数理解析研究所講究録
第 1696 巻 2010 年 67-78

FUNDAMENTAL SOLUTION TO THE SCHRÖDINGER EQUATION ON A COMPACT SYMMETRIC SPACE

筧 知之

筑波大学 数理物質科学研究科 (EMAIL ADDRESS: KAKEHI@MATH.TSUKUBA.AC.JP)

1. Introduction

この原稿は、２００９年１２月に開催された数理解析研究所の研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」で筆者が行った講演に基づいている。そして、その目的は、コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解に関するある奇妙な性質を解説することである。

$M=U/K$ をコンパクト対称空間とし、Δ_M を M 上の U 不変な計量に関するラプラシアンとする。また、ユークリッド空間の場合と同様に、$\Delta_M\leq 0$ とする。M 上の自由粒子の運動を記述するシュレディンガー方程式、即ち、以下のような方程式を考える。

$$(1.1)\qquad (\mathrm{Sch})_M \begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t\psi+\Delta_M\psi=0, & t\in\mathbb{R}, \\ \psi(0,x)=\delta_o(x), & x\in M. \end{cases}$$

ここで $\delta_o(x)$ は、M の原点 $o=eK\in U/K=M$ に特異点を持つデルタ関数である。

$E_M(t,x)$ は、上記の方程式 $(\mathrm{Sch})_M$ の解、即ち、基本解とする。そして、M の極大トーラスを一つ固定し、それを A とする。

Theorem 1.1. M は偶数重複度条件を満たすと仮定する。(この条件については、後で説明する。) すると、M の幾何学的な構造から決まるある正の数 c が存在して、以下の (I), (II) が成り立つ。

(I) t/c が有理数の場合。

$\dfrac{t}{c}=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, おく。ここで、 $p,\ q\in\mathbb{Z},\ q>0$ とし、 p と q は互いに素であるとする。すると、極大トーラス A の有限部分集合 $\mathcal{G}_q$ で q のみに依存するものが存在し、M 上の *distribution* として $E_M(\frac{cp}{q},\cdot)$ の台は以下のように与えられる。

$$\mathrm{Supp}E_M\left(\frac{cp}{q},\cdot\right)=\{\ k\cdot a\in M\mid k\in K, a\in\mathcal{G}_q\ \}.$$

(II) t/c が無理数の場合。

$E_M(t,\cdot)$ の台は M 全体と一致する。より正確には次が成立する。

$$\mathrm{Supp}\,E_M(t,\cdot)=\mathrm{SingSupp}\,E_M(t,\cdot)=M.$$

ここで $\mathrm{SingSupp}E_M(t,\cdot)$ は $E_M(t,\cdot)$ の特異台 (singular support) を表す。

上記の定理は、「時刻 $t=0$ において原点 $x=o$ を出発した自由粒子は、有理数時間においてはある低次元集合上にのみ存在するが、無理数時間においては任意の点に存在し得る」ということを主張している。特に、M 上の自由粒子は、有理数、および、無理数を識別する。

本論の構成について述べる。一般の場合の厳密な証明に関しては Kakehi[K] を参照して頂くとして、ここでは、まず、Section 2 において $\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解、そして Section 3 において奇数次元球面 $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上のシュレディンガー方程式の基本解の構成について述べる。奇数次元球面の例を読めば証明のアイディアは判って頂けるのではないかと思う。Section 4 において、一般のコンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式と主定理の証明についての概略を述べる。

謝辞 この場におきまして、「スペクトル・散乱理論とその周辺」において講演する機会を与えて頂いた川下美潮氏および足立匡義氏に厚く御礼申し上げます。

2. $\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解

この Section では、$\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解の台を決定する。

$$\text{(2.1)} \qquad (\mathrm{Sch})_{S^1} \begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t\psi + \partial_\theta^2\psi = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,\theta) = \delta_{\mathbf{S}^1}(\theta), & \theta \in \mathbf{S}^1. \end{cases}$$

上記 $(\mathrm{Sch})_{S^1}$ の解、即ち、$\mathbf{S}^1$ 上の自由粒子の運動を記述するシュレディンガー方程式の基本解を $E_1(t,\theta)$ で表すことにする。また、$(\mathrm{Sch})_{S^1}$ において、$\delta_{\mathbf{S}^1}(\theta)$ は $\mathbf{S}^1$ 上のデルタ関数を表す。容易に判るように、

$$\text{(2.2)} \qquad E_1(t,\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sqrt{-1}n^2t+\sqrt{-1}n\theta}.$$

となる。以下において、(I) $t/2\pi \in \mathbb{Q}$ となる場合と (II) $t/2\pi \notin \mathbb{Q}$ となる場合に分けて考える。

<u>(I) $t/2\pi \in \mathbb{Q}$ となる場合。</u>

計算の都合上、基本解 $E_1(t,\cdot)$ を、$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の distribution と見なし、

$$\text{(2.3)} \qquad E_1(t,x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sqrt{-1}n^2t+\sqrt{-1}nx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

と表すことにする。$t/2\pi = p/q$ とおく。ここで、$p,\ q \in \mathbb{Z},\ q > 0$ とし、p と q は互いに素であるとする。(2.3) 右辺の $n \in \mathbb{Z}$ に関する和を、$n = qj + \ell,\ (j \in \mathbb{Z},\ 0 \le \ell \le q-1)$ とおいて、$j \in \mathbb{Z}$ に関する和と $0 \le \ell \le q-1$ に関する和に分解しよう。

$$n^2t = (qj+\ell)^2\frac{2\pi p}{q} \equiv \frac{2\pi p\ell^2}{q} \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi\mathbb{Z})$$

に注意すると (2.3) は、次のように書き換えられる。

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{aligned} E_1(\frac{2\pi p}{q},x) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=0}^{q-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-\sqrt{-1}\frac{2\pi p\ell^2}{q}+\sqrt{-1}(qj+\ell)x} \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=0}^{q-1} e^{-\sqrt{-1}\frac{2\pi p\ell^2}{q}+\sqrt{-1}\ell x}\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{\sqrt{-1}jqx}. \end{aligned}$$

ここで

$$\text{(2.5)} \qquad \varphi(x) = \sum_{\ell=0}^{q-1} e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi p\ell^2}{q}-\sqrt{-1}\ell x}$$

とおき、更にポアソンの和公式：

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{\sqrt{-1}jqx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(qx-2m\pi) = \frac{1}{q}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x-\frac{2m\pi}{q}) \tag{2.6}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} E_1(\frac{2\pi p}{q}, x) &= \overline{\varphi(x)}\,\frac{1}{q}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x-\frac{2m\pi}{q}) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=0}^{q-1} \overline{\varphi(\frac{2\pi k}{q})}\,\delta(x-2\pi j-\frac{2k\pi}{q}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

上記は、$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の distribution としての等式であるから、$\mathbf{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の distribution としての等式として考えると

$$E_1(\frac{2\pi p}{q}, \theta) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \overline{\varphi(\frac{2\pi k}{q})}\,\delta_{\mathbf{S}^1}(\theta-\frac{2k\pi}{q}) \qquad \theta\in\mathbf{S}^1 \tag{2.8}$$

を得る。更に

$$G(p,q;k) := \varphi(\frac{2\pi k}{q}) = \sum_{\ell=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}(p\ell^2-k\ell)}, \tag{2.9}$$

とおく。(2.8) および (2.9) を合わせると

$$E_1(\frac{2\pi p}{q}, \theta) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \overline{G(p,q;k)}\,\delta_{\mathbf{S}^1}(\theta-\frac{2k\pi}{q}) \tag{2.10}$$

という表示式を得る。(2.9) における和 $G(p,q;k)$ は、円分体の理論において現れ、ガウス和と呼ばれている。(例えば、Lang [L] 第 5 章を参照。) ガウス和 $G(p,q;k)$ に関しては、次のことが成り立つ。

Proposition 2.1.

(i) $q\equiv 0 \pmod 4$ の場合。 $G(p,q;k)\neq 0 \iff k=0,2,4,\cdots,q-2.$
(ii) $q\equiv 2 \pmod 4$ の場合。 $G(p,q;k)\neq 0 \iff k=1,3,5,\cdots,q-1.$
(iii) $q\equiv 1,3 \pmod 4$ の場合。 $G(p,q;k)\neq 0 \iff k=0,1,2,3,\cdots,q-1.$

この命題の証明は省くが、この結果はガウス和に関する相互律 (reciprocity formula) と簡単な数論的考察を組み合わせることで得られる。また、相互律を用いない証明は Turaev [Tur] を参照せよ。

上記の命題に基づき、$\mathbf{S}^1$ の有限部分集合 $\mathcal{G}_q$ を次で定める。

$$\mathcal{G}_q := \left\{ \left[\frac{2\pi k}{q}\right]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\cong\mathbf{S}^1 \mid G(p,q;k)\neq 0 \right\}. \tag{2.11}$$

上記において、$[x]_{2\pi\mathbb{Z}}$ は、実数 x の $2\pi\mathbb{Z}$ に関する同値類を表す。命題 2.1 の直接的な帰結として $\mathcal{G}_q$ は、以下のようになる。

(2.12)
$$\mathcal{G}_q = \begin{cases} \left\{ \left[\frac{2\pi k}{q}\right]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}^1 \mid 0 \le k \le q-1,\ k \in 2\mathbb{Z} \right\}, & (q \equiv 0 \mod 4) \\ \left\{ \left[\frac{2\pi k}{q}\right]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}^1 \mid 0 \le k \le q-1,\ k \in 2\mathbb{Z}+1 \right\}, & (q \equiv 2 \mod 4) \\ \left\{ \left[\frac{2\pi k}{q}\right]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbf{S}^1 \mid 0 \le k \le q-1,\ k \in \mathbb{Z} \right\}, & (q \equiv 1, 3 \mod 4). \end{cases}$$

従って、(2.10) より次の命題を得る。

Proposition 2.2.

(2.13)
$$\operatorname{Supp} E_1(\frac{2\pi p}{q}, \cdot) = \mathcal{G}_q,$$

ここで $\mathcal{G}_q$ は (2.12) により与えられる $\mathbf{S}^1$ の有限部分集合である。

これで、$t/2\pi \in \mathbb{Q}$ となる場合の基本解 $E_1(\frac{2\pi p}{q}, \cdot)$ の台は決定出来た。

(II) $t/2\pi \notin \mathbb{Q}$ となる場合。

ここでも、基本解 $E_1(t, \cdot)$ を、$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の distribution と見なし、(2.3) から出発する。まず、$E_1(t, \cdot)$ は、$\mathbf{S}^1$ 上の distribution として、必ず特異点をどこかに持つ。これを示すために、$E_1(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbf{S}^1)$ と仮定して矛盾を導く。$L^2(\mathbf{S}^1)$ 上のユニタリー作用素 $e^{\sqrt{-1}t\partial_\theta^2}$ は $E_1(t, \cdot)$ を用いて、

(2.14)
$$\left(e^{\sqrt{-1}t\partial_\theta^2} f\right)(x) = \int_0^{2\pi} E_1(t, x-y)\, f(y) dy, \qquad f \in L^2(\mathbf{S}^1).$$

と表される。もし、$E_1(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbf{S}^1)$ ならば $e^{\sqrt{-1}t\partial_\theta^2} : L^2(\mathbf{S}^1) \to C^\infty(\mathbf{S}^1)$ となってしまい、矛盾である。故に、$E_1(t, \cdot)$ は特異点をどこかに持つ。そこで、その特異点を x_0 としよう。

鍵となるのは、次の関係式である。

(2.15)
$$E_1(t, x+2t) \ = \ e^{\sqrt{-1}(t+x)} E(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

関係式 (2.15) により、$E_1(t, \cdot)$ は $\theta = [x_0 + 2mt]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbf{S}^1$, $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ において特異点を持つことが判る。従って、

(2.16)
$$\operatorname{SingSupp} E_1(t, \cdot) \supset \{\ [x_0 + 2mt]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbf{S}^1 \mid m \in \mathbb{Z}\ \}.$$

一方、$t/2\pi \notin \mathbb{Q}$ であるので、集合 $\{\ [x_0 + 2mt]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbf{S}^1 \mid m \in \mathbb{Z}\ \}$ は、$\mathbf{S}^1$ の稠密な部分集合である。また、$\operatorname{SingSupp} E_1(t, \cdot)$ は閉集合であるから、(2.16) において、両辺の閉包をとることで

(2.17)
$$\operatorname{SingSupp} E_1(t, \cdot) \ = \ \overline{\{\ [x_0 + 2mt]_{2\pi\mathbb{Z}} \in \mathbf{S}^1 \mid m \in \mathbb{Z}\ \}} = \mathbf{S}^1$$

が成り立つ。以上まとめて、次の結果を得る。

Proposition 2.3.

(2.18)
$$\operatorname{Supp} E_1(t, \cdot) \ = \ \operatorname{SingSupp} E_1(t, \cdot) \ = \ \mathbf{S}^1.$$

Proposition 2.2 および Proposition 2.3 を合わせて、次の定理を得る。

Theorem 2.4.

(I) $t/2\pi$ が有理数の場合。

$$\operatorname{Supp} E_1\left(\frac{2\pi p}{q},\cdot\right) = \mathcal{G}_q, \tag{2.19}$$

ここで $\mathcal{G}_q$ は (2.12) により与えられる $\mathbf{S}^1$ の有限部分集合である。

(II) $t/2\pi$ が無理数の場合。

$$\operatorname{Supp} E_1(t,\cdot) \ = \ \operatorname{SingSupp} E_1(t,\cdot) \ = \ \mathbf{S}^1. \tag{2.20}$$

3. 奇数次元球面上のシュレディンガー方程式の基本解

ここでは、奇数次元球面上のシュレディンガー方程式の基本解について述べる。しかし、最初は（奇数次元であることを仮定せずに）一般の球面上のシュレディンガー方程式から始めることにする。n 次元球面 $\mathbf{S}^n$ を $\mathbf{S}^n := \{\, x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \,\}$ と定める。$\mathbf{S}^n$ 上の自由粒子の運動を記述するシュレディンガー方程式は以下のようになる。

$$(\mathrm{Sch})_{\mathbf{S}^n} \begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t\psi + \Delta_{\mathbf{S}^n}\psi = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,x) = \delta_o(x), & x \in \mathbf{S}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで $\delta_o(x)$ は、$\mathbf{S}^n$ の原点 $o = \mathbf{e}_1$ に特異点を持つデルタ関数である。また、$\Delta_{\mathbf{S}^n}$ は、$\mathbf{S}^n$ 上のラプラシアンで、ここでは $\Delta_{\mathbf{S}^n} \le 0$ と考える。$(\mathrm{Sch})_{\mathbf{S}^n}$ の解を $E_n(t,x)$ とする。

$o = \mathbf{e}_1$ を通る大円として

$$A := \{\, (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2 \mid 0 \le \theta \le 2\pi \,\} \tag{3.2}$$

をとる。$\mathbf{S}^n$ には、Lie 群 $SO(n+1)$ が作用するが、$\mathbf{e}_1$ の固定部分群 $SO(n)$ の作用に関して $(\mathrm{Sch})_{\mathbf{S}^n}$ は不変である。従って、$(\mathrm{Sch})_{\mathbf{S}^n}$ の解 $E_n(t,x)$ も $SO(n)$ の作用に関して不変である。よって、$E_n(t,x)$ は $\mathbb{R} \times A$ 上の関数（正確には distribution）と見なすことが出来る。更に $\mathbf{S}^1 \ni (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto (\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta)\mathbf{e}_2 \in A$ によって $A \cong \mathbf{S}^1$ と見なす。この同一視により、E_n を $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^1$ 上の関数と考え、

$$\widetilde{E_n}(t,\theta) = E_n(t,x), \qquad \theta = \operatorname{dist}(\mathbf{e}_1, x) \tag{3.3}$$

とおく。(記号の乱用であるが、$\mathbf{S}^1$ 上の変数として θ をとる。また、$\operatorname{dist}(\mathbf{e}_1,x)$ は $\mathbf{e}_1$ と x との測地距離を表す。）すると、$\widetilde{E_n}$ は次の微分方程式を満たす。

$$\sqrt{-1}\partial_t \widetilde{E_n} + L_n \widetilde{E_n} = 0. \tag{3.4}$$

上記において L_n は $\Delta_{\mathbf{S}^n}$ の radial part で、次で与えられる θ の２階の微分作用素である。

$$L_n = \partial_\theta^2 + (n-1)\cot\theta\,\partial_\theta. \tag{3.5}$$

そこで、

$$D := \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\theta \tag{3.6}$$

とおくと、簡単な計算ですぐ判るように次の等式が成立する。

$$L_n D - D L_{n-2} = (n-2)D. \tag{3.7}$$

以下において $n=2m+1$ とおき、関係式 (3.7) を用いて、奇数次元球面 $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上のシュレディンガー方程式の基本解を構成しよう。２つの段階に分けて構成する。

Step I　(3.4) を満たす $\widetilde{E_{2m+1}}$ の構成

関係式 (3.7) を繰り返し用いることで、次を得る。

$$L_{2m+1}D^m = D^m(L_1+m^2). \tag{3.8}$$

E_1 は $\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解で、

$$(\sqrt{-1}\partial_t+\partial_\theta^2)E_1 = (\sqrt{-1}\partial_t+L_1)E_1 = 0 \tag{3.9}$$

を満たすことに注意しよう。そこで、

$$\widetilde{E_{2m+1}}\,(t,\theta) := (-2\pi)^{-m}e^{\sqrt{-1}m^2t}D^mE_1(t,\theta) \tag{3.10}$$

と定めると、(3.8) により

$$L_{2m+1}\,\widetilde{E_{2m+1}} = (-2\pi)^{-m}e^{\sqrt{-1}m^2t}L_{2m+1}D^mE_1 = (-2\pi)^{-m}e^{\sqrt{-1}m^2t}D^m(L_1+m^2)E_1. \tag{3.11}$$

よって、(3.10) で定めた $\widetilde{E_{2m+1}}$ は方程式

$$(\sqrt{-1}\partial_t+L_{2m+1})\,\widetilde{E_{2m+1}} = 0 \tag{3.12}$$

を満たす。従って、

$$E_{2m+1}(t,x) = \widetilde{E_{2m+1}}\,(t,\theta), \qquad \theta = \mathrm{dist}(\mathbf{e}_1,x) \tag{3.13}$$

とすると、$E_{2m+1}(t,x)$ は、奇数次元球面 $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上のシュレディンガー方程式を満たす、即ち、

$$(\sqrt{-1}\partial_t+\Delta_{\mathbf{S}^{2m+1}})\,E_{2m+1} = 0. \tag{3.14}$$

実は、この $E_{2m+1}(t,x)$ が求めるべき基本解となっている。しかし、それを示すためには、$E_{2m+1}(t,x)$ が初期条件：$E_{2m+1}(0,x)=\delta_o(x)$ を満たすことを示さねばならない。

Step II　(3.13) で与えられる E_{2m+1} が初期条件を満たすこと

$E_{2m+1}(t,x)$ を $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上の distribution として以下のように表すことにする。

$$E_{2m+1}(t)[f] := \int_{\mathbf{S}^{2m+1}} E_{2m+1}(t,x)\,f(x)\,dv(x), \qquad f\in C^\infty(\mathbf{S}^{2m+1}). \tag{3.15}$$

($dv(x)$ は $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上の標準的な測度である。) すると、上記で構成した基本解 $E_{2m+1}(t,x)$ は、厳密には次のように表される。

(3.16)

$$E_{2m+1}(t)[f] = (-2\pi)^{-m}c_m\,e^{\sqrt{-1}m^2t}\int_0^\pi D^mE_1(t,\theta)\,(\mathcal{M}f)(\theta)\,\sin^{2m}\theta\,d\theta, \quad f\in C^\infty(\mathbf{S}^{2m+1}).$$

$\mathcal{M}f$ は以下のように定める。

$$(\mathcal{M}f)(\theta) := \int_{k\in SO(2m+1)} f(k\cdot x(\theta))\,dk, \qquad f\in C^\infty(\mathbf{S}^{2m+1}). \tag{3.17}$$

ここで、$x(\theta)=(\cos\theta)\mathbf{e}_1+(\sin\theta)\mathbf{e}_2$ で、dk は、$SO(2m+1)$ 上の正規化された不変測度である。ちなみに $SO(2m+1)$ は、$SO(2m+2)$ の部分群で $\mathbf{e}_1$ の固定部分群と見なしている。

そして、定数 c_m は

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{S}^{2m+1}) = c_m\int_0^\pi \sin^{2m}\theta\,d\theta \tag{3.18}$$

となるようにとる。

以下において、$E_{2m+1}(0)[f]$ を計算しよう。

(3.19)

$$
\begin{aligned}
E_{2m+1}(0)[f] &= (-2\pi)^{-m} c_m \int_0^\pi D^m E_1(0,\theta)\,(\mathcal{M}f)(\theta)\,\sin^{2m}\theta\,d\theta \\
&= (-2\pi)^{-m} c_m \int_0^\pi \left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\right)^m E_1(0,\theta)\,(\mathcal{M}f)(\theta)\,\sin^{2m}\theta\,d\theta \\
&= (-2\pi)^{-m} c_m \int_0^\pi E_1(0,\theta)\left(-\partial_\theta\circ\frac{1}{\sin\theta}\right)^m \{\,(\mathcal{M}f)(\theta)\,\sin^{2m}\theta\,\}\,d\theta \\
&= (-2\pi)^{-m} c_m \int_0^\pi E_1(0,\theta)\,\{\,(-1)^m(2m-1)!!\cos^m\theta\,(\mathcal{M}f)(\theta) + O(\sin\theta)\,\}\,d\theta \\
&= (2\pi)^{-m}(2m-1)!!\,c_m\cdot\frac{1}{2}(\mathcal{M}f)(0) \\
&= (\mathcal{M}f)(0).
\end{aligned}
$$

上記の計算において、$\mathbf{S}^1$ 上の distribution として $E_1(0,\theta)=\delta_{\mathbf{S}^1}(\theta)$ となること、および、$c_m = \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!}$ となることを用いた。そして、すぐ判るように

$$
(3.20)\qquad
\begin{aligned}
(\mathcal{M}f)(0) &= \int_{k\in SO(2m+1)} f(k\cdot x(0))\,dk \\
&= \int_{k\in SO(2m+1)} f(\mathbf{e}_1)\,dk \;=\; f(\mathbf{e}_1).
\end{aligned}
$$

上記の計算において、$x(0)=\mathbf{e}_1$ であり、$k\cdot\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1$, $(k\in SO(2m+1))$ となることに注意しておく。

以上 (3.19) および (3.20) より $E_{2m+1}(0)[f] = f(\mathbf{e}_1)$ 即ち $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上の distribution として $E_{2m+1}(0)=\delta_{\mathbf{e}_1}=\delta_o$ を得る。

最後に、何故 (3.16) という表示式になるのかを念のため説明しておく。$\mathbf{S}^{2m+1}$ 上の積分を、θ 方向と、$\mathbf{e}_1$ を固定するような回転の方向に分解する。「$\mathbf{e}_1$ を固定するような回転の方向」というのは、各 $x(\theta)\in A$ に対して、$\mathbf{e}_1$ を固定する $k\in SO(2m+1)$ を動かして、$k\cdot x(\theta)$ という点全体の作る部分多様体の方向という意味である。(3.15) において、$E_{2m+1}(t,x)$ が θ のみの distribution であり、$E_{2m+1}(t,x)=\widetilde{E_{2m+1}}(t,\theta)$ であることに注意すると、

$$
(3.21)\qquad
\begin{aligned}
\text{R.H.S. of (3.15)} &= \int_0^\pi \int_{k\in SO(2m+1)} \widetilde{E_{2m+1}}(t,\theta)\,f(k\cdot x(\theta))\,c_m\sin^{2m}\theta\,dk\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \widetilde{E_{2m+1}}(t,\theta)\,(\mathcal{M}f)(\theta)\,c_m\sin^{2m}\theta\,d\theta.
\end{aligned}
$$

これより、(3.16) を得る。

以上の議論をまとめると、次の定理を得る。

Theorem 3.1.

奇数次元球面 $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上のシュレディンガー方程式 $(\mathrm{Sch})_{\mathbf{S}^{2m+1}}$ の基本解 $E_{2m+1}(t,x)$ は、次で与えられる。

$$
(3.22)\qquad E_{2m+1}(t,x) = (-2\pi)^{-m} e^{\sqrt{-1}m^2 t} D^m E_1(t,\theta).
$$

ここで、D は (3.6) で与えられる微分作用素、E_1 は $\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解であり (2.2) で与えられる。

上記の定理と Theorem2.4 を組み合わせると、次の定理を得る。

Theorem 3.2. (I) $t/2\pi$ が有理数の場合。

$$\mathrm{Supp}\, E_{2m+1}\left(\frac{2\pi p}{q},\cdot\right) = \{\, k\cdot x(\theta)\in \mathbf{S}^{2m+1} \mid \theta\in \mathcal{G}_q,\ k\in SO(2m+1)\,\}. \tag{3.23}$$

ここで $\mathcal{G}_q$ は (2.12) により与えられる $\mathbf{S}^1$ の有限部分集合である。また、上記において $SO(2m+1)$ は、$SO(2m+2)$ の部分群で $\mathbf{e}_1$ の固定部分群と見なしている。

(II) $t/2\pi$ が無理数の場合。

$$\mathrm{Supp}\, E_{2m+1}(t,\cdot) \ = \ \mathrm{SingSupp}\, E_{2m+1}(t,\cdot) \ = \ \mathbf{S}^{2m+1}. \tag{3.24}$$

Remark 3.3. 球面上のシュレディンガー方程式に関する結果 Theorem 3.2 のみを示すだけならば、それほど難しいことではない。高階の対称空間とは異なり、階数 1 である球面 $\mathbf{S}^n$ 上の調和解析はよく分かっているからである。そして、階数 1 であることの特殊性により、証明は容易となる。例えば、基本解 $E_{2m+1}(t,x)$ は Gegenbauer の多項式を用いて具体的に表すことが出来、そして、Gegenbauer の多項式の性質を用いることで証明できる。しかし、そのようなやり方では一般の対称空間の場合にはうまくいかない。もう少し詳しく述べると、一般の対称空間に対しては、Gegenbauer の多項式に相当するものが多変数となり、考察がかなり難しくなるからである。

4. 一般のコンパクト対称空間の場合

この Section では、一般のコンパクト対称空間の場合に、主定理の証明のあらすじについて述べる。奇数次元球面 $\mathbf{S}^{2m+1}$ 上のシュレディンガー方程式を $\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式に帰着させて Theorem 3.2 を証明した。それと同様なことを行う。

U はコンパクト半単純 Lie 群、K を U の閉部分群とする。そして、$M=U/K$ は対称空間とする。(対称空間の定義、および、以下に述べる用語や設定などの詳細に関しては、例えば、Takeuchi[Tak], Helgason[H-1] を参照せよ。) U、K の Lie 環を、それぞれ $\mathfrak{u}$、$\mathfrak{k}$ とする。$\mathfrak{u}$ 上の $\mathrm{Ad}-U$ 不変な内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す。この内積に関する直交分解を $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ とおく。この分解を Cartan 分解という。(厳密には、対称空間に対しては Cartan involution というものがあり、それを用いて Cartan 分解が定義される。Takeuchi[Tak] 等を参照の事。) $\mathfrak{m}$ は M の原点 $o=eK\in U/K$ における接空間 T_oM と同一視される。

$\mathfrak{m}$ の極大可換部分代数を一つ固定し $\mathfrak{a}$ とおく。上記で導入した $\mathfrak{u}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $\mathfrak{a}$ に制限した内積も同じ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す。

$\alpha\in\mathfrak{a}$ に対して、

$$\mathfrak{u}_\alpha := \{\, X\in \mathfrak{u}^{\mathbf{C}} \mid [H,X]=\sqrt{-1}\langle\alpha,H\rangle X,\ \text{for}\ \forall\, H\in\mathfrak{a}\,\} \tag{4.1}$$

とおく。ここで、$\mathfrak{u}^{\mathbf{C}}$ は、$\mathfrak{u}$ の複素化を表す。

Definition 4.1. $\alpha\in\mathfrak{a}$ が $(\mathfrak{u},\mathfrak{a})$ の根 (root) であるとは、$\mathfrak{u}_\alpha\neq\{0\}$ となるときである、と定める。また、$m_\alpha=\dim_{\mathbf{C}}\mathfrak{u}_\alpha$ とおき、α の重複度 (multiplicity) という。

次に、Introduction で述べた偶数重複度条件の定義を与える。

Definition 4.2. 対称空間 M が偶数重複度条件を満たすとは、任意の $(\mathfrak{u}, \mathfrak{a})$ の root α に対して m_α が偶数になることである。

偶数重複度条件を仮定する理由は、後で説明する。

$\mathfrak{a}$ に対応する M の極大トーラスを A で表す。極大トーラスの次元、あるいは、極大可換部分代数の次元を M の階数 (rank) という。例えば、$M = \mathbf{S}^n$ の場合、(3.2) で与えた A が極大トーラス（この場合は 1 次元のトーラス、即ち、円）となっている。従って、$\mathbf{S}^n$ は階数 1 の対称空間である。

$\Gamma = \{ H \in \mathfrak{a} \mid \exp(H) \in K \}$ とおくと、Γ は $\mathfrak{a}$ の lattice となり、しかも、$\mathfrak{a}/\Gamma \cong A$ となる。これにより $\mathfrak{a}/\Gamma$ を A と同一視する。

M 上のシュレディンガー方程式の基本解 $E_M(t,x)$、即ち、$(\mathrm{Sch})_M$ の解、は K の作用に関して不変である。従って、$E_M(t,x)$ は A 上の distribution と見なすことが出来る。$E_M(t,x)$ の A 上への制限を $\widetilde{E_M}(t,a)$, $(a \in A)$ と書くことにする。すると $\widetilde{E_M}$ は、次の微分方程式を満たす。

$$\{ \sqrt{-1}\partial_t + \mathrm{rad}(\Delta_M) \} \, \widetilde{E_M}(t,a) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \ \ a \in A. \tag{4.2}$$

(4.2) において、$\mathrm{rad}(\Delta_M)$ は、Δ_M の radial part と呼ばれる A 上の微分作用素で、Definition 4.1 で導入した m_α を用いて具体的に次のように表される。

$$\mathrm{rad}(\Delta_M) = \Delta_{\mathfrak{a}} + \sum_{\alpha:\text{ positiveroot}} m_\alpha \cot\langle \alpha, H\rangle \, \partial_\alpha. \tag{4.3}$$

(4.3) において、$\Delta_{\mathfrak{a}}$ は、$\mathfrak{a}$ 上の通常のラプラシアンを表す。そして、∂_α は α 方向の微分、即ち、$\langle \alpha, \nabla \rangle$ を表す。勿論、∂_α は $\mathfrak{a}$ 上のベクトル場である。厳密には、$\mathrm{rad}(\Delta_M)$ は $\mathfrak{a}$ 上の微分作用素であるが、Γ-periodic な $\mathfrak{a}$ 上の微分作用素となることが判り、よって、同一視 $\mathfrak{a}/\Gamma \cong A$ により、$\mathrm{rad}(\Delta_M)$ は A 上の微分作用素として well-defined となる。

実は、偶数重複度条件を仮定すると、次のような微分作用素 D_M と定数 c_M が存在する。

$$\mathrm{rad}(\Delta_M) D_M \ = \ D_M(\Delta_{\mathfrak{a}} + c_M). \tag{4.4}$$

定数 c_M は $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\,:\,\text{positive root}} m_\alpha \, \alpha$ とおいたとき、$c_M = \langle \rho, \rho \rangle$ で与えられる。そして、D_M は Heckman-Opdam の shift operator と呼ばれる。（shift operator の構成の仕方や詳しい性質については、以下の文献を参照。Heckman-Schlichtkrull[Heck-Sch], Heckman [Heck], Opdam [Opd-1], [Opd-2], [Opd-3], [Opd-4]。）

Example 4.3. $M = \mathbf{S}^{2m+1}$ の場合、$D_M = \left(\dfrac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \right)^m$、$c_M = m^2$ である。((3.8) を参照。）そして、この場合、

$$\mathrm{rad}(\Delta_{\mathbf{S}^{2m+1}}) = L_{2m+1} = \partial_\theta^2 + 2m\cot\theta\,\partial_\theta \tag{4.5}$$

となっており、特に, $m_\alpha = 2m$ となっていることに注意せよ。m_α が偶数となっているため、関係式 3.7 を繰り返し用いて (3.8) を得ることが出来るのである。

なぜ偶数重複度条件が重要かというと、(4.4) を満たす微分作用素 D_M により、変数係数の微分作用素 $\mathrm{rad}(\Delta_M)$ を定数係数の微分作用素 $\Delta_{\mathfrak{a}} + c_M$ に変形してくれるからである。(Example 4.3 および関係式 (3.8) を参照。）そして、これにより M 上のシュレディンガー方程式を解くことが、ユークリッド空間 $\mathfrak{a}$ 上のシュレディンガー方程式を解くことに帰着されるのである。

このような微分作用素 D_M を用いると、

$$\widetilde{E_M}(t,a) \ = \ \mathrm{const.}e^{\sqrt{-1}c_M t} D_M E_A(t,a) \tag{4.6}$$

と表すことが出来る。ここで、$E_A(t,a)$ は、$\mathfrak{a}/\Gamma \cong A$ 上のシュレディンガー方程式

$$(4.7) \qquad (\mathrm{Sch})_A \begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t\psi + \Delta_A\psi = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,a) = \delta(a), & a \in A. \end{cases}$$

の解である。念のために注意しておくと、上記の解は、$\mathfrak{a}$ 上のシュレディンガー方程式

$$(4.8) \qquad (\mathrm{Sch})_{\mathfrak{a}} \begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t\psi + \Delta_{\mathfrak{a}}\psi = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,H) = \delta(H), & H \in \mathfrak{a}. \end{cases}$$

を Γ-periodic という条件で解いたものと同じである。

(4.7) の解 $E_A(t,a)$ について、$\mathbf{S}^1$ 上のシュレディンガー方程式の基本解 $E_1(t,\theta)$ と同様な事が成り立つ。(Theorem 2.4 参照。) 即ち、次が成立する。

Theorem 4.4. *lattice* Γ の幾何的な構造から決まるある正の数 c が存在して、以下の (I), (II) が成り立つ。

(I) t/c が有理数の場合。
$\dfrac{t}{c} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ とおく。ここで、$p,\ q \in \mathbb{Z},\ q > 0$ とし、p と q は互いに素であるとする。すると、極大トーラス A の有限部分集合 $\mathcal{G}_q$ で q のみに依存するものが存在し、A 上の *distribution* として $E_A(\frac{cp}{q}, \cdot)$ の台は以下のように与えられる。

$$\mathrm{Supp} E_A\left(\frac{cp}{q}, \cdot\right) = \mathcal{G}_q.$$

(II) t/c が無理数の場合。
$E_A(t, \cdot)$ の台は A 全体と一致する。より正確には次が成立する。

$$\mathrm{Supp}\, E_A(t,\cdot) = \mathrm{SingSupp}\, E_A(t, \cdot) = A.$$

Theorem 4.4 と (4.6) から Introduction で述べた主定理である Theorem 1.1 を得る。

5. Some remarks

5.1. 関連する結果 I　修正された波動方程式とホイヘンスの原理.

比較のために対称空間上の波動方程式について述べる。偶数重複度条件を満たす奇数次元の対称空間上の修正された波動方程式に対してはホイヘンスの原理が成立する。これに関しては主に１９９０年代に様々な人たちによって研究された。主な文献は以下の通りである。Branson-Olafsson-Pasquale [BOP], Branson-Olafsson-Schlichtkrull [BOS], Chalykh-Veselov [Cha-Ves], Gonzalez [Gonz], Helgason [H-3], [H-4], Helgason-Schlichtkrull [H-Sch], Olafsson-Schlichtkrull [Olaf-Sch], Solomatina [Sol].

全ての結果に言及することは無理なので、例えば Helgason [H-3] の結果を述べる。$M = G/K$ を奇数次元ノンコンパクトリーマン対称空間とし、更に、偶数重複度条件を満たすとする。このとき、M 上の修正された波動方程式

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 \mathrm{u} - (\,\Delta_M + \langle\rho,\rho\rangle\,)\,u \;=\; 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0, \quad (\partial_t u)(0,x) = \delta_o(x), & x \in M. \end{cases}$$

に対する解（基本解）を $U(t,x)$ とすると、次が成り立つ。

Theorem 5.1.

$$\operatorname{Supp} U(t,\cdot) = \{\, x \in M \mid \operatorname{dist}(x,o) = |t| \,\}. \tag{5.2}$$

即ち、基本解 $U(t,x)$ の時刻 t における台 *(Support)* は、半径 $|t|$ の測地球と一致する。

言い換えると、上記定理は、基本解 $U(t,x)$ の台が (t,x) 空間の光円錐と一致すること（ホイヘンスの原理）を主張している。

修正された波動方程式の基本解の台が各時刻 t に対して M の低次元集合となる、という点では、シュレディンガー方程式の基本解の振る舞いに似ているが、シュレディンガー方程式の場合は、有理数時間においてのみ基本解の台が M の低次元集合となる、という点で、ホイヘンスの原理とは全く異なる現象であると言える。

5.2. 関連する結果 II　ポテンシャルを持つシュレディンガー方程式.

シュレディンガー方程式のスペクトルに関する論文は多いが、各時刻における基本解の滑らかさを論じた論文はそれほど多くないように思われる。ここでは、ポテンシャルを持つ $\mathbb{R}^n$ 上のシュレディンガー方程式を考える。$H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ とおく。そして、以下のようなコーシー問題の解（基本解）を $E(t,x,y)$ とする。

$$\begin{cases} \sqrt{-1}\partial_t \psi - H\psi = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,x) = \delta(x-y), & x,\, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.3}$$

すると、$E(t,x,y)$ の滑らかさに関して、谷島賢二氏による次の結果が成り立つ。

Theorem 5.2. (Yajima [Y])

(I) $V(x) = o(|x|^2)$, $|x| \to \infty$ を仮定する。（更に $V(x)$ の微分についても適当な減衰条件を仮定するが詳細については、Yajima [Y] を参照。）すると、任意の $|t| \neq 0$ に対して、$E(t,x,y)$ は (x,y) の関数として滑らかで有界である。

(II) $V(x) \geq C\langle x\rangle^{2+\varepsilon}$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$ 及び $n = 1$ を仮定する。すると、$E(t,x,y)$ は、どんな点 (t,x,y) の近傍においても C^1 級とはならない。

上記の結果は、調和振動子の場合 $(H = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2)$ を境にして、状況が大きく異なることを示している。一般に、ポテンシャル $V(x)$ の増大度が $|x|^2$ よりも大きい時 (superquadratic case) は、粒子の束縛条件が強くなる。逆に $V(x)$ の増大度が $|x|^2$ よりも小さい時 (subquadratic case) は、粒子の束縛条件が弱くなる。そして、ちょうど調和振動子の場合に古典軌道が周期的になる。これが基本解の滑らかさに反映される。superquadratic なポテンシャルを持つ $\mathbb{R}^n$ 上のシュレディンガー方程式以外で、粒子の束縛条件が強い場合としては、コンパクト多様体上のシュレディンガー方程式が考えられる。この場合、明らかに、全ての古典軌道は強く捕捉 (trap) されている。つまり、任意の 2 点 x, y に対して、y を出発する粒子のエネルギーが高ければ高いほど、粒子はより短時間で x に到達することが可能となる。この意味で、状況は superquadratic case に近い。従って、基本解が滑らかになることは期待できない。にも拘らず、コンパクト多様体が良い条件を満たすコンパクト対称空間の場合には、基本解はある程度滑らかとなる。詳しく言えば、有理数時間においては、低次元部分集合を除いて零となっている。

5.3. その他の注意.

Section 2 において導入したガウス和であるが、これを一般化したものが対称空間上の極大トーラスに対しても定義される。（詳細については、Kakehi [K] を参照。）Theorem 1.1 (I) で述べた有限集合 $\mathcal{G}_q$ は、この一般化されたガウス和を用いて記述される。そして、M

上のシュレディンガー方程式の基本解 $E_M(t,x)$ は、有理数時間において、一般化されたガウス和を用いて表示することが出来る。また、無理数時間においては、

$$\mathrm{Supp}\, E_M(t,\cdot) = \mathrm{SingSupp}\, E_M(t,\cdot) = M. \tag{5.4}$$

が成り立つと述べたが、より強く、「M の任意の点の近傍において、$E_M(t,\cdot)$ は連続でも有界でもない」ということが言える。

References

[BOP] Branson, T., Olafsson, G. and Pasquale A.: *The Payley-Wiemer theorem and the local Huygens' principle for compact symmetric spaces: the even multiplicity case.* Indag. Math. (N.S.) **16**, 393-428 (2005)

[BOS] Branson, T., Olafsson, G. and Schlichtkrull, H.: *Huygens' principle in Riemannian symmetric spaces.* Math. Ann. **301**, 445-462 (1995)

[Cha-Ves] Chalykh, O. A. and Veselov, A. P.: *Integrability and Huygens' Principle on Symmetric Spaces.* Comm. Math. Phys. **178**, 311-338 (1996)

[Gonz] Gonzalez, F. B.: *A Paley Wiener theorem for central functions on compact Lie groups.* Contemp. Math. **278**, 131-136 (2001)

[Heck] Heckman, G.J.: *An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam.* Invent. Math. **103**, 341-350 (1991)

[Heck-Sch] Heckman G.J. and Schlichtkrull H.: *Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces.* Perspectives in Math. **16** Academic Press, 1996.

[H-1] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

[H-2] ——: *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press, Orlando, 1984.

[H-3] ——: *Huygens' Principle for Wave Equations on Symmetric Spaces.* J. Funct. Anal. **107**, 279-288 (1992)

[H-4] ——: *Integral geometry and multitemporal wave equations.* Comm. Pure Appl. Math. **51**, 1035-1071 (1999)

[H-Sch] Helgason S. and Schlichtkrull, H. : *The Paley-Wiener space for the multitemporal wave equation.* Comm. Pure Appl. Math. **52**, 49-52 (1999)

[K] Kakehi T. : *Support theorem for the fundamental solution to the Schrödinger equation on a compact symmetric space.* preprint, submitted.

[L] Lang S. : *Algebraic Number Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 110. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Olaf-Sch] Olafsson, G. and Schlichtkrull, H.: *Wave Propagation on Riemannian Symmetric Spaces.* J. Funct. Anal. **107**, 270-278 (1992)

[Opd-1] Opdam, E.M.: *Root systems and hypergeometric functions III.* Comp. Math. **67**, 21-49 (1988)

[Opd-2] ——: *Root systems and hypergeometric functions IV.* Comp. Math. **67**, 191-209 (1988)

[Opd-3] ——: *Some applications of hypergeometric shift operators.* Invent. Math. **98**, 1-18 (1989)

[Opd-4] ——: *Harmonic Analysis for certain representations of graded Hecke Algebras.* Acta Math. **175**, 75-121 (1995)

[Sol] Solomatina L. E.: *Translation representation and Huygens' principle for the invariant wave equation on a Riemannian symmetric space.* (Russian) Izv. Vyssh.Uchebn. Zaved. Mat. **84**, no. 6, 72-74, (1986), English translation: Soviet Math. (Iz. VUS) **30**, no.6, 108-111 (1986)

[Tak] Takeuchi, M. *Modern Spherical Functions.* Transl. Math. Monogr. **135**, Providence, Amer. Math. Soc., (1993)

[Tur] Turaev, V.: *Reciprocity for Gauss sums on finite abelian groups.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124**, 205-214 (1998)

[Y] Yajima, K.: *Smoothness and non-smoothness of the fundamental solution of time dependent Schrodinger equations.* Comm. Math. Phys. **181**, (1996), no. 3, 605–629.

E-mail address: kakehi@math.tsukuba.ac.jp