \in \widehat{C_3 Q_0}$ である．

□

よって，

$$\begin{aligned} \mu(G_\lambda) \le \mu(\widehat{E_\lambda}) &\le \sum_{Q\in\mathfrak{F}} \mu(\widehat{C_3 Q}) \le \kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \sum_{Q\in\mathfrak{F}} |C_3 Q|^{q/p} \\ &\le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \sum_{Q\in\mathfrak{F}} |Q|^{q/p} \le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] |E_\lambda|^{q/p} \end{aligned}$$

である．ここで，$|C_3 Q|, |Q|$ はそれぞれ $C_3 Q$ および Q の体積測度であり，最初の不等式は (14)，次の不等式は補題 5.1，その次の不等式は測度 μ に仮定された性質，最後の不等式は $p \le q$ であることによる．この評価により，

$$\begin{aligned} \|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)|^q \, d\mu(x,t) \\ &= \int_0^\infty \mu(\{|u(x,t)|^q > \lambda\}) \, d\lambda \\ &= \int_0^\infty \mu(\{|u(x,t)|^q > \widetilde{\lambda}^q\}) \, q\widetilde{\lambda}^{q-1} d\widetilde{\lambda} \\ &= q \int_0^\infty \mu(G_\lambda) \lambda^{q-1} d\lambda \\ &\le C\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu] \, q \int_0^\infty |E_\lambda|^{q/p} \lambda^{q-1} d\lambda \end{aligned}$$

である.

$$\int_0^\infty |E_\lambda|^{q/p}\lambda^{q-1}d\lambda \le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}} |E_{2^k}|^{q/p}2^{(k+1)(q-1)}d\lambda \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)q}|E_{2^k}|^{q/p}$$

および

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^*(x)|^p dx = p\int_0^\infty |E_\lambda|\lambda^{p-1}d\lambda \ge p\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}} |E_{2^{k+1}}|2^{k(p-1)}d\lambda = p\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp}|E_{2^{k+1}}|$$

より，$p \le q$ に注意すると

$$\left(\int_0^\infty |E_\lambda|^{q/p}\lambda^{q-1}d\lambda\right)^{p/q} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{(k+1)p}|E_{2^k}| \le \frac{2^{2p}}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |u^*(x)|^p dx$$

が得られる．ゆえに，

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} &\le C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}q^{1/q}\left(\int_0^\infty |E_\lambda|^{q/p}\lambda^{q-1}d\lambda\right)^{1/q}\\ &\le 4C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}p^{-1/p}q^{1/q}\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (15)\end{aligned}$$

である．

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p \le \infty)$ であるとき，

$$Mf(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

は f の極大関数と呼ばれ，$Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ である．

補題 5.2. $u \in h^p_\alpha$ に対して関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ を $u = P^{(\alpha)}[f]$ を満たすようにとるとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$u^* \le CMf$$

である．

証明 $(y,s) \in \Gamma(x)$ とする．$z \in \mathbb{R}^n$ に対して，$|x-z| \le |x-y| + |y-z| \le s^{\frac{1}{2\alpha}} + |y-z|$ より，

$$s + |x-z|^{2\alpha} \le s + (s^{\frac{1}{2\alpha}} + |y-z|)^{2\alpha} \le s + C(s + |y-z|^{2\alpha}) \le C(s + |y-z|^{2\alpha})$$

である．これを踏まえると，

$$
\begin{aligned}
|u(y,s)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| W^{(\alpha)}(y-z,s)\,dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(z)|}{(s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{s|f(z)|}{(s+|x-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz \\
&= C\sum_{m=0}^{\infty} I_m
\end{aligned}
$$

と積分 I_m の無限和に分解できる．ただし，

$$
\begin{aligned}
I_0 &:= \int_{|x-z|<s^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{s|f(z)|}{(s+|x-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz \\
I_m &:= \int_{(2^{m-1}s)^{\frac{1}{2\alpha}}\leq|x-z|<(2^m s)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{s|f(z)|}{(s+|x-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz \qquad (m=1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$

とする．

$$
I_0 \leq \int_{|x-z|<s^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{s|f(z)|}{s^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz = s^{-\frac{n}{2\alpha}}\int_{|x-z|<s^{\frac{1}{2\alpha}}} |f(z)|\,dz \leq Mf(x)
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
I_m &= \int_{(2^{m-1}s)^{\frac{1}{2\alpha}}\leq|x-z|<(2^m s)^{\frac{1}{2\alpha}}} \frac{s|f(z)|}{(s+2^{m-1}s)^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\,dz \\
&\leq \frac{1}{(1+2^{m-1})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}\frac{1}{s^{\frac{n}{2\alpha}}}\int_{|x-z|<(2^m s)^{\frac{1}{2\alpha}}} |f(z)|\,dz \\
&\leq 2^{-m}2^{(\frac{n}{2\alpha}+1)}(2^m s)^{-\frac{n}{2\alpha}}\int_{|x-z|<(2^m s)^{\frac{1}{2\alpha}}} |f(z)|\,dz \\
&\leq 2^{-m}2^{(\frac{n}{2\alpha}+1)}Mf(x)
\end{aligned}
$$

より

$$
\sum_{m=1}^{\infty} I_m \leq 2^{(\frac{n}{2\alpha}+1)}Mf(x)
$$

であることから，

$$
|u(y,s)| \leq C\,Mf(x) \qquad (C = 1+2^{(\frac{n}{2\alpha}+1)})
$$

となる．ゆえに

$$u^*(x) = \sup_{(y,s)\in\Gamma(x)} |u(y,s)| \le C\,Mf(x)$$

と示される．

□

補題 5.2 と (15) により，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^{n+1}_+, d\mu)} \le C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}\|Mf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

とできる．極大関数のノルムの評価として次が知られている．

補題 5.3 ([SW])**.** $1 < p \le \infty$ について $C_{p,n} = 2\left(\dfrac{5^n p}{p-1}\right)^{1/p}$ とすると，

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \le C_{p,n}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

が成立する．

この補題と命題 2.2 により，

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^{n+1}_+, d\mu)} \le C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])^{1/q}\|u\|_{h^p_\alpha}$$

であり，命題 3.2 は証明される．

参考文献

[N1] 中川　勇人, 放物型 Hardy 空間における Carleson measure inequality, 数理解析研究所講究録 **1618** (2008), 82–88.

[N2] 中川　勇人, 放物型 Hardy 空間における Carleson 測度と Carleson 不等式との関係, 数理解析研究所講究録 **1669** (2009), 114–121.

[N3] Hayato Nakagawa, *A remark on the limits of nontangential type for generalized Poisson integrals*, International Pure and Applied Math. J., to appear.

[NSS] M. Nishio, N. Suzuki, K. Shimomura, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153–162.

[S] E. M. Stein , *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.