数理解析研究所講究録
第 1696 巻 2010 年 9-31

Magnetic Schrödinger 作用素に対する Resolvent Estimates とその応用

スペクトル・散乱理論とその周辺

望月 清

中央大学理工学部（共同研究員）
mochizuk@math.chuo-u.ac.jp

1. 序

$\mathbf{R}^n$ における magnetic Schrödinger 作用素は

$$Lu=\sum_{j=1}^{n}(\partial_j+ib_j(x))^2u+c(x)u,\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \tag{1}$$

で与えられる．ここに $\partial_j=\partial/\partial x_j$, $i=\sqrt{-1}$ で $b_j(x)$, $c(x)$ は実数値関数である．$c(x)$ は external potential (scalar) で, $b(x)=(b_1(x),\cdots,b_n(x))$ は magnetic potential (vector) と呼ばれる．磁場は $b(x)$ それ自身ではなく, その回転 $\nabla\times b(x)$ で与えられることに注意しよう．ただし $\nabla=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$ で $\times$ は $\mathbf{R}^n$ での外積を表す．scalar potential $c(x)$ は原点で $O(|x|^{-2})$ の強い特異性を持ってもよいとする。

以下では $\nabla\times b(x)$, $c(x)$ に遠方での適当な減衰条件, また小ささを仮定し, 作用素 L の基本的な問題である 作用素の自己共役性, 一般化固有関数の増大度評価, 極限吸収の原理, resolvent の一様評価, 対応する発展方程式の平滑化効果 について概説する．

記号 $\nabla_b=\nabla+ib(x)$, $\Delta_b=\nabla_b\cdot\nabla_b$ とおく（$\cdot$ は $\mathbf{R}^n$ での内積）．このとき, 上の Schrödinger 作用素は $Lu=(-\Delta_b u+c)u$ と表せる．更に次の記号を用いる: $r=|x|$, $\tilde{x}=x/r$, $\partial_r=\tilde{x}\cdot\nabla$. また, Hilbert 空間 $L^2=L^2(\mathbf{R}^n)$ の内積, ノルムはそれぞれ

$$(f,g)=\int f(x)\overline{g(x)}dx,\quad \|f\|=\sqrt{(f,f)}$$

で表す．ただし $\int$ は $\mathbf{R}^n$ 上の積分を意味する．関数 $\xi=\xi(r)>0$ に対して L^2_ξ を norm

$$\|f\|_\xi=\left\{\int\xi(r)|f(x)|^2dx\right\}^{1/2}<\infty$$

を伴う重みつき L^2-空間とする．更に，$0<\epsilon<t<\infty$ に対して $B_{\epsilon,t}=\{x;\epsilon<|x|<t\}$, $B_t=\{x;|x|<t\}$, $B'_t=\mathbf{R}^n\backslash B_t$, $S_t=\{x;|x|=t\}$ とおく．

2. Schrödinger 作用素 L の自己共役性

この論説全体を通して次の条件を課す．

$(A1)$ $b_j(x)\in C^1(\mathbf{R}^n)$ で $c(x)\in C(\mathbf{R}^n\backslash 0)$. $c(x)$ は原点で $O(r^{-2})$ の特異性を許し，$c_\infty(x)\in L^\infty$ が存在して

$$c(x)-c_\infty\geq\frac{\beta}{r^2},\quad \beta\geq 0\ (n=2),\quad >-\frac{(n-2)^2}{4}\ (n\geq 3).$$

この条件のもとで Hilbert 空間 $L^2=L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の作用素 L を次のように定義する．

$$\begin{cases} Lu=-\Delta_b u+c(x)u \quad \text{for} \quad u\in\mathcal{D}(L), \\ \mathcal{D}(L)=\{u(x)\in L^2\cap H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\});(\Delta_b-c)u,r^{-1}u\in L^2\}. \end{cases} \tag{2}$$

定理 1 条件 $(A1)$ のもとで次が成り立つ．

(i) $u\in\mathcal{D}(L)$ ならば $\nabla_b u\in L^2$ である．

(ii) L は下に半有界な自己共役作用素である．

(iii) 更に $c(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ であれば，L の本質スペクトル $\sigma_e(L)$ は半直線 $[0,\infty)$ に含まれる．

Mochizuki [12: Theorem 1.1, 1.3] では $c(x)$ の singularity に Stummel condition と呼ばれる条件を課している．Kalf-Schmincke-Walter-Wist [7: Theorem 3] では $b(x)\equiv 0$ のときを証明している．(ii) を言うのに L が $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 上の微分作用素 $-\Delta_b+c$ の Friedrichs extension ([5]) であることを示すのだが，(i) が基礎になる．ここでは [7] に従って (i) を示す．

$\alpha\in\mathbf{R}$, $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\nabla_b u\right|^2&=\left|\nabla_b u+\tilde{x}\frac{\alpha}{r}u-\tilde{x}\frac{\alpha}{r}u\right|^2\\ &=\left|\nabla_b u+\tilde{x}\frac{\alpha}{r}u\right|^2-\nabla\cdot\left(\tilde{x}\frac{\alpha}{r}|u|^2\right)+\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}|u|^2.\end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ．同様に

$$\left|\tilde{x}\cdot\nabla_b u\right|^2=\left|\tilde{x}\cdot\nabla_b u+\frac{\alpha}{r}u\right|^2-\nabla\cdot\left(\tilde{x}\frac{\alpha}{r}|u|^2\right)+\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}|u|^2. \tag{3$'$}$$

(3) を $B_{\epsilon,t}=\{x\in\mathbf{R}^n;\epsilon<|x|<t\}$ 上で積分すれば

補題 1 次が成り立つ.

$$\int_{B_{\epsilon,t}}|\nabla_b u|^2dx=\int_{B_{\epsilon,t}}\left|\nabla_b u+\tilde{x}\frac{\alpha}{r}u\right|^2dx$$
$$-\Big(\int_{S_t}-\int_{S_\epsilon}\Big)\frac{\alpha}{r}|u|^2dS+\int_{B_{\epsilon,t}}\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}|u|^2dx.$$

補題 2 (i) $r^{-1}u\in L^2$ であれば

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon}r^{-1}|u|^2dS=0,\quad \liminf_{\rho\to\infty}\int_{S_\rho}r^{-1}|u|^2dS=0.$$

(ii) $u\in L^2$ のとき $\epsilon_k\to 0$, $t_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ が存在して

$$\partial_r\int_{S_1}r^n|u(r\omega)|^2dS\Big|_{r=\epsilon_k}\geq 0,\quad \partial_r\int_{S_1}r^n|u(r\omega)|^2dS_\omega\Big|_{r=t_k}\leq 0.$$

[定理 1 (i) の証明] $u\in\mathcal{D}(L)$ とすれば Gauss の公式により

$$\mathrm{Re}\int_{B_{\epsilon,t}}(-\Delta_b u+cu)\overline{u}dx=\int_{B_{\epsilon,t}}(|\nabla_b u|^2+c|u|^2)dx-\mathrm{Re}\Big(\int_{S_t}-\int_{S_\epsilon}\Big)(\tilde{x}\cdot\nabla u)\overline{u}dS. \quad (4)$$

これと補題 1 の等式を合わせ

$$-\mathrm{Re}\int_{S_r}(\tilde{x}\cdot\nabla u)\overline{u}dS=-\frac{1}{2r}\partial_r\int_{S_1}r^n|u(r\omega)|^2dS_\omega+\frac{n}{2r}\int_{S_r}|u|^2dS$$

に注意すれば

$$\mathrm{Re}\int_{B_{\epsilon,t}}(-\Delta_b u+cu)\overline{u}dx=\int_{B_{\epsilon,t}}\left|\nabla_b u+\tilde{x}\frac{\alpha}{r}u\right|^2dx$$
$$+\int_{B_{\epsilon,t}}\Big(\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}+c\Big)|u|^2dx$$
$$+\Big(\int_{S_t}-\int_{S_\epsilon}\Big)\frac{n-2\alpha}{2r}|u|^2dS-\frac{1}{2r}\Big[\partial_r\int_{S_1}r^n|u(r\omega)|^2dS_\omega\Big]_\epsilon^t.$$

ここで $\alpha=n/2$ とおく. このとき $r^{-1}u$, $|c|^{1/2}u\in L^2$ であるから, 補題 2 (ii) の第 1 の不等式に注意して $\epsilon=\epsilon_k\to 0$ とすれば

$$\int_{B_t}\left|\nabla_b u+\frac{n}{2r}u\right|^2dx<\infty$$

が得られる. ここで $\alpha = n/2$ のまま補題 1 に戻り, 補題 2 (i) の第 1 の不等式を用いれば

$$\int_{B_t} |\nabla_b u|^2 dS < \infty. \tag{5}$$

一方, (4) より

$$\mathrm{Re} \int_{B_{\epsilon,t}} (-\Delta_b u + cu)\overline{u} dx \geq \int_{B_{\epsilon,t}} (|\nabla_b u|^2 + c|u|^2) dx$$
$$-\frac{1}{2}\left[r^{-1}\partial_r \int_{S_1} r^n |u(r\omega)|^2 dS_\omega\right]_\epsilon^t - \frac{n}{2}\int_{S_\epsilon} r^{-1}|u|^2 dS$$

であるから, 補題 2 (ii) の第 2 の不等式から

$$\int_{B'_\epsilon} |\nabla_b u|^2 dS < \infty. \tag{6}$$

主張 (i) は (5) と (6) を合わせたものである. □

H_b^1 を norm

$$\|u\|_{H_b^1} = \left\{\int \left(|\nabla_b u|^2 + |u|^2\right) dx\right\}^{1/2} < \infty \tag{7}$$

による $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の完備化とする. このとき ∇_b に対応する Hardy の不等式が次で与えられる.

補題 3 $u \in H_b^1$ とすると

$$\int \frac{(n-2)^2}{4r^2}|u|^2 dx \leq \int |\tilde{x}\cdot\nabla_b u|^2 dx.$$

[証明] (3)' で $\alpha = \dfrac{n-2}{2}$ とおき, $B_{\epsilon,t}$ で積分して $t \to \infty$ とすると

$$\int_{B'_\epsilon} |\tilde{x}\cdot\nabla_b u|^2 dx \geq \int_{S_\epsilon} \frac{n-2}{2r}|u|^2 dS + \int_{B_{\epsilon,t}} \frac{(n-2)^2}{4r^2}|u|^2 dx.$$

左辺は $\epsilon \to 0$ で収束するので, 求める不等式が得られる. □

[定理 1 (ii) の証明] $u,\ v \in \mathcal{D}(L)$ とする. (i) を考慮すれば

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \int_{S_\epsilon} |(\tilde{x}\cdot\nabla_b u)\overline{v}| dS = \liminf_{t\to\infty} \int_{S_t} |(\tilde{x}\cdot\nabla_b u)\overline{v}| dS = 0.$$

従って Gauss の公式により

$$(Lu, v) = \int \left\{\nabla_b u \cdot \overline{\nabla_b v} + cu\overline{v}\right\} dx$$

が得られる．$\mathcal{D}(L)$ は L^2 で稠密であるから，これは L の対称性を示している．さらに $(A1)$ と補題 3 より

$$(Lu,u) \geq \left(\frac{(n-2)^2}{4}+\beta\right)\|r^{-1}u\|^2 - C_\infty\|u\|^2, \quad C_\infty = \max|c_\infty(x)| \tag{8}$$

であり，L は下に半有界になっている．

L が $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 上の微分作用素 $-\Delta_b + c(x)$ の Friedrichs extension であることを示そう．$\{u_k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ が

$$s-\lim_{k\to\infty} u_k = u \quad \text{in} \quad L^2,$$

$$\lim_{j,k\to\infty}([-\Delta_b + c](u_j-u_k), u_j-u_k) = 0.$$

を満たすとする．(8) より $\{r^{-1}u_k\}$ は L^2 での Cauchy 列になるから，結果として $r^{-1}u \in L^2$ が示される．故に $\mathcal{D}(L)$ は Friedrichs extension の定義域に一致する．□

[定理 1 (*iii*) の証明] $L_1 = L - c_\infty(x)$ の定義域を $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$ とおく．一般性を失うことなく $c_\infty(x) \to 0$ $(r \to \infty)$ とでき，

$$(L_1u,u) \geq C(\beta)\|\nabla_b u\|^2, \quad C(\beta) = 1 \ (n=2), \quad = 1+\frac{4\beta}{(n-2)^2} \ (n \geq 3),$$

であるから，掛け算作用素 $c_\infty(x)$ は L_1-compact になる．従って $\sigma_e(L) = \sigma_e(L_1)$．$L_1$ は正値なので (*iii*) が結論される．□

3. 一般化固有関数の増大度の評価

この節の定理を含め 3 つの定理が，Schrödinger 方程式

$$-\Delta_b u + c(x)u - \kappa^2 u = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{9}$$

の解に関する 1 つの汎関数等式をもとに証明されるので，まず，それを準備しておこう．以下では $\Pi_\pm = \{\kappa \in \mathbf{C}; \pm\mathrm{Re}\kappa > 0, \mathrm{Im}\kappa > 0\}$，$\overline{\Pi}_\pm = \Pi_\pm \cup \mathbf{R}_\pm$ とおき，$\kappa \in \overline{\Pi}_\pm$，$f \in L^2$ とする．

$u \in H^1_{\mathrm{loc}}$ を (9) の解とする．$v = e^{-i\kappa r}r^{(n-1)/2}e^{\sigma(r)}u$，$g = e^{-i\kappa r}r^{(n-1)/2}e^{\sigma(r)}f$ とおき，(9) を次のように書きかえる

$$\begin{aligned} -\nabla_b\cdot\nabla_b v &+ \left(-2i\kappa + \frac{n-1}{r} + 2\sigma'\right)\tilde{x}\cdot\nabla_b v \\ &+ \left(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} + \sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma'\right)v = g. \end{aligned} \tag{10}$$

$\varphi = \varphi(r)$ を滑らかな $r > 0$ の非負関数とし, $\phi = \phi(r) = e^{-2\mathrm{Im}\kappa r} r^{-n+1}\varphi(r)$ とおく. (10) の両辺に $\phi\overline{\tilde{x}\cdot\nabla_b v}$ を乗じれば

$$-\mathrm{Re}\nabla\cdot\{(\phi\nabla_b v)\overline{\tilde{x}\cdot\nabla_b v}\} + \phi'|(\tilde{x}\cdot\nabla_b v|^2 + \frac{\phi}{r}(|\nabla_b v|^2 - |(\tilde{x}\cdot\nabla_b v|^2)$$
$$+\frac{1}{2}\nabla\cdot(\phi\tilde{x}|\nabla_b v|^2) - \Big(\frac{\phi'}{2} + \phi\frac{n-1}{2r}\Big)|\nabla_b v|^2$$
$$-\mathrm{Re}\phi\{(\tilde{x}\times\nabla_b v)\cdot\overline{(\nabla\times ib)v}\} + \phi\Big(2\mathrm{Im}\kappa + \frac{n-1}{r} + 2\sigma'\Big)|\tilde{x}\cdot\nabla_b v|^2$$
$$+\mathrm{Re}\phi\Big(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} + \sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma'\Big)v\overline{\tilde{x}\cdot\nabla_b v} = \mathrm{Re}\left\{\phi g\overline{\tilde{x}\cdot\nabla_b v}\right\}.$$

これを $B_{R,t}$ で部分積分すれば

$$\nabla_b v = e^{-i\kappa r} r^{(n-1)/2}\Big\{\nabla_b(e^\sigma u) + \tilde{x}\Big(\frac{n-1}{2r} - i\kappa\Big)(e^\sigma u)\Big\},$$

$$\phi'(r) = \phi(r)\Big(-2\mathrm{Im}\kappa - \frac{n-1}{r} + \frac{\varphi'}{\varphi}\Big)$$

に注意して, 次の等式が得られる.

命題 1 $u \in H^1_{b,\mathrm{loc}}$ が (9) を満たすとする. $u_\sigma = e^\sigma u$, $f_\sigma = e^\sigma f$ そして

$$\theta_\sigma = \theta_\sigma(x,\kappa) = \nabla_b u_\sigma + \tilde{x}\Big(\frac{n-1}{2r} - i\kappa\Big)u_\sigma$$

とおけば

$$\Big(\int_{S_t} - \int_{S_R}\Big)\varphi\Big\{-|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2 + \frac{1}{2}|\theta_\sigma|^2\Big\}dS + \int_{B_{R,t}}\varphi\Big\{\Big(\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1}{r}\Big)|\tilde{x}\cdot\theta_b|^2$$
$$+\Big(\mathrm{Im}\kappa - \frac{\varphi'}{2\varphi} + \frac{1}{r}\Big)|\theta_\sigma|^2 + 2\sigma'|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2 + \mathrm{Re}J_\sigma(x,\kappa)$$
$$+\mathrm{Re}\left[(\sigma'' - \sigma'^2 + 2i\kappa\sigma')u_\sigma\overline{\tilde{x}\cdot\theta_\sigma}\right]\Big\}dx = \mathrm{Re}\int_{B_{R,t}}\varphi f_\sigma\overline{\tilde{x}\cdot\theta_\sigma}dx,$$
$$J_\sigma(x,\kappa) = -(\tilde{x}\times\theta_\sigma)\cdot\overline{(\nabla\times ib)u_\sigma} + \Big(c + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\Big)u_\sigma\overline{\tilde{x}\cdot\theta_\sigma}.$$

さて, 作用素 L の本質スペクトルを調べるための付加条件を次のようにおく.

$(A2)$　$R_0 > 0$ と $C_0 > 0$ が存在して

$$\max\Big\{|\nabla\times b(x)|, \Big|c(x) + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}\Big|\Big\} \le C_0\mu(r), \qquad r = |x| > R_0.$$

ここに $\mu = \mu(r)$ は $r > 0$ の滑らかな, 正の L^1-関数である.

定理 2 $(A1)$, $(A2)$ を仮定する. ただし, $\mu(r)$ は更に

$$\mu(r) = o(r^{-1}) \quad as \quad r \to \infty. \tag{11}$$

を満たすとする. $\lambda > 0$ とし, $u \in H^1_{b,\mathrm{loc}}$ が固有方程式

$$-\Delta_b u + c(x)u - \lambda u = 0 \tag{12}$$

を満たすならば, 次が成り立つ：もし u の support が compact でなければ

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{S_t} |\tilde{x}\cdot\theta|^2 dS \neq 0,$$

ここに θ は $\theta(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \nabla_b u + \tilde{x}\Big(\dfrac{n-1}{2r} \mp i\sqrt{\lambda}\Big)u$ のどちらかを表す.

注意 1 $\theta(x, \mp\sqrt{\lambda})$ は命題 1 の θ_σ で $\sigma \equiv 0$, $\kappa = \pm\sqrt{\lambda}$ としたもので, Sommerfeld の放射条件を定めるときに用いられる（次節参照）.

この定理は Rellich ([15]) の外部領域での Laplace 作用素に関する増大度評価の真の拡張になっている. 類似の結果

$$\lim_{t\to\infty} t^{\epsilon} \int_{S_t} \left(|\tilde{x}\cdot\nabla_b u|^2 + |u|^2\right) dS = \infty \quad (\forall\epsilon > 0)$$

が Ikebe-Uchiyama [7] に示されている. この場合には μ は (9) を満たせばよく, $L^1(\mathbf{R}_+)$ に属す必要ない.

定理 2 の証明に入ろう. 証明は Jäger-Rejto [8], Mochizuki [13] の oscillating long range potential を伴う non-magnetic Schrödinger 作用素に対して用いられた方法に従う.

補題 4 u を固有方程式 (12) の解とすれば, 各 $\lambda > 0$ と $r > 0$ に対して

$$\mathrm{Im}\Big[\int_{S_r} (\tilde{x}\cdot\nabla_b u_\sigma)\overline{u_\sigma} dS\Big] = 0, \tag{13}$$

$$\int_{S_r} \Big\{\Big|\tilde{x}\cdot\nabla_b u_\sigma + \frac{n-1}{2r}u_\sigma\Big|^2 + \lambda|u_\sigma|^2\Big\} dS = \int_{S_r} |\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2 dS, \tag{14}$$

が成り立つ. ただし $\theta_\sigma = \theta_\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})$ とおいている.

[証明] (12) に $\overline{u}$ を乗じて B_r 上で部分積分する. 虚部が

$$-\mathrm{Im}\int_{S_r} (\tilde{x}\cdot\nabla_b u)\overline{u} dS = 0$$

となるが, $\sigma(r)$ が実であるから, (13) が得られる. (14) は (13) から明らかである.
□

次の補題は $(A2)$ と (14) からただちに得られる.

補題 5 u を (12) の解とする. $\sigma(r)$ に無関係な定数 $C_1 > 0$ が存在して

$$\int_{S_r} |J_\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})| dS \leq C_1 \mu(r) \int_{S_r} |\theta_\sigma|^2 dS \quad for \;\; r > R_0.$$

[定理 2 の証明] $F(r)$, $F_{\sigma,\tau}(r)$ を次のように定義する.

$$F(r) = \frac{1}{2} \int_{S_r} \{2|\tilde{x} \cdot \theta|^2 - |\theta|^2\} dS,$$

$$F_{\sigma,\tau} = \frac{1}{2} \int_{S_r} \{2|\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - |\theta_\sigma|^2 + (\sigma'^2 - \tau)|u_\sigma|^2\} dS.$$

ただし, $\theta = \theta_0$ $(\sigma \equiv 0)$ で $\tau = \tau(r) > 0$ は後で定めるもう 1 つの重み関数である.

まず, $r_k \to \infty$ なる数列で $F(r_k) > 0$ を満たすものが存在するとしよう. 命題 1 で $\sigma \equiv 0$, $\varphi \equiv 1$, $\kappa^2 = \lambda > 0$, $f \equiv 0$ とおけば

$$F(t) - F(R) = \int_{B_{R,t}} \left\{ \frac{1}{r}(|\theta|^2 - |\tilde{x} \cdot \theta|^2) + \mathrm{Re} J(x, \pm\sqrt{\lambda}) \right\} dx,$$

ただし $J = J_0$ である. $R_1 \geq R_0$ を $\dfrac{1}{r} \geq 2C_1\mu(r)$ $(r \geq R_1)$ が成り立つように選び, 両辺を t で微分する. 補題 5 を用いれば

$$\frac{d}{dt} F(t) \geq -2C_1 \mu(t) F(t) \quad \text{in} \;\; t \geq R_1.$$

仮定より $r_k \geq R_1$ を選ぶことができて

$$\frac{F(t)}{F(r_k)} \geq \exp\left\{ -2C_1 \int_{r_k}^{t} \mu dr \right\}.$$

ここで $\mu(r) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ に注意すれば, $F(t)$ の $t = \infty$ の近くでの一様正値性が示される.

次に上の場合の相補条件：u の support は compact でなく, $R_2 \geq R_1$ が存在して $r \geq R_2$ で $F(r) \leq 0$ となる, が成り立つとしよう. このとき、命題 1 で $\varphi = r$, $\kappa^2 = \lambda$, $f \equiv 0$ とおき, 等式

$$\frac{1}{2}\left(\int_{S_t} - \int_{S_R}\right) r \left(\sigma'^2 - \tau\right) |u_\sigma|^2 - \frac{1}{2} \int_{B_{R,t}} r \left\{ \mathrm{Re} \left[(\sigma'^2 - \tau) u_\sigma \overline{\tilde{x} \cdot \theta_\sigma} \right] \right.$$

$$-\left(\frac{1}{r}\sigma'^2+\sigma''\sigma'-\frac{1}{r}\tau-\frac{1}{2}\tau'\right)|u_\sigma|^2\Big\}dx=0$$

との差をとると

$$\frac{d}{dt}\left[tF_{\sigma,\tau}(t)\right]=\int_{S_t}r\Big\{\frac{1}{2r}|\theta_\sigma|^2+\mathrm{Re}J_\sigma(r)+2\sigma'\Big|\tilde{x}\cdot\nabla_b u_\sigma+\frac{n-1}{2r}u_\sigma\Big|^2$$
$$+(\sigma''-\tau)u_\sigma\left(\overline{\tilde{x}\cdot\nabla_b u_\sigma}+\frac{n-1}{2r}\overline{u_\sigma}\right)+\left(\frac{1}{r}\sigma'^2+\sigma''\sigma'-\frac{1}{r}\tau-\frac{1}{2}\tau'\right)|u_\sigma|^2\Big\}dS. \quad (15)$$

ここでは

$$\int_{S_t}2\sigma'\left\{|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2+\mathrm{Re}[\pm i\sqrt{\lambda}u_\sigma\overline{\tilde{x}\cdot\theta_\sigma}]\right\}dS=\int_{S_t}2\sigma'\Big|\tilde{x}\cdot\nabla_b u_\sigma+\frac{n-1}{2r}u_\sigma\Big|^2 dS$$

を導くのに, 補題 4 を用いている.

さて, $\sigma(r)$ と $\tau(r)$ を次のように選ぼう.

$$\sigma(r)=\frac{m}{1-\epsilon}r^{1-\epsilon},\quad \tau(r)=r^{-2\epsilon}\log r$$

ただし $m\geq 1$, $1/3<\epsilon<1/2$ である. (14) と仮定 (11) に注意すれば, (15) から次の不等式が示される（詳細は Mochizuki [13] を参照）. $R_3\geq R_2$ が存在して任意の $m\geq 1$ に対して

$$\frac{d}{dt}[tF_{\sigma,\tau}(t)]\geq\int_{S_t}r\left(\frac{1}{2r}-o(r^{-1})\right)|\theta_\sigma|^2dS\geq 0\ \text{ in }\ t\geq R_3.$$

更に, 相補条件から $R_4\geq R_3$ で $\int_{S_{R_4}}|u_\sigma|^2dS>0$ を満たすものが存在するので, m を $F_{\sigma,\tau}(R_4)>0$ が成り立つように大きく選ぶことができ, $t\geq R_4$ では $F_{\sigma,\tau}(t)>0$ が言える. ここで

$$F_{\sigma,\tau}(t)=e^{2\sigma(t)}\left\{F(t)+\sigma'\frac{d}{dt}\int_{S(t)}|u|^2dS+(2\sigma'^2-\tau)\int_{S(t)}|u|^2dS\right\}$$

に注意しよう. 右辺では $t=\infty$ の近くで $F(t)\leq 0$ であり, 第 3 項が $t\to\infty$ で非正であるから, 十分大きな t に対して

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)}|u|^2dS>0$$

なる不等式が成り立つことが示される. □

4. 極限吸収の原理

この節の結果は Mochizuki [12], [13] にあるように, 定理 2 の直接の帰結である (Eidus [3] の方法). 証明には次の条件も必要になる.

$(A3)$ 方程式 (9) に対して一意接続定理が成り立つ.

注意 2 この仮定は $\nabla \times b(x)$, $c(x)$ が原点を除いて Hölder 連続であれば成り立つ.

定理 3 $(A1)$〜$(A3)$ を仮定する. ただし, L^1-関数 $\mu(r)$ は (11) とともに

$$\int_r^\infty \mu(s)ds \geq r\mu(r), \qquad r > R_0 \tag{16}$$

を満たすとする. このとき, L の resolvent $R(\kappa^2)$ は $L^2_{\mu^{-1}}$ を L^2_μ に写す作用素として, 連続的に $\overline{\Pi}_\pm$ に延長される. 従って L の正のスペクトルは Lebesgue 測度に関して絶対連続になる.

次のようにおく.

$$\varphi_1(r) = \left(\int_r^\infty \mu(s)ds\right)^{-1}.$$

すぐわかるように

$$\varphi_1'(r) = \mu(r)\varphi_1(r)^2 \tag{17}$$

であり, $\mu\varphi_1$ 従って $\varphi_1' = \mu\varphi_1^2$ は $L^1(\mathbf{R}_+)$ に属さない. 更に, (16) から

$$\frac{\varphi_1'(s)}{\varphi_1(s)} = \mu(r)\varphi_1(r) \leq \frac{1}{r}, \qquad r > R_0 \tag{18}$$

が言える.

定義 1 $\kappa \in \overline{\Pi}_\pm$, $f \in L^2_{\mu^{-1}}$ とする. (9) の解 $u \in H^1_{\mathrm{loc}}$ に対して放射条件を

$$u \in L^2_\mu, \quad \tilde{x}\cdot\theta = \tilde{x}\cdot\theta(x,\kappa) \in L^2_{\varphi_1'}$$

で定義する. 放射条件を満たす解 u を $\kappa \in \overline{\Pi}_+$, $\kappa \in \overline{\Pi}_-$ に従って, それぞれ outgoing, incoming 解と呼ぶ.

補題 6 κ, f, u を定義 1 のものとする. このとき

(i) $R \geq R_0$ に対して

$$|\mathrm{Re}\kappa|\|u\|^2_{\mu,B'_R} \leq 2\varphi_1(R)^{-1}\left\{\|\tilde{x}\cdot\theta\|^2_{\varphi_1',B'_{R_0}} + \|f\|_{\mu^{-1}}\|u\|_\mu\right\}.$$

(ii) $\mathrm{Im}\kappa > 0$ なら $u \in L^2$ で

$$2|\mathrm{Re}\kappa|\mathrm{Im}\kappa\|u\|^2 \leq \|f\|_{\mu^{-1}}\|u\|_\mu.$$

(iii) κ が $\overline{\Pi}_{\pm}$ の compact 集合 $K_{\pm}$ を動くとき, 定数 $C_2 = C_2(R, K_{\pm}) > 0$ が存在して

$$\int_{B_R} \{|\nabla_b u|^2 + r^{-2}|u|^2\} dx \leq C_2 \left\{ \|f\|^2_{\mu^{-1}} + \|u\|^2_{\mu} \right\}.$$

[証明] Gauss の公式により

$$\mathrm{Im} \int_{B_r} f\bar{u}dx = -\mathrm{Im} \int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \nabla_b u)\bar{u}dS - \mathrm{Im}(\kappa^2) \int_{B_r} |u|^2 dx.$$

従って

$$\mathrm{Im}(\kappa^2) \int_{B_r} |u|^2 dx + \mathrm{Re}\kappa \int_{S_r} |u|^2 dS = -\mathrm{Im}\left[\int_{S_r} (\tilde{x} \cdot \theta)\overline{u}dS + \int_{B_r} f\overline{u}dx\right]. \tag{19}$$

$\mathrm{Im}\kappa^2$ と $\mathrm{Re}\kappa$ の符号は同じであるから, まず (19) に $\mu(r)$ を乗じて (R, ∞) で積分することにより

$$|\mathrm{Re}\kappa| \|u\|^2_{\mu, B'_R} \leq \int_{B'_R} \mu|\tilde{x} \cdot \theta||u|dx + \varphi_1(R)^{-1} \int |f||u|dx$$

が得られる. ここで関係式 $\mu^{1/2} = \varphi_1^{-1}{\varphi'_1}^{1/2}$ に注意し, Schwarz の不等式を用いれば (i) が示される.

次に (19) に戻って

$$|\mathrm{Im}(\kappa^2)| \int_{B_r} |u|^2 dx \leq \int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta||u|dS + \int_{B_r} |f||u|dx$$

に注意する. 面積分を

$$\int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta||u|dS = \frac{1}{\mu\varphi_1} \int_{S_r} \sqrt{\varphi'_1}|\theta|\sqrt{\mu}|u|dS$$

と変形すれば $\mu\varphi \notin L^1(\mathbf{R}_+)$ であるから

$$\liminf_{r \to \infty} \int_{S_r} |\tilde{x} \cdot \theta||u|dS = 0$$

が得ら, (ii) が示される.

(iii) を示すのに $\chi = \chi(r)$ を $\chi(r) = 1$ $(r \leq R)$, $= 0$ $(r > R+1)$ を満たす滑らかな実数値関数とし, (9) の両辺に $\chi\overline{u}$ を乗じて部分積分すると

$$\mathrm{Re} \int \chi\{f\overline{u} + \kappa^2|u|^2\}dx = \int \chi\{|\nabla_b u|^2 + c(x)|u|^2\}dx + \mathrm{Re} \int \chi'(\tilde{x} \cdot \nabla_b u)\overline{u}dx.$$

ここで (3) より

$$\int \chi \frac{(n-2)^2}{4r^2}|u|^2 dx + \int \chi'|u|^2 dx \leq \int \chi|\nabla_b u|^2 dx.$$

また $(A1)$ より $c(x) \geq \dfrac{\beta}{r^2} - C_\infty$ であるから

$$\epsilon = 1 \ \ (n=2), \quad = \left(\frac{(n-2)^2}{2} + \beta\right)^{-1}\left(\frac{(n-2)^2}{4} + \beta\right) \ \ (n \geq 3)$$

とおいて

$$\epsilon \int \chi\left\{|\nabla_b u|^2 + \left(\frac{(n-2)^2}{4} + \beta\right)\frac{1}{r^2}|u|^2\right\}dx \leq \int \chi\{|f\overline{u}| + (C_\infty + |\kappa|^2)|u|^2\}dx$$
$$- \int \chi'\{|(\tilde{x}\cdot\nabla_b u)\overline{u}| + |u|^2\}dx. \tag{20}$$

故に $B_{R,R+1}$ での (9) の楕円性に注意すれば, (iii) が示される. □

補題 7 $\kappa \in K_\pm$, f, u を定義 1 のものとする. このとき定数 $C_3 = C_3(K_\pm) > 0$ が存在して

$$\|\theta\|^2_{\varphi_1', B'_{R_0}} \leq C_3\left\{\|f\|^2_{\mu^{-1}} + \|f\|^2_\mu\right\}.$$

[証明] 命題 1 で $R = R_0$, $t > R_0 + 1$ とし, $\sigma = 0$, $\varphi = (1-\chi)\varphi_1$ とおく. このとき

$$\int_{S_t}\varphi_1\left(-|\tilde{x}\cdot\theta|^2 + \frac{1}{2}|\theta|^2\right)dS + \int_{B_{R,t}}(1-\chi)\varphi_1\left\{\left(2\mathrm{Im}\kappa + \frac{\varphi_1'}{2\varphi_1}|\theta|^2\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{r} - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)(|\theta|^2 - |\tilde{x}\cdot\theta|^2) + \mathrm{Re}\left[J(x,\kappa) - f\tilde{x}\cdot\bar{\theta}\right]\right\}dx$$
$$- \int_{B_{R,R+1}}\chi'\varphi_1\left(-|\tilde{x}\cdot\theta|^2 + \frac{1}{2}|\theta|^2\right)dx = 0. \tag{21}$$

(17) より

$$\mu(t)\varphi_1(t)\int_{S_t}\varphi_1|\tilde{x}\cdot\theta|^2 dS = \int_{S_t}\varphi_1'|\tilde{x}\cdot\theta|^2 dS.$$

放射条件により右辺は t の L^1 関数で, $\mu(t)\varphi_1(t) \not\in L^1(\mathbf{R}_+)$ であるから

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{S_t}\varphi_1|\tilde{x}\cdot\theta|^2 dS = 0$$

となる. また $(A2)$ と (17) とから $r > R_0$ で

$$\varphi_1|J(x,\kappa)| \leq \varphi_1 C_0\mu|u||\theta| \leq C_0\mu^{1/2}|u|{\varphi_1'}^{1/2}|\theta|$$

であり, 補題 6 (iii) の場合と同様に

$$\int_{B_{R,R+1}}|\theta|^2 dx \leq C(R,K_\pm)\left(\|u\|^2_\mu + \|f\|^2_{\mu^{-1}}\right).$$

更に (18) を考慮すれば, (21) で $t \to \infty$ とすることにより補題の不等式が得られる.
□

以下, 上の 2 つの補題と定理 2 を用いて定理 3 の証明を行う.

第 1 段 任意の $\kappa \in \overline{\Pi}_\pm$, $f \in L^2_{\mu-1}$ に対して (9) の outgoing (または incoming) 解は一意である. $\kappa \in \Pi_\pm$ であれば, この解は存在して $R(\kappa^2)f$ に一致する.

[証明] $\mathrm{Im}\kappa > 0$ のときは, 補題 6 (*ii*) により, 放射条件を満たす解は L^2 に属す. 逆に L^2 解 $R(\kappa^2)f$ は放射条件を満たすから, これが唯一の解になる. そこで $\mathrm{Im}\kappa = 0$ とする. 解が 2 つあったとして, その差を u とすれば, u は $\lambda = \kappa^2 > 0$ として固有方程式 (12) を満たし, さらに放射条件より

$$\int_0^\infty \varphi'(r)dr \int_{S_r} |\theta|^2 dS < \infty.$$

$\varphi' \notin L^1(\mathbf{R}_+)$ に注意すれば

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{S_r} |\theta|^2 dS = 0$$

が従うが, これは定理 2 の結論に反する. 故に u は compact support を持つことになり, 一意接続定理から $u \equiv 0$ が示される. □

$\{(\kappa_k, f_k)\} \subset \overline{\Pi}_\pm \times L^2_{\mu-1}$ に対して, $\{u_k\}$ を放射条件を満たす (9) の解の列とする. $\{u_k\}$ が存在し, $k \to \infty$ と共に $(\kappa_k, f_k) \to (\kappa_0, f_0) \in \overline{\Pi}_\pm \times L^2_{\mu-1}$ とすると

第 2 段 $u_k \to u_0 \in L^2_\mu$ であれば, u_0 は $\kappa = \kappa_0$ に対応する放射条件を満たす.

[証明] $R \geq R_0$, $K_\pm = \{\kappa_k\} \cup \{\kappa_0\}$ とする.

$$\|\theta(\cdot, \kappa_k)\|_{B_R} \leq \|\nabla_b u\|_{B_R} + \left\|\frac{n-1}{2r}u\right\|_{B_R} + |\kappa_k|\|u\|_{B_R}$$

であるから, 仮定と補題 6 (*iii*) より $\|\theta(\cdot, \kappa_k)\|_{B_R}$ は有界になる. これと補題 7 を合わせれば $\{\theta_k = \theta(x, \kappa_k)\}$ が $L^2_{\varphi'}$ で有界であることがわかり, 従って $\{\theta_k\}$ は $L^2_{\varphi'}$ で弱収束する部分列をもつ. それをまた $\{\theta_k\}$ で表し, 極限を $\theta_0(x)$ とする. $\theta_0 \in L^2_{\varphi'}$ で, 任意の $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$(\tilde{x} \cdot \theta_k, h) = \left(u_k, -\nabla_b \cdot (\tilde{x}u) + \frac{n-1}{2r}u - \overline{i\kappa_k}h\right) \to \left(u_0, -\tilde{x} \cdot \nabla_b h - \frac{n-1}{2r}u - \overline{i\kappa_0}h\right).$$

故に $\tilde{x} \cdot \nabla_b u + \left(\dfrac{n-1}{2r} - i\kappa_0\right)u = \tilde{x} \cdot \theta_0$ が従い u_0 は放射条件を満たす. □

第 3 段 $\{u_k\}$ が L^2_μ で有界なら同じ空間で compact である.

[証明] $\mathrm{Re}\kappa_k$ は一様に正で $\{(f_k, u_k)\}$ が $L^2_{\mu^{-1}} \times L^2_\mu$ で有界だから, 補題 6 (i) と補題 7 を合わせれば $\|u_k\|_{\mu, B'_R}$ は十分大きな R に対して一様に小さくなり, 補題 6 (iii) より $\{u_k\}$ は $H^1_{b,\mathrm{loc}}$ で有界になる. 従って, Rellich の compactness criterion が使え, 主張が示される. □

第4段 $\{u_k\}$ は L^2_μ で有界である.

[証明] $\{u_k\}$ の部分列, 簡単のため $\{u_k\}$ と書く, で $k \to \infty$ で $\|u_k\|_\mu \to \infty$ となるものがあるとする. $v_k = u_k/\|u_k\|_\mu$ とおけば,

$$(\kappa_k, f_k/\|u_k\|_\mu) \to (\kappa_0, 0) \in \overline{\Pi}_\pm \times L^2_{\mu^{-1}}$$

で $\|v_k\|_\mu = 1$ であるから, 上に見たように $\{v_k\}$ は収束する部分列を持ち, その極限を v_0 と書けば, それは $\lambda = \kappa_0^2$ として固有方程式 (12) の解になり, 更に放射条件

$$\|v_0\|_\mu = 1, \quad \left\|\tilde{x} \cdot \nabla_b v_0 + \left(\frac{n-1}{2r} - i\kappa_0\right)v_0\right\|_{\varphi'_1} < \infty$$

を満たす. 故に第 1 段から $u \equiv 0$ が結論される. しかし, これは $\|v_0\|_\mu = 1$ に矛盾し, 主張が示される. □

[定理 3 の証明] 任意の $(\kappa_0, f_0) \in \mathbf{R}_\pm \cup L^2_{\mu^{-1}}$ に対して $\{\kappa_k\} \subset \Pi_\pm$ を k と共に κ_0 に収束するようにとり, $u_k = R(\kappa_k^2)f_0$ とおく. 上の主張 (iv), (iii), (ii) をたどって $\{u_k\}$ は (κ_0, f_0) に対応する (9) の outgoing (incoming) 解 u_0 に収束する部分列を持つことがわかる. 解の一意性 (主張 (i)) を用いれば, 部分列をとる必要はなく, $\{u_k\}$ 自体が収束列になっていること, また, u_0 は列 $\{\kappa_k\}$ のとり方に依らないことがわかる. 従って, $R(\kappa^2) : L^2_{\mu^{-1}} \to L^2_\mu$ は $\overline{\Pi}_\pm$ 全体延長された. これの κ に対する連続性は主張 (ii) と (i) から明らかである. □

5. 一様な resolvent 評価

この節と次節の結果は Mochizuki [14] による. 問題は resovent $R(\kappa^2)$ の $\kappa \in \Pi_\pm$ での一様評価とその応用であるが, そのために以下では $n \geq 3$ とし, $\max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\}$ に減衰条件だけでなく, 小ささの条件も仮定する.

定理 4 $\kappa \in \Pi_\pm$, $f \in L^2$ に対して $u = R(\kappa^2)f$ を考える.

(i) Let $(A1)$ と共に次の $(A4)$ を仮定する

$(A4)$ $$\max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\} \leq \epsilon_0 r^{-2}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

ここに $0 < \epsilon_0 < 1/4\sqrt{2}$ $(n=3)$, $< \sqrt{(n-1)(n-3)/8}$ $(n \geq 4)$. このとき

$$\int \frac{1}{r^2}|u|^2 dx \leq C_4 \int r^2 |f|^2 dx,$$

ただし $C_4 = \dfrac{8}{1-32\epsilon_0^2}$ $(n=3)$, $= \dfrac{8}{(n-1)(n-3)-8\epsilon_0^2}$ $(n \geq 4)$ である.

(ii) $(A1)$ と共に次の $(A5)$ を仮定する.

$$(A5) \qquad \max\{|\nabla \times b(x)|, |c(x)|\} \leq \epsilon_0 \min\{\mu(r), r^{-2}\}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

ここに $\mu(r)$ は $r > 0$ の滑らかな, 正の L^1-関数で, 更に

$$\mu'(r) \leq 0, \quad r \in \mathbf{R}_+ \tag{22}$$

を満たすものとする. このとき

$$\int \Big\{ \mu(|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) - \mu' \frac{n-1}{2r}|u|^2 \Big\} dx \leq C_5 \int \max\{\mu^{-1}, r^2\} |f(x)|^2 dx,$$

ただし $C_5 = 4\|\mu\|_{L^1}\Big(5 + 4\epsilon_0^2 C_4\Big)$ である.

以下, 補題を重ねてこの定理を示そう.

補題 8 $\varphi = \varphi(r)$, $r > 0$, を正の増加関数で

$$\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} \leq \frac{1}{r} \tag{23}$$

を満たすものとする. このとき

$$\int \varphi \Big(\mathrm{Im}\kappa + \frac{\varphi'}{2\varphi}\Big) \Big\{ |\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2 \Big\} dx$$
$$\leq \int \varphi \left(|f| + \max\{|\nabla \times b|, |c|\}|u|\right) |\theta| dx.$$

[証明] 命題 1 の等式に戻って $\sigma \equiv 0$ とおき, $R \to 0$, $t \to \infty$ とすると

$$\int \varphi \Big\{ \Big(\frac{1}{r} - \frac{\varphi'}{\varphi}\Big)(|\theta|^2 - |\tilde{x}\cdot\theta|^2) + \Big(\mathrm{Im}\kappa + \frac{\varphi'}{2\varphi}\Big)|\theta|^2 + \mathrm{Re}J(x,\kappa) \Big\} dx$$
$$= \mathrm{Re} \int \varphi f \overline{\tilde{x}\cdot\theta} dx. \tag{24}$$

次に注意しよう.

$$\varphi\Big|J(x,\kappa)-\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u\overline{\tilde{x}\cdot\theta}\Big|\le\varphi\max\{|\nabla\times b|,|c|\}|u||\theta|,$$

$$\mathrm{Re}\int\varphi\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u\overline{\tilde{x}\cdot\theta}dx=\int\varphi\Big(\mathrm{Im}\kappa-\frac{\varphi'}{2\varphi}+\frac{1}{r}\Big)\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2dx.$$

これらを (24) に代入し, 条件 (23) を考慮すれば, Schwarz の不等式から補題の不等式が導かれる. □

補題 9 次の不等式が成り立つ.

$$\int\frac{1}{4r^2}|u|^2dx\le\int|\tilde{x}\cdot\theta|^2dx.$$

[証明] 第2節の等式 (3) に戻ろう. この両辺に重み関数 $\xi=\xi(r)$ を乗じて $B_{\epsilon,t}$ で積分すれば

$$\int_{B_{\epsilon,t}}\xi|\tilde{x}\cdot\nabla_b u|^2dx=\int_{B_{\epsilon,t}}\Big|\tilde{x}\cdot\nabla_b(\sqrt{\xi}u)+\frac{\alpha}{r}\sqrt{\xi}u\Big|^2dx$$
$$-\Big[\int_{S_t}-\int_{S_\epsilon}\Big]\Big(\frac{\xi'}{2\xi}+\frac{\alpha}{r}\Big)|\sqrt{\xi}u|^2dS$$
$$+\int_{B_{\epsilon,t}}\Big\{\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}+\frac{(n-1)\xi'}{2r\xi}+\frac{2\xi''\xi-\xi'^2}{4\xi^2}\Big\}|\sqrt{\xi}u|^2dx$$

が得られる. ここで u を $v=e^{-i\kappa r}r^{(n-1)/2}u$ でおきかえ, $\xi=e^{-2\mathrm{Im}\kappa r}r^{-n+1}$, $\alpha=\dfrac{n-2}{2}$ とすれば

$$\xi|v|^2=|u|^2,\quad \xi|\tilde{x}\cdot\nabla_b v|^2=|\tilde{x}\cdot\theta|^2,$$
$$\frac{(n-2)\alpha-\alpha^2}{r^2}+\frac{(n-1)\xi'}{2r\xi}+\frac{2\xi''\xi-\xi'^2}{4\xi^2}=\frac{1}{4r^2}+(\mathrm{Im}\kappa)^2$$

であるから, $\epsilon\to0$, $t\to\infty$ での極限をとって, 補題の不等式が示される. □

[定理 4 (i) の証明] 補題 8 で $\varphi(r)=r$ とおく. $(A4)$ に注意すれば, 任意の $0<\epsilon\le1$ に対して

$$\frac{1}{2}\int\Big\{(1-\epsilon)|\theta|^2+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2\Big\}dx\le\frac{1}{\epsilon}\int\Big(r^2|f|^2+\epsilon_0^2r^{-2}|u|^2\Big)dx.$$

これと補題 9 を合わせれば

$$\frac{-\epsilon^2+(n-2)^2\epsilon-8\epsilon_0^2}{8\epsilon}\int\frac{1}{r^2}|u|^2dx\le\frac{1}{\epsilon}\int r^2|f|^2dx$$

が得られる. そこで $\epsilon=\min\{\sqrt{8}\epsilon_0,1\}$ とおけば (i) が成り立つ. □

補題 10 $c(x)\geq -\dfrac{(n-2)^2}{4r^2}$ とする. このとき (22) を満たす $\mu\in L^1(\mathbf{R}_+)$ に対して

$$\frac{1}{2}\int\Big\{\mu\mathrm{Im}\kappa\frac{1}{r}|u|^2|-\mu'\frac{n-1}{r}|u|^2+\mu(|\nabla_b u|^2+|\kappa u|^2)\Big\}dx$$

$$\leq\frac{1}{2}\int\mu\Big(|\theta|^2+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2\Big)dx+\|\mu\|_{L^1}\int|f(x)||i\kappa u|dx$$

が成り立つ.

[証明] (9) の両辺に $-\overline{i\kappa u}$ を乗じ B_r で部分積分すると

$$\frac{1}{2}\int_{S_r}\left\{-|\nabla_b u-i\kappa u|^2+|\nabla_b u|^2+|\kappa|^2|u|^2\right\}dS$$

$$+\mathrm{Im}\kappa\int_{B_r}\left(|\nabla_b u|^2+c|u|^2+|\kappa u|^2\right)dx=-\mathrm{Re}\int_{B_r}f\overline{i\kappa u}dx.$$

これに $\mu(r)$ を乗じ, 更に $(0,\infty)$ で積分すれば

$$\mu|\nabla_b u-i\kappa\tilde{x}u|^2=-\nabla\cdot\{\tilde{x}\mu\frac{n-1}{2r}|u|^2\}+\mu\Big(|\theta|^2+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2\Big)$$

$$+\mu'\frac{n-1}{2r}|u|^2-\mu\mathrm{Im}\kappa\frac{n-1}{r}|u|^2$$

に注意して

$$\frac{1}{2}\int\Big\{\mu\mathrm{Im}\kappa\frac{n-1}{r}|u|^2-\mu'\frac{n-1}{2r}|u|^2+\mu\left(|\nabla_b u|^2+|\kappa u|^2\right)\Big\}dx$$

$$+\mathrm{Im}\kappa\int_0^\infty\mu dr\int_{B_r}\left(|\nabla_b u|^2+c|u|^2+|\kappa u|^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\mu\Big(|\theta|^2+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}|u|^2\Big)dx+\mathrm{Re}\int_0^\infty\mu dr\int_{B_r}f(x)\overline{i\kappa u}dx$$

が得られる. $c(x)\geq -\dfrac{(n-2)^2}{4r^2}$ に注意し, 補題 1 で $\alpha=\dfrac{n-2}{2}$, $\epsilon\to 0$ とすれば

$$\mathrm{Im}\kappa\int_0^\infty\mu dr\int_{B_r}(|\nabla_b u|^2+c(x)|u|^2)dx$$

$$\geq -\mathrm{Im}\kappa\int_0^\infty\mu dr\int_{S_r}\frac{n-2}{2r}|u|^2dS=-\int\mu\mathrm{Im}\kappa\frac{n-2}{2r}|u|^2dx$$

となるから, これを上の式に代入して補題の不等式が示される. □

[定理 4 (ii) の証明] $\varphi(r) = \int_0^r \mu(\sigma)d\sigma$ として補題 8 と 10 を合わせる．この φ が (23) を満たすことは明らかであろう．定義から $\varphi(r) \le \|\mu\|_{L^1}$ であるから

$$\frac{1}{2}\int\left\{-\mu'\frac{n-1}{2r}|u|^2 + \mu\left(|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2\right)\right\}dx$$

$$\le 4\|\mu\|_{L^1}^2 \int \mu^{-1}\left(|f|^2 + |\max\{|\nabla\times b|, |c|\}u|^2\right)dx + \|\mu\|_{L^1}\int |f||i\kappa u|dx.$$

従って

$$\|\mu\|_{L^1}\int |f||i\kappa u|dx \le \|\mu\|_{L^1}^2\int \mu^{-1}|f|^2dx + \frac{1}{4}\int \mu|\kappa u|^2dx$$

に注意すれば

$$\int\left\{\mu(|\nabla_b u|^2 + |\kappa u|^2) - \mu'\frac{n-1}{2r}|u|^2\right\}dx$$

$$\le 4\|\mu\|_{L^1}^2\int \mu^{-1}\left(5|f(x)|^2 + 4|\max\{|\nabla\times b|, |c|\}u|^2\right)dx. \tag{25}$$

が結論される．$(A5)$ と (i) の不等式から

$$\int \mu^{-1}|\max\{|\nabla\times b|, |c|\}u|^2dx \le \epsilon_0^2 C_4\int r^2|f|^2dx,$$

が導かれるので (25) は求める不等式を与える． □

注意 3 関数 $(1+r)^{-1-\delta}$ や $(1+r)^{-1}[\log(e+r)]^{-1-\delta}$ $(0 < \delta \le 1)$ は (11), (16), (22) を全て満たす $\mu(r)$ の具体例である．

6. 対応する発展方程式の平滑化効果

ここでは magnetic Schödinger 作用素に対応する，次の 2 つの発展方程式を考える．

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0, \quad u(0) = f \in L^2, \tag{26}$$

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{L+m^2}u, \quad u(0) = f \in L^2 \tag{27}$$

ただし $m \ge 0$. (27) は相対論的 Schrödinger 方程式と呼ばれるが，Klein-Gordon 方程式 $(m > 0)$ や波動方程式 $(m = 0)$ の解はこの解を用いて表示される．

定理 4 の応用として，これらの方程式に対して次の定理を示すことができる．この定理は時空の重み付き L^2-評価であるが，解の平滑化効果とも呼ばれる．

定理 5 (i) $(A4)$ を仮定すれば $r^{-1}h(t) \in L^2(\mathbf{R}_\pm \times \Omega)$ を満たす $h(t)$ に対して

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\left\|r^{-1}\int_0^t e^{-i(t-\tau)L}h(\tau)d\tau\right\|^2 dt\right| \le C_1\left|\int_0^{\pm\infty}\|rh(t)\|^2 dt\right|.$$

また, $f \in L^2$ に対して

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|r^{-1}e^{-itL}f\|^2 dt\right| \le 2\sqrt{C_1}\|f\|^2.$$

(ii) $(A5)$ を仮定すれば $f \in L^2$ に対して

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}e^{-it\sqrt{L+m^2}}f\|^2 dt\right| \le 4\sqrt{\max\{C_1, C_2\}}\|f\|^2.$$

(iii) $b(x) \equiv 0$, $c(x) \equiv 0$ であれば, L は通常の Laplace 作用素

$$L_0 = -\Delta, \quad \mathcal{D}(L_0) = H^2$$

であり, このときは $f \in L^2$ に対して

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|\sqrt{\mu(r)}e^{-it\sqrt{L_0}}f\|^2 dt\right| \le 8\sqrt{5}\|\mu\|_{L^1}\|f\|^2.$$

同様の結果は数多くある (Yajima [16], Cuccagna-Schirmer [1], D'Ancona-Fanelli [2], Erdogan-Goldberg-Schlag [4], Georgiev-Stefanov-Tarulli [6] など). これらの結果は magnetic potential $b(x)$ については, それ自身に強い減衰条件が課せられている. この制限はここでは不要である.

定理 5 の証明には次の抽象的な結果を援用する.

命題 2 Λ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし, $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ に対して $\mathcal{R}(z) = (\Lambda - z)^{-1}$ とおく. A を H からもう 1 つの Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ への閉作用素とする. $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in \mathcal{D}(A^*)$ と $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ に対して

$$\sup_{z \notin \mathbf{R}}\|A\mathcal{R}(z)A^* f\|_{\mathcal{H}_1} < \sqrt{C}\|f\|_{\mathcal{H}_1} \tag{28}$$

であれば, 各 $h(t) \in L^2(\mathbf{R}_\pm; \mathcal{H}_1)$, $f \in \mathcal{H}$ に対して次の３つの不等式が成り立つ.

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\left\|\int_0^t Ae^{-i(t-\tau)\Lambda}A^*h(\tau)d\tau\right\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt\right| \le C\left|\int_0^{\pm\infty}\|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2 dt\right|, \tag{29}$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}_\pm}\left\|\int_0^t e^{i\tau\Lambda}A^*h(\tau)d\tau\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\sqrt{C}\left|\int_0^{\pm\infty}\|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2dt\right|, \tag{30}$$

$$\left|\int_o^{\pm\infty}\|Ae^{-it\Lambda}f\|_{\mathcal{H}_1}^2dt\right| \leq 2\sqrt{C}\|f\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{31}$$

[証明] (29) の証明のために $h(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R};\mathcal{D}(A^*))$ としてよい.

$$v(t)=\int_0^t e^{-i(t-\tau)\Lambda}A^*h(\tau)d\tau$$

とおき, その Laplace 変換を

$$\tilde{v}(z)=\pm\int_0^{\pm\infty}e^{izt}v(t)dt,\quad \pm\mathrm{Im}z>0.$$

で定義する. $\tilde{v}(z)=-i\mathcal{R}(z)A^*\tilde{h}(z)$ であるから, Plancherel の定理と resolvent 評価 (28) より, 任意の $g(t)\in C_0^\infty(\mathbf{R};\mathcal{D}(A^*))$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pm\infty}e^{\mp2\epsilon t}(Av(t),g(t))_{\mathcal{H}_1}dt\right| &= \left|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(A\tilde{v}(\lambda\pm i\epsilon),\tilde{g}(\lambda\pm i\epsilon))_{\mathcal{H}_1}d\lambda\right| \\ &\leq (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\|A\mathcal{R}(\lambda\pm i\epsilon)A^*\tilde{h}(\lambda\pm i\epsilon)\|_{\mathcal{H}_1}\|\tilde{g}(\lambda\pm i\epsilon)\|_{\mathcal{H}_1}d\lambda \\ &\leq \left|C\int_0^{\pm\infty}e^{\mp2\epsilon t}\|h(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2dt\int_0^{\pm\infty}e^{\mp2\epsilon t}\|g(t)\|_{\mathcal{H}_1}^2dt\right|^{1/2}\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\epsilon\to0$ とすれば (29) が得られる.

次に, Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{i\tau\Lambda}A^*h(\tau)d\tau\right\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \int_0^t\left(\int_0^s Ae^{-i(s-\tau)\Lambda}A^*h(\tau)d\tau,h(s)\right)_{\mathcal{H}_1}ds \\ &\quad+\int_0^t\left(h(\tau),\int_0^\tau Ae^{-i(\tau-s)L}A^*h(s)ds\right)_{\mathcal{H}_1}d\tau.\end{aligned}$$

これと (29) から (30) が導かれる.

(31) は (30) の双対命題である. □

[定理 5 (i) の証明] 上の命題で $\Lambda=L$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1=L^2$, $A=r^{-1}$ (掛け算作用素) とおく. $A^*=A$ で $\mathcal{R}(z)=R(z)$ であるから, $z=\kappa^2$ に対する定理 4 (i) により

$$\|AR(z)A^*f\|=\|r^{-1}R(z)A^*f\|\leq\sqrt{C_1}\|rA^*f\|=\sqrt{C_1}\|f\|.$$

故に, (29) と (31) が次のように書き下せる.

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|r^{-1}\int_0^t e^{-i(t-\tau)L}h(\tau)d\tau\|^2dt\right|\leq C_1\left|\int_0^{\pm\infty}\|rh(t)\|^2dt\right|,$$

$$\left|\int_0^{\pm\infty} \|r^{-1}e^{-itL}f\|^2 dt\right| \le 2\sqrt{C_1}\|f\|^2.$$

これらは求める結果である. □

定理 5 (ii) の証明のために Klein-Gordon 方程式

$$i\partial_t u = \Lambda u, \quad u(t) = \{w(t), \partial_t w(t)\}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i(L+m^2) & 0 \end{pmatrix}$$

を energy 空間 $\mathcal{H} = H_b^1 \times L^2$ で考える. ただし, $\mathcal{H}$ の norm は

$$\|\{f_1, f_2\}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\int \{|\nabla_b f_1|^2 + (c(x)+m^2)|f_1|^2 + |f_2|^2\} dx.$$

で定義している. 今の場合 $c(x)$ の原点での特異性が弱いから, Λ は

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \{f_1 \in H_b^1; \Delta_b f_1 \in L^2\} \times \{f_2 \in H_b^1 \cap L^2\}$$

を定義域とする $\mathcal{H}$ での自己共役作用素を定め, その resolvent は

$$\mathcal{R}(z) = (L+m^2-z^2)^{-1}\begin{pmatrix} z & i \\ -i(L+m^2) & z \end{pmatrix}$$

で与えられる. $A:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 = L^2$ を

$$Af = \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}\sqrt{L+m^2} f_1 \quad \text{for} \quad f = \{f_1, f_2\} \in \mathcal{H}$$

で定義すると, 共役作用素 A^* は

$$A^* g = \left\{\sqrt{L+m^2}^{-1}\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}g, 0\right\} \quad \text{for} \quad g \in L^2$$

で与えられる.

[定理 5 (ii) の証明] 定義により任意の $g \in \mathcal{D}(A^*)$ に対して

$$A\mathcal{R}(z)A^* g = \min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}z(L+m^2-z^2)^{-1}\min\{\sqrt{\mu(r)}, r^{-1}\}g. \tag{32}$$

そこで

$$\int\left|\min\{\sqrt{\mu}, r^{-1}\}z(L+m^2-z-2)^{-1}f\right|^2 dx \le m^2\int r^{-2}|(L+m^2-z^2)^{-1}f|^2 dx$$
$$+\int \mu|-m^2+z^2||L(L+m^2-z^2)^{-1}f|^2 dx$$

に注意すれば, 定理 4 (ii) を用いて

$$\|A\mathcal{R}(z)A^*g\| \le \sqrt{m^2C_1+C_2}\|g\|.$$

が得られる. この評価式と共に命題 2 に戻れば (31) は

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|Ae^{-it\Lambda}f\|^2dt\right| = \left|\int_0^{\pm\infty}\|\min\{\sqrt{\mu(r)},r^{-1}\}\sqrt{L+m^2}w(t)\|^2dy\right|$$
$$\le 2\sqrt{m^2C_1+C_2}\|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

のように表せる.

$$w(t)=\cos(t\sqrt{L+m^2})f_1+\sqrt{L+m^2}^{-1}\sin(t\sqrt{L+m^2})f_2$$

であるから, $g\in L^2$ に対して $f=\{(L+m^2)^{-1/2}g,0\}$ また $f=\{0,g\}$ とおけば

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|\min\{\sqrt{\mu(r)},r^{-1}\}\cos(t\sqrt{L+m^2})g\|^2dy\right| \le \sqrt{m^2C_1+C_2}\|g\|^2,$$

$$\left|\int_0^{\pm\infty}\|\min\{\sqrt{\mu(r)},r^{-1}\}\sin(t\sqrt{L+m^2})g\|^2dy\right| \le \sqrt{m^2C_1+C_2}\|g\|^2$$

が得られる. これらの不等式から (ii) が示される. □

[定理 5 (iii) の証明] このときは (25) からわかるように定理 4 (ii) の不等式が C_2, $\max\{\mu^{-1},r^2\}$ をそれぞれ $20\|\mu\|_{L^1}$, μ^{-1} に変えて成り立つ. これを基に上の証明をたどれば, 求める結果が得られる. □

References

[1] S, Cuccagna and P. P. Schirmer, *On the wave equation with magnetic potential*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 135-152.

[2] P. D'Ancona and L. Fanelli, *Strichartz and smoothing estimates for dispersive equations with magnetic potentials*, Comm. Partial Differential Eqs. **33** (2008), 1082-1112.

[3] D. M. Eidus, *The principle of limiting amplitude*, Uspekhi Math. Nauk, **24** (1969), 91-156.

[4] M. B. Erdogan, M. Goldberg and W. Schlag, *Stricharts and smoothing estimates for Schrödinger operators with large magnetic potentials in* $\mathbf{R}^3$, J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), 507-531.

[5] K. O. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 469-487, 685-713; **110** (1935), 777-779.

[6] V. Georgiev, A. Stefanov and M. Tarulli, *Smoothing-Strichartz estimates for the Schrödinger equation with small magnetic potential*, Disc. Cont. Dyn. Syst.-A **17** (2007), 771-786.

[7] T. Ikebe and J. Uchiyama, *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 425-448.

[8] W. Jäger and P Rejto, *On a theorem of Mochizuki and Uchiyama about oscillating long range potentials*, Operator Theory and its Applications (Winnipeg, MB, 1998), 305-329, Fields Inst Commun. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[9] H. Kalf, U.-W. Schmincke, J. Walter and R. Wiist, *On the spectral theory of Schrödinger and Dirac operators with strongly singular potentials*, Lecture Notes in Math. **44** (1975), 182-226.

[10] T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann. **162** (1966), 255-279.

[11] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Reviews in Math. Phys. **1** (1989), 481-496.

[12] K. Mochizuki, *Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain*, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring 1972.

[13] K. Mochizuki, *Jäger-Rejto approach on growth estimates of generalized eigenfunctions and principle of limiting absorption* (Japanese), スペクトル散乱理論とその周辺 (Kyoto 2000), 数理研講究録 No.1208 (2001), 38-51.

[14] K. Mochizuki, *Uniform resolvent estimates for magnetic Schrödinger operators and smoothing effects for related evolution equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (to appear).

[15] F. Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von* $\Delta u + \lambda u = 0$ *in unendrichen Gebieten*, Jahresber. Deitch. Math. Verein., **53** (1943),57-65.

[16] K. Yajima, *Schrödinger evolution equation with magnetic fields*, J. d'Analyse Math. **56** (1991), 29-76.