

渦運動による音波の発生 — 歴史と理論と実験と

陳省身数学研究所 神部 勉¹ (Tsutomu Kambe)
Chern Institute of Mathematics
南開大学, 天津, 中国
Nankai University, Tianjin, China

音波の波動方程式に関する科学史を振り返り, Helmholtz および Euler の音波の研究を考察し, さらに現代の空力音研究の歴史を簡単にレビューする. 次に, 渦音の音源のメカニズム, 渦音の理論について考察し, 渦音の実験的検出について要約的に記述する. 最後に, 流体のマックスウェル方程式の新しい formulation を示し, 音波の方程式を新たに導出する.

1 科学史的考察

1.1 ヘルムホルツ論文 (1859)

Helmholtz は 1859 年に ‘オルガンパイプからの音の数理物理学的研究’ の論文 [1] を著した (文献によっては 1860 年とあるものもある). オルガンパイプの音は, 高圧空気室からの気流をスリットを通してエッジ (尖端, 上唇) に当てることによって作られることがわかっている. その上に共鳴管が装着されていて, 上端は開口端となっている (下端はエッジ部). Lord Rayleigh のコメントによると, 「ヘルムホルツは, 連続気流からどのような機構で管内に振動運動が発生するのか, 知りたかった。」 (*Theory of Sound* [2], vol.2). しかし結局, 音源のメカニズムについては彼は未知のままであった. オルガンパイプからの音は, すでにその 100 年以上前から D. Bernoulli, Euler らによって注目され, Lagrange, Poisson らによって研究されていた. 実は Euler は 1727 年 (19 歳), 「音の性質と伝播」についての学位論文 [3] を Bernoulli に提出したが, その中で音源の種類を考察し, オルガンやフルート²からの音は第三の音源として, 特別に考察しているが, もちろん結論は不明のままである. それが渦音として説明されるには 20 世紀後半まで待たなければならなかった.

Helmholtz は論文の冒頭で次のように書いている. 「オルガンパイプの数学的理論は著名な数理物理学者たちによっていろいろに考察されている. D. Bernoulli および Euler によって最初の一步が始められ, それによって現象の主な推移がおおよそ明らかにされて, さらに実質的な一步を進められない程である.」しかし, 初期の研究者はいづれも, パイプの開口端の条件を単純化して解いていた. すなわち, 開口端での圧力は, 周囲の大気とは異なることはないとし, そのため振動の節の位置が実験測定とは一致していなかった.

Helmholtz の論文はこの問題に, 明解な答え (開口端補正) を出したのである. 彼が立脚した方程式は言うまでもなく Euler の運動方程式と連続の式であった. Helmholtz の論文に書かれている通りにそれらの方程式を示すと, 運動方程式は

$$\frac{dP}{dx} - \frac{1}{h} \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dy} - \frac{1}{h} \frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \quad (2)$$

¹kambe@ruby.dti.ne.jp; <http://www.purple.dti.ne.jp/kambe/>; 東京都目黒区東山 2-11-3

²空気リード楽器に分類される. オルガンは高圧室から, フルートは口からの気流で音が湧起される.

$$\frac{dP}{dz} - \frac{1}{h} \frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}. \quad (3)$$

ここで、 (u, v, w) は速度ベクトル、 P は力のポテンシャルである。連続の式は

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} + \frac{d(hw)}{dz}. \quad (4)$$

密度に h を使っている点は、今とは異なるが、方程式の形は今も変わっていない。しかし驚くなかれ、方程式 (1)~(4) はさらに百年前に Euler [4] が導いた形とも変わっていないのである。

論文 [1] で、ポテンシャル流を仮定して速度を $\mathbf{v} = (u, v, w) = \text{grad } \Phi$ と表し、微小運動の条件の下で音の波動方程式を導出した。概略を示すと、運動方程式と連続の式は、

$$\partial_t \Phi + \text{grad}(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2) = -c^2 \int \frac{dh}{h} + P, \quad \partial_t h + h \text{div } \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \text{grad } h.$$

となる (Φ は速度ポテンシャル)。ここで最初の式は運動方程式の第 1 積分であり、 c は音速で、断熱関係式 $p = b h^\gamma$ を使って次式で与えられる (γ は比熱比、 b は定数)：

$$c^2 = dp/dh = \gamma p/h. \quad (5)$$

無限小運動を仮定するので、 $\text{grad}(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2)$ 、 $\mathbf{v} \cdot \text{grad } h$ の 2 項は省略され、各項を線形化して、第 1 式を時間 t で微分して、 $\partial_t h$ を消去すると、次式を得る：

$$0 = \frac{dP}{dt} - \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + c^2 \left[\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right]. \quad (6)$$

これが Helmholtz の示す波動方程式である。以後は $P = 0$ とする。

Helmholtz は角振動数 n の単色波を解析するために、 $\Phi = \Psi \cos(nt) + \Psi' \sin(nt)$ と置く。これを (6) に代入すると ($P = 0$)、次の有名なヘルムホルツ方程式が得られる：

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k^2 \Psi = 0, \quad k = n/c = 2\pi/\lambda. \quad (7)$$

Ψ' も同形の式を満たす。この時代にすでに、平面波 Ψ_p および球面波 Ψ_s の解が知られていた：

$$\Psi_p = A \cos kx, \quad B \sin kx; \quad \Psi_s = \frac{A'}{r} e^{\pm ikr}.$$

ここで、 k は波数、 A, B および A' は定数、 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ である。

ヘルムホルツの開口端補正:

半径 R の十分長い円管があったとし、その内部で角振動数 n の平面波 $\Psi_p \cos(nt)$ が実現されているとする。しかし、開口端の近くでは、外の空間の存在の効果で完全な平面波からはずれる。そこで、平面波で記述できる位置に原点をとり、円管に沿って x 軸をとり、開口端の位置は $x = L (> 0)$ とする。そのような原点の近くでは、次のように書ける：

$$\phi_0 = (A \cos kx + B \sin kx) e^{int}, \quad \text{開口端: } x = L.$$

ここで原点を含む管の断面を境界面 σ_0 と定義する。

管口から外の空間で、十分な距離 r から先では次のような球面波に移行する：

$$\psi_r = \frac{A'}{r} e^{-ikr} e^{int}.$$

この球面と一致するように境界面を σ_r と定義する。解析を容易にするために、開管のつば板は無敵大と仮定し、外部は半無限空間とする。上式はその半無限空間で成立すると考えることができる。次の課題は、3つの定数 A, B, A' の間の関係を合理的に決定することである。Helmholtz のアイディアは、グリーン の定理を使うことであつた。

境界面 S で囲まれた3次元領域 V において、2つのスカラー関数 Φ および Ψ が定義されているとき、グリーン の定理は次のように書ける：

$$\iiint_V [\Psi (\Delta \Phi + k^2 \Phi) - \Phi (\Delta \Psi + k^2 \Psi)] dV = \iint_S \left[\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] dS.$$

ここで、 $\partial/\partial n$ は境界面 S の外向き法線方向の微分である。いま、関数 Φ および Ψ がそれぞれ、 $\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$ および $\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0$ を満たすとすると、この定理は次に帰着する：

$$\iint_S \left[\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn} \right] dS = 0. \quad (8)$$

上に定義した2つの面（すなわち原点を含む管の断面 σ_0 と球面と一致する境界面 σ_r ）および管の壁、つば板の壁を含む全体を S とし、 S で囲まれた領域を V としよう。上の解 ϕ_0, ψ_r に加えて、さらに方程式 (7) の適当な解を新たに定義し、それらを使って、グリーン の定理 (8) を境界 S に適用することにより、定数 A, B, A' の間の関係を決定することができる。このようにして、若干の計算の結果、速度ポテンシャルの主要項が、

$$\begin{aligned} \text{管内の平面波:} \quad \phi &= \frac{1}{\cos k\alpha} \sin k(x - \beta) \cos nt - \dots\dots \\ \text{管外の球面波:} \quad \psi &= -\frac{k\sigma}{2\pi r} \cos(nt - kr). \end{aligned}$$

の形に表現できることを示した。ここで、 $\beta = L + \alpha$ と書くと、 α が開口端補正で、

$$\alpha \approx 0.82 R \quad (\text{infinite flange}), \quad \alpha \approx 0.58 R \quad (\text{without flange}).$$

と得られる [2]。Helmholtz は、このようにして開口端補正をもとめ、実験とつじつまの合う理論を提示し、オルガンパイプからの音が音波の理論で説明できることを明らかにした。

Helmholtz の論文 [1] で音波の波動方程式 (6) がオイラーの運動方程式と連続の式から導かれるが、それを最初に誰が導いたかは記されていない。次節で、それは実はオイラーによって最初に導かれたことを述べる。

2 Helmholtz 以前

2.1 科学史的にみると

Euler は、Helmholtz より百年前の1759年に論文「音の伝播について」[7]を著したが、その中で次のように記している。「LaGrange 氏の独創的な解析を見ることがなかったら、これは決して脳裏には浮ばなかつただろう。」また「彼の方法は最も適切に見えたが、計算はほとんど解読不能であつた。」20世紀の R. B. Lindsay はレーリーの著書 *Theory of Sound* (Vol.1) の1945年版の序文で、「LaGrange は、弦の振動の問題を明解な解析的方法で完全に解いた」と述べている。LaGrange は自分の論文 [5] を出版後にオイラーに送つた。上のコメントはそれを読んだオイラーの感想であつた。音の解析の部分ではオイラーは納得せず、自ら音波の理論をあみ出すことになつた。

オイラーはその論文 [7] の冒頭で次のような見解を述べている。「物理学者は、数学者と同じように、音がどのように空気中を伝わるのか、説明するのに苦慮している。たしかに、理論はまったく不完全なのであるから。偉大な Newton [6] がこの問題に対処したのは、任意性のある仮説に基礎をおいているので、十分というよりは非常に巧みなのである。Turin の博識な数学者である LaGrange 氏は、1759

年に Turin で出版された *Miscellanea Physico-Mathematica* の第一巻で非常に適切な指摘をおこなっている。それは、Newton がたてたのは別の仮説で、彼は音速表現などについて同じ結論を引き出したのである。そのことは、音が空気中を伝わる速さに何かかわっているか、Newton の仮説の正当性を弱めるのに十分である。というのは、空気粒子が逐次振動する真の運動を我々は同様に知らないのである。その振動が如何に作られ、空気中をどのように伝わるかを統一的にはっきりと説明しない限り、音の伝播を我々が理解していると言えないであろう。」

このように書き始めて、Euler は以下の 2.2 節に示す音波の波動方程式を導出する。初めて音の物理現象に対する 3 次元波動方程式を導いたのである。Newton の仮説とは異なり、その式で同じ音速の式が運動方程式から導かれた。従って、上で LaGrange の指摘として述べたことは、実は Euler の導いた式でも同じだった。Newton はプリンシピア [6] の第 II 編 (命題 47, 48, 49) で、かなり任意性のある特殊な仮定のもとで、音速を $c = \sqrt{gh}$ とした。ここで、 h は地上空気密度 ρ の流体の高さ、大気圧は $p = \rho gh$ としている³。これを導くのに、空気粒子は波の進行軸上を単振動をすると仮定するが、この振動の性質は長さ h の振子の運動のように考える。命題 49 系 I, 系 II では、単振子の公式と重力加速度 g の下の自由落下の公式、および幾何学的比例関係を駆使して、音の伝播の速度を \sqrt{gh} とする。その推論は次のようなものである。振子の一周期は $T = 2\pi\sqrt{h/g}$ で、半径 h の円周の長さは $L = 2\pi h$ であるから、速度は $L/T = \sqrt{gh}$ 。これを音速 $= \sqrt{p/\rho}$ とするのであるが、これをつぎのように補足説明する。距離 h を一定速度 \bar{v} で移動するときの時間は $\bar{t} = h/\bar{v}$ である。静止から時間 \bar{t} の間、自由落下する距離は $\frac{1}{2}g\bar{t}^2$ である。この距離を $\frac{1}{2}h$ とすると、 $\bar{t} = \sqrt{h/g}$ 、速度は $\bar{v} = h/\bar{t} = \sqrt{gh}$ となる。要するに、観測される音速に \sqrt{gh} の値に近いことが念頭にあり、この結論が先にある、振動性と重力とを結びつけたとしか思えない推論である。

次の Euler の波動方程式の導出では、音速は全く自然に、運動方程式とボイルの法則、[圧力]・[体積]=一定、を使って導かれ、そこでは粒子速度と音波の位相速度とは別の概念として現れるが、音速はやはり \sqrt{gh} であった。これに対して Newton の推論では、両者の速度が概念的に分離しておらず、単振子と自由落下の原理、と幾何学的比例関係に依存し、微分方程式は使われない。波動方程式では、任意の波形が位相速度 c で伝播するので、音波の本質的性質が Euler によって明らかにされた。すなわち、どんな波長でも伝わる速さは同じなのである。音速の公式は歴史的に Newton の名が使われてきた。しかし Euler の形も同じ $c = \sqrt{gh}$ であることから、Euler-Newton の式と呼ぶのがいいかもしれない⁴。しかし Newton の推論は、音の物理現象の本質を捉えていないことを考えれば、本当は音速の式 \sqrt{gh} は Euler の式と言うべきであろう。

2.2 Euler の音の理論

Euler は音波の研究で粒子座標、いわゆる *Lagrangian picture* を導入した。すなわち空気粒子の初期座標 X, Y, Z を独立変数として、その運動を次のように表した： $x = f(X, Y, Z, t)$, $y = g(X, Y, Z, t)$, $z = h(X, Y, Z, t)$ 。⁵

音の 1 次元問題で、Euler [7] は時刻 t の空気粒子の空間位置を $x = f(X, t)$ と表した。ただし、 X は $f(X, 0)$ で定義される粒子座標である。詳細は次の 3 次元問題で示すが、1 次元問題では、 $x = X + y(X, t)$ とおいて、Euler は次の方程式を導いた：⁶

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y/dX^2}{(1 + (dy/dX))^2} \approx c^2 \frac{d^2y}{dX^2}.$$

微小振動を仮定して y について線形化すれば、右辺となり、1 次元波動方程式を得る。このようにして、まず 1 次元波動方程式を導いた。

3 次元波動方程式:

Euler は次の論文 [8] で、2 次元、3 次元の波動方程式を導出する。独立変数は初期座標 X_1, X_2, X_3 と書く (オイラーの記法は X, Y, Z)。粒子の位置を $x_k = X_k + \xi_k(X_l, t)$ ($k, l = 1, 2, 3$) とし、

³ $c^2 = p/\rho = \rho gh/\rho = gh$ 。オイラーの記法では、 $c^2 = 2gh$ 。なぜなら、オイラーの時代には、自由落下は $y = \bar{g}t^2$ と書かれ、今の重力加速度 g を使うと、 $g = 2\bar{g}$ である。

⁴ Lagrange の名も入れるべきなのかも知れないが、それを確認すべき資料がいま手元にはない。

⁵ Laplace は、1776 年の潮汐の理論において、それを使った。Darrigol [9]。

⁶ 論文 [7] では、中辺分母は $(1 + (dy/dX)^2)$ と誤記されている。

体積要素 $dx_1 dx_2 dx_3$ の密度を ρ とすると、その質量は $\rho(dx_1 dx_2 dx_3) = \rho_0(dX_1 dX_2 dX_3)$ と書ける。ここで、粒子座標 X_k から空間座標 x_k への変換の Jacobian は

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{\rho}, \quad (\text{ただし初期密度 } \rho_0 = 1 \text{ とする}). \quad (9)$$

ここで、 $\partial x_k / \partial X_l = \delta_{kl} + \partial \xi_k / \partial X_l$ であることに注意すると、上式は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = 1 + \frac{\partial \xi_k}{\partial X_k} + O(\varepsilon^2) = 1 + v + O(\varepsilon^2).$$

ただし微小振幅運動を考察するので、 $\varepsilon \equiv \text{Max}|\partial \xi_k / \partial X_l| \ll 1$ と仮定し、体積増分率 $v = \text{div}_X \xi$ を定義した。上は $\rho = 1 - v + O(\varepsilon^2)$ と書ける。関係式 $dp/d\rho = c^2$ を使うと、運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x_k \left(= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_k \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial X_l}{\partial x_k} \frac{\partial \rho}{\partial X_l}, \quad (10)$$

となる。最後は、粒子座標 X_l を独立変数とする表現に変換された。 $O(\varepsilon)$ までとすると、式(10)は、 $\partial^2 \xi_k / \partial t^2 = -c^2(\partial / \partial X_k)\rho = c^2(\partial v / \partial X_k)$ となる。この式を X_k について div をとると、

$$\therefore \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2 v}{dt^2} \right) = \left(\frac{d^2 v}{dX^2} \right) + \left(\frac{d^2 v}{dY^2} \right) + \left(\frac{d^2 v}{dZ^2} \right).$$

を得る。このようにして **3次元音波の方程式が、Euler [8] によって1759年に導かれた。**

音速 $c = \sqrt{p/\rho}$ が等温過程の Newton の式と同じではあるが、科学的に重要なのは、音波の式が、3次元の偏微分方程式の形に与えられた点である。Laplace (1816) による正しい音速の表現(5)に至るには、気体の物理学のその後57年の歴史的発展を待たなければならなかった。

2.3 初期値問題, Poisson (1820)

波動方程式の初期値問題,

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi - a^2 \nabla^2 \phi = 0; \quad \phi(x, y, z)|_{t=0} = f(x, y, z), \quad \dot{\phi}(x, y, z)|_{t=0} = F(x, y, z),$$

の一般解は、Poisson ([11], 1820) により、以下のように与えられた：

$$\phi = \frac{t}{4\pi} \int \int F(r) d\varpi \Big|_{r=at} + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[t \int \int f(at) d\varpi \right],$$

$d\varpi = dS_r / r^2$ (立体角要素), dS_r は半径 r の球面要素.

3 Helmholtz 以後

3.1 Strouhal (1878)

風の中の弦(あるいは枯れ枝), もしくは流れの中の細い棒, から音波が放射される。メカニズムは Acolian harp の音源と共通と見られ, エオルス音 **Aeolian tone** と呼ばれる⁷。Acolian tones の研究は 1878 年の **Strouhal** [12] に始る。Strouhal は支持体に針金を弦のように張って(回転アームによって)空気中で運動させて, 発生する音の振動数 f を測定した。解析の結果, その振動数 f は針金の張

⁷ラテン語では Aeolus は風の神を意味するという。Aeolian tone という用語は, 1650 年出版の Musurgia Universalis (Athanasius Kircher 著) にすでにある(藤田肇先生との private communication)。

力や長さに依存せず、針金の直径 d と空気との相対速度 v だけに依り、無次元数 $fd/v = St$ はほぼ一定値 0.18 をとる。これは摩擦音 (Reibungstone) とよばれたが、現在ストローハル数と呼ばれている無次元数の始まりである。もし弦楽器のように音が弦の振動に起因していたなら、観測された音の振動数は針金の張力や長さに依存しているはずであるが、そうではなかった。この現象は、Euler の時代から探し求められてきた流体力学的に未知の現象に起因していた。その後 **Bénard** [13] によって、この音は渦列⁸と結びつけられた。Rayleigh は "Acolian tones" という論文を書いている [14]。Yudin [15] はそれを vortex sound と呼んで、初めて vortex sound なる用語があらわれてきたが、vortex sound の真の理論は、後に述べるように、より一般的な formulation で新たに展開をみることになる。

3.2 Rayleigh (1877, 1896, 1926)

Rayleigh は Strouhal とほぼ同時期に音の研究を始め、*Theory of Sound* [2] を出版し、その後も改訂を続けて、それは物理学における不朽の古典的テキストとなった。その Volume 1 は、振動の理論で、弦、棒、膜、板、電気回路等の振動と音の理論が詳述されている。

Volume 2 は空気振動が主で、オイラーの運動方程式、連続の式を基礎として音の一般理論も考察されている。Helmholtz のオルガンパイプの理論、開口端補正の理論 [1] がここに詳述されている。さらに、エオルス音と Strouhal の Reibungs tone との関係も記され、「その発生は疑いもなく vortex sheets の不安定性と結びついている」と述べている。しかし、「渦の運動による」とは書いてないので、Rayleigh はまだ vortex sound の理論の核心には至っていなかったようである。しかし、Blokhintsev [16] は 1946 年に渦列の速度ポテンシャルから音の強さを計算した論文を発表したので、この当りで vortex sound の理論により近づいたと思われる。

4 Lighthill 理論とその後の発展

4.1 Aerodynamic sound: 空力音理論

ジェットエンジンが開発されつつあったのは 1950 年の頃であるが、ジェット騒音についてはその音源がどこにあるのか、あまりわかっていなかった。しかしジェットエンジンが大変な騒音を発生することは知られていた。ちょうどその頃 M.J. Lighthill は、エンジン開発の委員だったこともあって、騒音の発生機構について考えているうちに、その機構を説明する新しい方程式に思い至り [17]、それを Aerodynamic sound (空力音) と呼んだ。方程式 (後述) は Lighthill の名でよばれ、その解から簡単ではあるが一つの重要な結論が導かれた。すなわち、噴き出し速度 U のジェットが放射する音のパワー (単位時間当たり) は U^8 に比例するという U^8 -法則である。

4.2 Theory of vortex sound

空力音理論はジェット騒音の発生機構の研究に端を発したが、渦運動による音の発生機構をも明らかにした。最初の理論ではこのことは想定されていなかったことで、やや意外な展開であったかもしれない。Acolian tone は、渦と物体との相互作用によって生ずる 2 重極音であるが⁹、**Powell** [18] は別の方面から vortex sound を考察し、 $\text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$ の形の項が音源になることを示した。これは渦度 $\boldsymbol{\omega}$ がゼロでない点が音源になることを意味し、渦運動だけによって、物体のない自由空間で 4 重極音性の音が発生することを導いた。

さらに、より洗練された表現は **Obermeier** [19] によって、接合漸近展開法という数学的手法で導かれたが、その対象は Powell が例に示した 2 次元の渦運動であった。すなわち、2 つの同じ強さの渦糸は互いの中心のまわりを一定の振動数 f で回転する。そのとき音波が周囲にらせん的に放射される (その直接数値計算は [20] に示されている)。接合漸近展開法の 3 次元の完全な形は次節に示す。

Howe [21] は Lighthill の方法を再構成して、渦運動による音の発生を記述する方程式、

$$(c_0^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2) p' = \rho_0 \text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}), \quad (11)$$

⁸いわゆるカルマン渦列に注目したのは実は Bénard (1908) の方が Kármán (1911) より先であった。

⁹藤田肇先生の講演で詳述される。

を提示し、*Equation of vortex sound* と呼んだ。ただし、一様な静止状態では圧力、密度は p_0, ρ_0 とし、entropy も一定とする。また、 c_0 は音速、 $p' = p - p_0$ は音圧、 \mathbf{v} は速度場、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度場である。Howe は上の式を応用して、楕円柱渦の回転による音の放射、および渦糸が半無限平板のエッジを回り込むときの音の放射の式を求めた。

このエッジを回る渦による音が、エッジと渦の相互作用による音の発生として、オルガンパイプやフルートの音源を説明できる。そのようなエアリード楽器の場合の音源メカニズムについては、上流のジェットのエッジに、下流からの音波が作用して渦を作り、それがジェットに流されてエッジ (lip) と相互作用して、共鳴音源となると考えるのが実際に近いようである。

式 (11) 右辺の項は、いまは Powell-Howe の音源項と呼ばれている。Möhring [22] は、渦度方程式 (18) (後出) を巧みに利用して、方程式 (11) の 3次元問題の音圧 $p(\mathbf{x}, t)$ の式を与えることに成功した。それは渦度 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ のみを、しかも線形に含むだけであったので、 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ が知られば、音の 3次元放射場が比較的簡単に計算できる表現であった。(Howe の計算は 2次元問題の vortex sound であった。Möhring の式は次節に示す。) 注目すべきなのは、音圧が $\boldsymbol{\omega}$ のみを含むことで、これこそ **Vortex Sound** の名に相応しい形であった。

4.3 Vortex sound: Reformulation and experimental detection

渦音の実験的検出は、2つの渦輪の正面衝突に対して Kambe & Minota [23] によって最初に行われ、1983年に報告された (図 7.1, 7.2, 7.3)。Möhring [22] によって予言された空間的な 4重極性分布が実験的に確認され (図 7.5, 7.6)、渦運動の数値計算からえられた渦度のデータからも波形が計算された。当時の計算機では低いレイノルズ数での計算が可能のみで、実験値の高いレイノルズ数には至れなかった。それでも理論の正しさが、大枠として定性的に実証された。

2つの渦輪の斜め衝突による渦音の研究は Kambe, Minota & Takaoka [26]) によってなされた。この場合には、渦線の再結合が起るので (図 7.7)、それによる音波の信号を計算し、実験的に検出することが主なものの一つで、それも大局的に実証された。実験では、粘性効果が存在し、非粘性理論での波形の修正が必要である。粘性効果を考慮して渦音理論を整理し、さらに実験測定と比較した。特に、運動エネルギーの粘性散逸による、等方的な単極成分が検出されたことは記す価値がある [23, 26]。

渦音の発生は速度ポテンシャルの変動としても説明することができる。コンパクトな渦度の分布は周囲に速度ポテンシャル Φ で表される渦なしの流れを誘起する。十分遠方の Φ を漸近展開で表すと、

$$(\text{単極ポテンシャル}) + (2 \text{重極ポテンシャル}) + (4 \text{重極ポテンシャル}) + \dots$$

の形になる。第 1項は $Q_0(t)/r$ の形である。境界のない無限空間では、第 2項の 2重極 $\partial_i(1/r)$ の係数 $Q_i(t)$ は時間的に変化しない。第 3項の 4重極 $\partial_i\partial_j(1/r)$ の係数 $Q_{ij}(t)$ は変動する。その性質に着目して、3次元渦音問題を接合漸近展開法で考察したのが文献 [24] で、その波形は図 7.4 の "inv" である。速度ポテンシャルの遠方場の変動が 4重極音を励起することがそこで明らかにされた。

接合漸近展開法を発展させて理論を再構成して、4重極以上の多重極まで表現し、渦の斜め衝突の問題に応用したのが [26] である。同じ問題の計算機シミュレーションによって実験に即したデータでよい一致を得たのが Ishii, Adachi & Kambe [27] であり、音源についても独自の考察をしている。

4.4 Vortex sound: DNS

2渦輪の正面衝突の軸対称問題で直接シミュレーションが Inoue, Hattori & Sasaki [28] によって行われ、定性的に [23] の実験とよく合う結果が得られた。これは、わが国で最初の渦音の DNS (Direct Numerical Simulation) である。しかし、計算のレイノルズ数が実験の約 1/10 であること、軸対称性を課した計算であったことで、定量的な一致ではなかった (図 7.4 "dns")。

2渦輪の斜め衝突の渦音についても Nakashima, Hatakeyama & Inoue [29, 30] によって DNS が実行され、実験との比較が行われた (図 7.8)。定性的に両者は一致しているといえようが、今後はまだ課題は残されている。

5 音波の発生の機構

5.1 Lighthill の空力音理論

粘性流体の質量および運動量の保存方程式は次で与えられる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} = 0, \quad (12)$$

ここで、 v_i は速度ベクトル、 $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + (p - p_0) \delta_{ik} - \sigma_{ik}$ は運動量流量テンソル、 p は圧力場、 p_0 は一様状態の圧力である。 σ_{ij} は次で定義される粘性応力テンソルである：

$$\sigma_{ik} = \mu e_{ik}, \quad v_{ik} = \partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial v_l / \partial x_l, \quad (\mu : \text{ずり粘性係数}).$$

式 (12) の 2 つの式から、 ρv_i を消去すると次の **Lighthill 方程式** が得られる：

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \rho' = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik}, \quad T_{ik} = \Pi_{ik} - c^2 \rho' \delta_{ik} = \rho v_i v_k + (p' - c^2 \rho') \delta_{ik} - \sigma_{ik}, \quad (13)$$

ただし、 c は音速、 $\rho' = \rho - \rho_0$ 、 $p' = p - p_0$ 。この式は、標準的な波動理論から、次の積分形、

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \int \frac{T_{ik}(\mathbf{y}, t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{y}, \quad (14)$$

に表せる。ただし、 $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c$ は、音源点 \mathbf{y} から観測点 \mathbf{x} に伝わるに要する遅延時間である。この式の右辺の 2 回の微分は、音の方向分布が 4 重極性であることを述べている。Lighthill [17] は式 (14) から、 U^8 -則、即ち、速度 U で特徴づけられる乱流からの放射音のパワーが U^8 に比例する（圧力 p は U^4 に比例する）法則を導いた。それは、Powell [31] の実験測定を確認するものであった。

● **非粘性流体** ($\sigma_{ik} = 0$)：流れの代表マッハ数 M を U/c で定義する。一様エントロピー ($s = \text{一定}$ 、 $p' - c^2 \rho'$) の流体の低マッハ数 ($M \ll 1$) の流れの場合、Lighthill の方程式 (13) は、

$$(c^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2) p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i v_j. \quad (15)$$

となる。これは次の形に書き換えられる：

$$(c^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2) p = \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{L}. \quad (16)$$

というのは、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を満たすとすると、次式がなりたつからである：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i v_j = \operatorname{div} \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} \equiv v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla(v^2/2).$$

音源が $\operatorname{div} \mathbf{L}$ で与えられることがわかる。特に、 $\rho_0 \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ は Powell-Howe の音源と呼ばれる。

5.2 非線形メカニズム

音波は非線形のメカニズムで励起される。いま、初期の速度場が

$$v_i(\mathbf{x}, 0) = \int \hat{v}_i(\mathbf{k}, 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k},$$

と表わされるとし、さらに $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ が非圧縮の性質を満たすと仮定する：

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{at} \quad t = 0.$$

これは横波の性質である。この場合でも、音源項は縦成分を生み出す。なぜなら、式 (15) の音源項は

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j (v_i v_j) &= \partial_i \partial_j \int \hat{v}_i(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k}_1 \cdot \int \hat{v}_j(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k}_2 \\ &= - \int \int (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)) (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_2)) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \end{aligned}$$

となる。被積分関数の係数は、 $(\mathbf{k}_2 \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)) (\mathbf{k}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_2))$ に等しく、一般にゼロではない。これが式 (15) によって、音圧 $p(\mathbf{x}, t)$ を生み、運動方程式 (17)、もしくは (1)~(3)、により、 p の grad から縦成分の速度が生れる。このようにして、非線形のメカニズムが縦成分を作り出し、音波が発生する。

6 理論の再構成 [24, 25, 26]

渦度 ω を有する粘性流体の流れを考える。長さの代表スケールは l , 代表速度は v とし, 流れのマッハ数 M は 1 に比べて小と仮定する:

$$\text{Mach number : } M = v/c \ll 1, \quad \text{time scale : } \tau = l/v, \quad \text{wave scale : } \lambda = c\tau = l/M \gg l.$$

それ故, 発生する音波のスケール λ は, 流れ場のスケール l よりもずっと大である。このため, 全空間は 2 つの空間に分けて考察される [25]:

内部の音源流の領域, 外部の波動伝播の空間.

6.1 内部領域の流れ場

内部領域では, $O(c^{-2}p_{tt})/O(\nabla^2 p) = (\Delta p/c^2\tau^2)/(\Delta p/l^2) = l^2/c^2\tau^2 = M^2$ なので, 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は, 非圧縮の式 $\text{div } \mathbf{v} = 0$, および次の粘性流の方程式に支配される:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\nu = \mu/\rho: \text{動粘性係数}), \quad (17)$$

$$\partial_t \omega + \nabla \times (\omega \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 \omega, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (18)$$

(誤差は $O(M^2)$ 程度の大きさである。) $\rho = \rho_0$ として, 式 (17) の div をとると次式となる:

$$-\nabla^2 p = \rho_0 \text{div } \mathbf{L}. \quad (19)$$

これは, 式 (16) の第 1 項を省略した形になっている。内部領域での音圧 p_1 は次式で与えられる。

$$p_1 := p - p_0 = \rho_0 \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{y}, t) d^3 \mathbf{y}, \quad (20)$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はグリーン関数で, 方程式 $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ を満足する。全運動エネルギーは

$$K(t) = \frac{1}{2} \int v^2 d^3 \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{L} d^3 \mathbf{y}, \quad (21)$$

で与えられる。ここで, 恒等式 $v_i v_i = -x_i L_i + \partial_j (x_i v_i v_j) - x_i v_i (\partial_j v_j)$ および $\partial_j v_j = 0$ を使っている。積分すると, 項 $\partial_j (x_i v_i v_j)$ は表面積分に変換されて消える。なぜなら, 次節の (22) から, $Q_0 =$ のとき, $x \rightarrow \infty$ で $|v_i| = |\partial_i \Phi| = O(x^{-3})$ であるからである。

6.2 内部領域の遠方場

局在した渦度場 $\omega(\mathbf{x}, t)$ によって誘起される非圧縮速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ を考える。 $\omega(\mathbf{x}, t)$ は渦度方程式 (18) に従う。有界領域 D の外では, $\omega(\mathbf{x}, t)$ は指数関数的に急激に減衰するものとする。 $\omega(\mathbf{x}, t)$ が知られると, 速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ は次のように与えられる:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \text{curl } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{y}.$$

D 内の点 $\mathbf{y} (\in D)$ から十分離れた遠方の点 \mathbf{x} では, 次の漸近展開が成り立つ ($x = |\mathbf{x}| \gg y = |\mathbf{y}|$):

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{x} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} y_i y_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} - \frac{1}{3!} y_i y_j y_k \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{1}{x} + \dots$$

領域 D の外では, 速度 \mathbf{v} は渦なしの場に漸近する。それ故, 遠方での主要項は $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ の形に表せる。そのポテンシャル Φ は, 若干の計算の後 [26], 遠方の点 \mathbf{x} では次の級数展開で表せる:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = Q_0(\mathbf{x}, t) + Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x} - Q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} + Q_{ijk} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{1}{x} + O(x^{-5}), \quad (22)$$

$$Q_i(t) = \frac{1}{8\pi} \int_D (\mathbf{y} \times \omega)_i d^3 \mathbf{y}, \quad Q_{ij}(t) = \frac{1}{12\pi} \int_D y_i (\mathbf{y} \times \omega)_j d^3 \mathbf{y}, \quad (23)$$

$$Q_{ijk}(t) = \frac{1}{32\pi} \int_D (\mathbf{y} \times \omega)_i y_j y_k d^3 \mathbf{y}, \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

粘性流体中では、運動エネルギーの粘性散逸で熱の発生があるため体積変化がある [23]. 第1項 Q_0 はそのような等方的な単極成分を表わす. 第2項の係数 Q_i は外力なし・物体なしの場合は保存する ($Q_i = \text{const}$, $P_i \equiv 4\pi Q_i$ はインパルス). 渦運動による音波の励起は、上の多重極展開の係数 Q_i の時間依存性と密接に関係している. 内部遠方場の圧力は $p_1 = -\rho_0 \partial_t \Phi$ で与えられる.

6.3 外部波動領域

波長 λ でスケールされる外部領域では、 $O(c^{-2} p_{tt}) / O(\nabla^2 p) = \lambda^2 / (c^2 \tau^2) \approx 1$ なので、外部変数を

$$\hat{x}_i \equiv \frac{x_i}{\lambda} = M \hat{x}_i, \quad \hat{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \hat{p} = \frac{p - p_0}{\rho_0 v^2}, \quad \hat{v}_i = \frac{v_i}{v}, \quad \hat{\nabla} = \lambda \nabla.$$

で定義すると ($\hat{x}_i = x_i / \lambda$ は内部変数), 波動方程式 (15) は、高次項を省略すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \hat{p} - \hat{\nabla}^2 \hat{p} = 0. \quad (25)$$

これは外部領域が波動伝播の領域であることを述べている. この波動方程式の特解の一つは

$$\frac{A(\hat{t} - \hat{x})}{\hat{x}}.$$

ただし、 $A(\hat{t})$ は任意関数で、 $\hat{x} = |\hat{\mathbf{x}}|$. 変数 x_i について任意回数の微分で得られる関数もまた解である. 以上より、外部領域での音圧 $p_0 = p - p_0$ は、一般に次の多重極展開で表せる:

$$p_0(\mathbf{x}, t) = \frac{A_0(\hat{t} - \hat{x})}{\hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \frac{A_i(\hat{t} - \hat{x})}{\hat{x}} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_j} \frac{A_{ij}(\hat{t} - \hat{x})}{\hat{x}} + \dots, \quad (26)$$

ここで、 $\hat{t} - \hat{x} = (t - x/c) / \tau$ は外部変数で表した無次元遅延時間である. 関数 $A_0(\hat{t})$, $A_i(\hat{t})$, $A_{ij}(\hat{t})$, ... は、内部圧力 p_1 との接合によって決定されるべき未定関数である. 接合の結果、それらの関数が内部流の渦度 $\omega(\mathbf{x}, t)$ で表現されるなら、圧力 p_0 は、渦運動によって放射される音波を表現することになる.

外部領域の音波の場合は渦なしで、速度ポテンシャル $\Phi_*(\mathbf{x}, t)$ によって、速度は $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi_*$, 圧力は $p_0 = -\rho_0 \partial_t \Phi_*$ と表せる.

6.4 内外の解の接合

2つの解 $p_1(\mathbf{x}, t)$ および $p_0(\mathbf{x}, t)$ の接合は、matching principle に従って中間領域でおこなわれる. 内部圧力 $p_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$ は、外極限 $\hat{x} \rightarrow \infty$ で漸近展開される. 他方、外部圧力 $p_0(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$ は、内極限 $\hat{x} \rightarrow 0$ で漸近展開される. 接合の原理は、両展開の主要項が共通の中間領域で相互に接合することである. このような接合によって、式 (26) に含まれる関数 $A_0(\hat{t})$, $A_i(\hat{t})$, $A_{ij}(\hat{t})$, ... が決定された [26].

外部領域の音波の波形がこのようにして求められるが、特に観測では、さらに十分遠方 ($\hat{x} \rightarrow \infty$) の音圧の表現 $p_F(\mathbf{x}, t)$ が便利である. それは次のように表せる:

$$p_F(\mathbf{x}, t) = \frac{5 - 3\gamma}{12} \frac{\rho_0}{\pi c^2} \frac{1}{r} K^{(2)}(t_r) + \frac{\rho_0}{c} \frac{x_i}{r^2} Q_i^{(2)}(t_r) + \frac{\rho_0}{c^2} \frac{x_i x_j}{r^3} Q_{ij}^{(3)}(t_r) + \frac{\rho_0}{c^3} \frac{x_i x_j x_k}{r^4} Q_{ijk}^{(4)}(t_r) + \dots$$

(monopole) (dipole) (quadrupole) (octapole) (multipoles)

$$Q^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} Q(t), \quad r = |\mathbf{x}|, \quad t_r \equiv t - r/c \quad (\text{retarded time}). \quad (27)$$

ここで、 $K(t)$, $Q_i(t)$, $Q_{ij}(t)$, $Q_{ijk}(t)$, ... は (21), (23), (24) に定義されている関数である. それらは $\omega(\mathbf{x}, t)$ が知られれば、 t の関数として決定される. それ故、ここに得られた波は、渦音 **vortex sound** と呼ぶのに相応しい.

7 実験的検出

渦音の実験的検出は、1983, 86年に2渦輪の正面衝突による音波が報告され [23, 33]. 数年後に斜め衝突による音波が報告された [26]. これらは自由空間での渦音であるが (7.1節), 観測された音の波形は、以下に示すように理論的予測とよく一致している. 観測べき法則, $\Delta p (\text{Pa}) \propto U^4$, は図 7.9 の **b** である (U [m/s]). 物体との相互作用で放射される渦音については、7.2節に諸例の実験が示されている.

7.1 2つの渦輪の衝突による音 (正面衝突、斜め衝突)

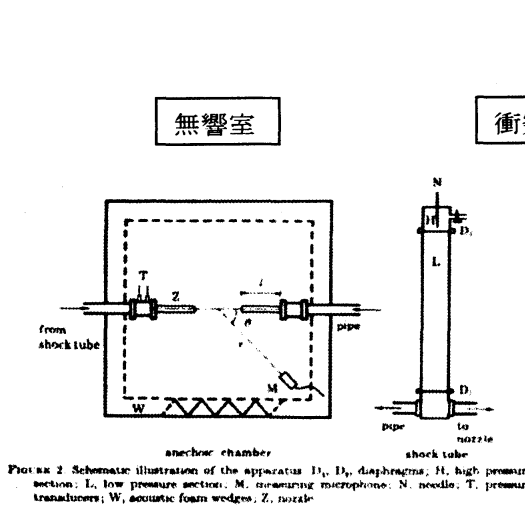
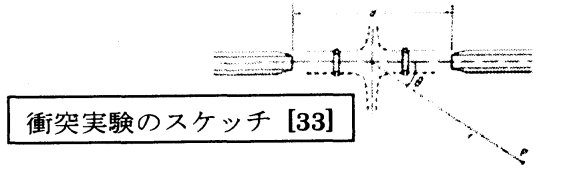


図 7.1 渦輪発生装置、および衝撃波管(右) [23].



衝突実験のスケッチ [33]

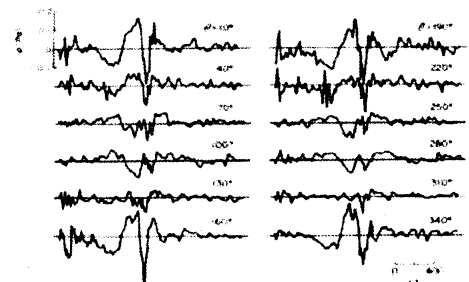


図 7.2 方向 θ で検出された平均波形 $p(t)$:
 $p(t) = p_m(t) + p_q(t) (1 - 3 \cos^2\theta)$
 p_m : 単極, p_q : 4重極

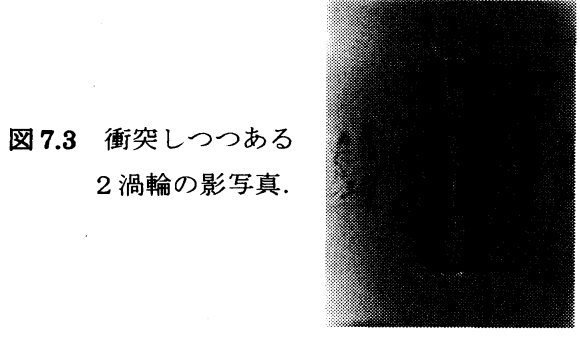


図 7.3 衝突しつつある
2渦輪の影写真.

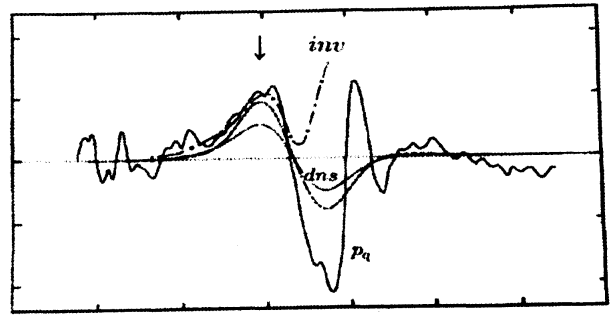


図 7.4 4重極波形 $p_q(t)$ の比較: .
 p_q : 実験 [33], inv : 非粘性計算 [24],
 dns : 直接数値計算 [28].

図 7.5 再構成され
た実験波形 [25].

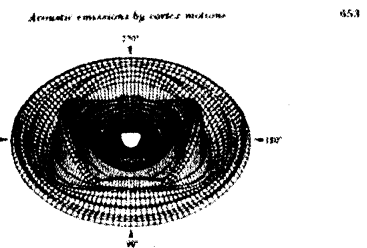
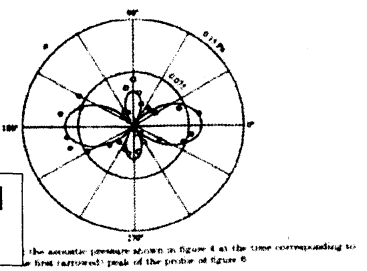


FIGURE 4. Perspective diagram of the observed acoustic pressure (maximum amplitude being about 0.15 Pa) ($U = 33 \text{ m/s}$, $R_0 = 4.7 \text{ mm}$, $z = 630 \text{ mm}$. Equal times are shown by concentric circles, the outer one being earlier in time).

図 7.6 音圧指向性 [25]
(図 7.4 の矢印の時刻)



the acoustic pressure shown in figure 4 at the time corresponding to the first (arrowed) peak of the probe of figure 6

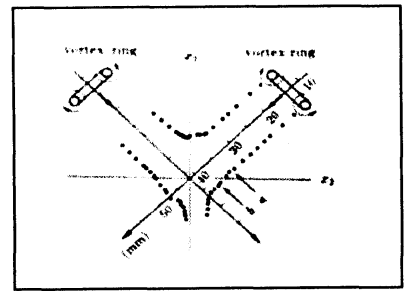
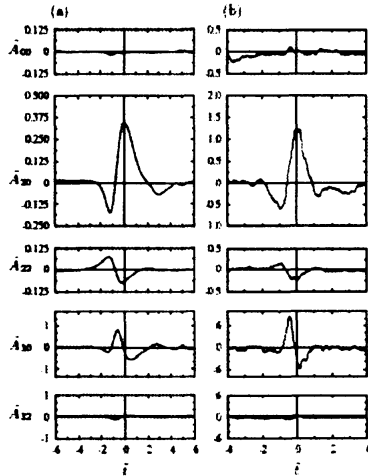


図 7.7 斜め衝突の渦核の観測軌跡 [26].

図 7.8 多重極の実験波形:

(左) DNS [30], (右) 実験 [26].

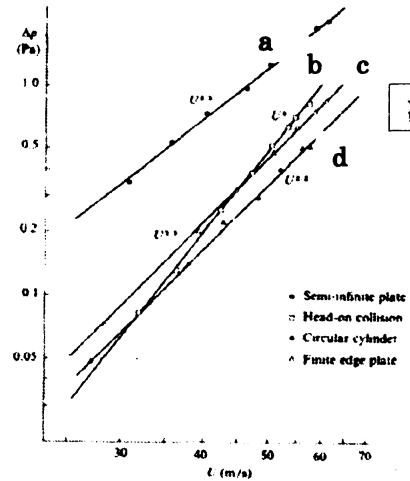
斜め衝突



実験値の総合:
(絶対値). ⇒

図 7.9 測定されたベキ法則 [25, 39]:

Δp (Pa) vs U (m/s).



次頁

7.2 渦輪と物体 (円柱, エッジ) の相互作用

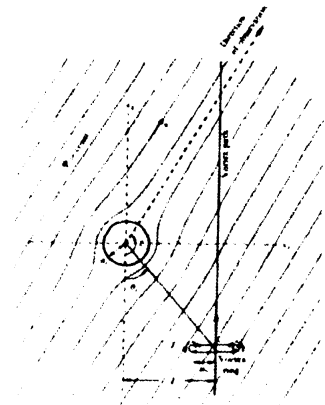
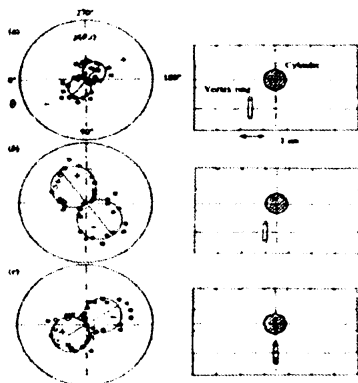


図 7.10 (左) 円柱側面を通過する渦輪と 2 重極音.

(右) 円柱周りの仮想ポテンシャル流の流線を切る渦輪運動 [34].

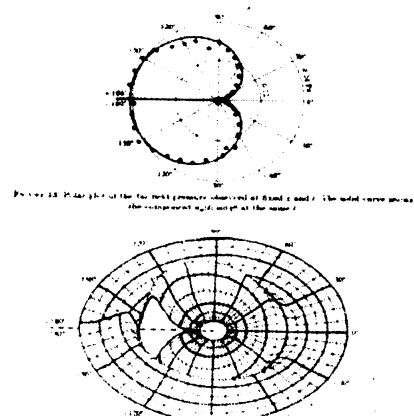
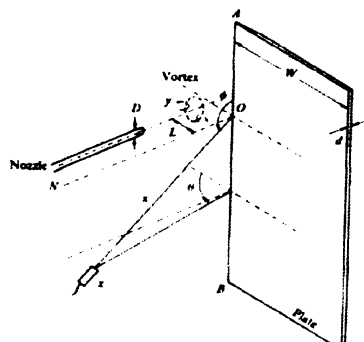


図 7.11 (左) 平板のエッジを通過する渦輪

(右) 放射音の瞬間的 Cardioid pattern (上), および放射波形 (下) [32].

次の諸例の場合について実験が行われた：

- エッジ (図 7.11): 渦輪が平板のエッジ近くを通過するときの音 (ベキ法則は図 7.9 a) [32],
- 円柱 (図 7.10): 渦輪が円柱の近くを通過するときの音 (ベキ法則は図 7.9 d) [34],
- 球 : 渦輪が球と軸対称的に相互作用するときの音 [35],
- 有限幅の平板 : 渦輪が有限幅の平板のエッジ近くを通過するときの音 (ベキ法則は図 7.9 c) [36].

8 流体の Maxwell-like 方程式

電磁気学において、荷電粒子の運動を記述するのは、運動方程式、および電場 \mathbf{E} および磁場 \mathbf{B} にたいするマックスウェル方程式である。

一方、流体の運動の場合は、次のオイラーの運動方程式 (等エントロピー流体の場合)：

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla h \quad \left(= -\frac{1}{\rho} \nabla p \right), \quad (28)$$

および、これに加えて流れ場の内部構造が次の 3 つの方程式に支配される：

$$\begin{aligned} (a) \quad & \text{連続の式} & : & \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ (b) \quad & \text{エントロピーの式} & : & \quad \partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \\ (c) \quad & \text{渦度方程式} & : & \quad \partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0. \end{aligned}$$

ただし、 \mathbf{v} は速度、 ρ は密度、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度、 s はエントロピー、 h はエンタルピーである。

流体マックスウェル方程式

上の方程式 (a), (b), (c) から、電磁場のマックスウェル方程式と同形の方程式系が以下のように導かれる。まず、ベクトル \mathbf{E} と \mathbf{B} を次式で定義する：

$$\mathbf{E} \equiv -\partial_t \mathbf{v} - \nabla h, \quad \mathbf{B} \equiv \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (29)$$

これらに対し、次の「流体マックスウェル方程式」が成立する：

$$\begin{aligned} (A) \quad & \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, & (B) \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ (C) \quad & c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, & (D) \quad & \nabla \cdot \mathbf{E} = q, \end{aligned}$$

ただし、

$$q = -\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 h, \quad c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_{s, \text{fixed}}} \quad (\text{sound speed}), \quad (30)$$

$$\mathbf{J} = \partial_t^2 \mathbf{v} - c^2 \nabla^2 \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \nabla c^2 - \nabla F \quad F \equiv c^2 \rho^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = \mathbf{v} \cdot \nabla h, \quad (31)$$

方程式 (A) ~ (D) は、運動方程式に依ることなく成立する。式 (B) および (D) はそれぞれ定義式 (29) および q の定義 (30) から導かれる。また方程式 (A) は定義式 (29) から導かれる恒等式に他ならない。しかし、運動方程式 (28) を使うと、 \mathbf{E} は次のように表せる：

$$\mathbf{E} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \quad (32)$$

これと $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$ であることより、式 (A) は渦度方程式 (c) と同等である。残る式 (C) は、連続の式 (a) を使って得られる。式 (C) も運動方程式 (28) を使うことなく導かれる。

9 音波の方程式 — この理論は音波と電磁波との類似性を明らかにする

音波を考察するために、まず無限の非粘性流体中に局在した流れ場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が形成されていると仮定する。一様静止状態の流体は密度 ρ_0 を有し、音速は $c_0 = [(\partial p / \partial \rho)_s(\rho_0)]^{1/2}$ とする。

9.1 波動方程式

式 (C) の両辺に同じ項 $-c_0^2 \nabla \times \mathbf{B}$ を加え, 時間 t で微分し, 式 (A) より $\partial_t \mathbf{B}$ を消去すると,

$$\partial_t^2 \mathbf{E} + c_0^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{J}'.$$

を得る. ただし, $\mathbf{J}' = \mathbf{J} - (c^2 - c_0^2) \nabla \times \boldsymbol{\omega}$. 左辺第 2 項は, 下記恒等式を使って変換すると, 上式は

$$(\partial_t^2 - c_0^2 \nabla^2)(\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{v}) = -c_0^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \partial_t \mathbf{J}_*, \quad \mathbf{J}_* = \nabla(c_0^2 Q), \quad (33)$$

ただし, $\mathbf{J}_* = \mathbf{J}' - (\partial_t^2 - c_0^2 \nabla^2) \mathbf{v}$, および $Q = (1 - c^2) \nabla \cdot \mathbf{v} - c^2 \rho^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho$, ($\hat{a} = c/c_0$). 式 (29) より, $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{v} = -\nabla h$ である. (33) のすべての項が grad(スカラー関数) の形なので空間的に積分できる. 積分すると, 変数 $\tilde{h} = \tilde{p}/\rho$ に対して, 次の音波の方程式

$$(c_0^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2) \tilde{h} = S(\mathbf{x}, t), \quad S \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} + \partial_t Q, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \nabla^2 (\frac{1}{2} v^2), \quad (34)$$

を得る. ただし, $\tilde{h} = h - h_0$, $\tilde{p} = p - p_0$.

式 (34) の S の第 1 項 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ より, 次の渦音の公式が再び導かれる [23]:

$$\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{r^3} \left(\frac{d}{dt} \right)^3 Q_{ij}(t_r) + \frac{\rho}{6\pi c_0^2} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dt^2} K(t_r), \quad Q_{ij}(t) = \frac{1}{12\pi} \int_{\mathcal{D}} y_i (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t))_j d^3 \mathbf{y}.$$

これは式 (27) の p_F の第 1 項と第 3 項に対応している. 既知の渦音の公式が再現された [38]. この理論は空力音響学を極めて自然に記述することが示された. この方式で粘性効果は難なく組み入れられる.

粘性流体の場合でも, \mathbf{B} および \mathbf{E} の最初の同じ定義を使って, やはりマックスウェル型の 4 つの方程式 (A) ~ (D) が得られる. すなわち, マックスウェル型方程式は変わらない. ただし, 連続の式 (a) は不変であるが, 式 (b) および (c) は次のようになる:

$$\begin{aligned} \partial_t s + \mathbf{v} \cdot \nabla s &= \frac{1}{\rho T} Q, & \partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{R}, \\ Q &\equiv \frac{1}{2} \mu e_{ik} e_{ik} + \zeta \Delta^2, & \mathbf{R} &\equiv \nabla \times \mathbf{P}, & \mathbf{P} &= -\nabla h + T \nabla s + \frac{1}{\rho} \partial_k \sigma_{ik}. \end{aligned}$$

$$\text{恒等式:} \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} + \nabla^2 \mathbf{E}.$$

References

- [1] Hermann Helmholtz 1859, "Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **57**, pp.1-72.
- [2] Lord Rayleigh, 1877, 1896. *Theory of Sound*, Vol. 1 & 2.
- [3] Leonhard Euler, 1727. "Natura et Propagatione Soni". (Translation of Euler's Ph.D in English by Ian Bruce. See "Leonhard Euler" - Wikipedia).
- [4] L. Euler, 1757. "Principes généraux du mouvement des fluides", *MASB*, **11** (1755, printed in 1757), 274-315. Also in *Leonhard Euler Opera omnia*, Ser.2, **12**, 54-91 (Berlin 1757). 英訳: "General laws of the motion of fluids", *Fluid Dynamics*, vol.34, no.6, 801-822 (1999).
- [5] La Grange, 1759. "Recherches sur la nature, et la propagation du son", *Misc. Taur.* **1**.
- [6] I. Newton, 1687. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, (1713 and 1726);
和訳: アイザック・ニュートン, (中野猿人 訳・注). 「プリンシピア」, 講談社 (1977).
- [7] L. Euler, 1759a. "De la propagation du son", *Mem. de l'acad. des sci. de Berlin* **15**, pp.185-209.
- [8] L. Euler, 1759b. "Supplement aux recherches sur" *ibid.*, pp.210-240.
- [9] L. Euler, 1759c. "Continuation des recherches sur" *ibid.*, pp.241-264.
- [10] O. Darrigol, 2005. *Worlds of flow* (A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl), Oxford Univ. Press.
- [11] Poisson, 1820. "Sur l'integration de quelques equations lineaires aux differences partielles, et particulièrement de l'equation generale du mouvement des fluides elastiques", *Mem. de l'Institut*, t. III, p.121.

- [12] V. Strouhal, 1878. "Über eine besondere Art der Tonerregung" *Ann. Phys. Chem. (Wied. Ann. Phys.)* **5**, pp.216-251.
- [13] H. Bénard, 1908. *Compt. Rend.* **147**, 970.
- [14] Lord Rayleigh, 1915. "Aeolian tones", *Phil. Mag. S.6*, **29**, 433.
- [15] E.Y. Yudin, 1944: "On the vortex sound from rotating rods", *Zh. Tekhn. Fiz.* **14** (1944) 561 (*Engl. transl.*: NACA TM 1136 (1947)).
- [16] D.I. Blokhintsev, 1946. "Acoustics of a nonhomogeneous moving medium", Moscow (1946) (*Engl. transl.*: NACA TM 1399 (1956) 1-194).
- [17] James Lighthill, 1952. "On sound generated aerodynamically", *Proc. R. Soc. Lond. A* **211**, pp.564-587.
- [18] A. Powell, 1964. "Theory of vortex sound", *J. Acoust. Soc. Am.* **36**, pp.177-195.
- [19] F. Obermeier, 1967. "Berechnung aerodynamisch erzeugter Schallfelder mittels der Methode der Matched Asymptotic Expansions", *Acustica* **18**, pp.238-240.
- [20] T. Poinsoot and S.K. Lele, 1992. "Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows", *J. Comp. Phys.* **101** (1992), pp.104-129.
- [21] M. Howe, 1975. "Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute", *J. Fluid Mech.* **71**, pp.625-673.
- [22] W. Möhring, 1978. "On vortex sound at low Mach number", *J. Fluid Mech.* **85**, pp.685-691.
- [23] T. Kambe and T. Minota, 1983. "Acoustic wave radiated by head-on collision of two vortex rings", *Proc. R. Soc. Lond. A* **386**, pp.277-308.
- [24] T. Kambe and T. Minota, 1981. "Sound radiation from vortex systems", *J. Sound & Vib.* **74**, 61- 72.
- [25] T. Kambe, 1986. "Acoustic emission by vortex motions", *J. Fluid Mech.* **173** (1986), 643-666.
- [26] T. Kambe, T. Minota and M. Takaoka 1983. "Oblique collision of two vortex rings and its acoustic emission", *Phys. Rev. E* **48**, pp.1866-1881.
- [27] K. Ishii, S. Adachi and T. Kambe, 1998. "Sound generation in oblique collision of two vortex rings", *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, pp.2306-2314.
- [28] O. Inoue, Y. Hattori and Sasaki, 2000. "Sound generation by coaxial collision of two vortex rings", *J. Fluid Mech.* **424**, pp. 327-365.
- [29] Y. Nakashima, N. Hatakeyama and O. Inoue, 2007. "Three-dimensional DNS of sound generation by oblique collision of vortex rings", *AIAA-paper*, 2007-3502.
- [30] Y. Nakashima, 2008. "Sound generation by head-on and oblique collisions of two vortex rings", *Phys. Fluids* **20**, 056102.
- [31] A. Powell, 1951. "A schlieren study of small scale air jets and some noise measurements on two-inch diameter air jets", *Aero. Res. Co. (UK)*, ARC Paper 14726.
- [32] T. Kambe, T. Minota and Y. Ikushima, 1985. "Acoustic wave emitted by a vortex ring passing near the edge of a half-plane", *J. Fluid Mech.* **155**, pp.77-103.
- [33] T. Minota, and T. Kambe, 1986. "Observation of acoustic emission from head-on collision of two vortex rings", *J. Sound & Vib.* **111**, pp.51-59.
- [34] T. Minota and T. Kambe, 1987. "Acoustic waves emitted by a vortex ring passing near a circular cylinder", *J. Sound & Vib.* **119**, pp.509-528.
- [35] T. Minota, T. Kambe and T. Murakami, 1988. "Acoustic emission from interaction of a vortex with a sphere", *Fluid Dyn. Res.* **3**, pp.357-362.
- [36] T. Minota, T. Murakami and T. Kambe, 1988. "Acoustic waves emitted by a vortex ring passing near a wedge-like plate", *Fluid Dyn. Res.* **4**, pp.57-71.
- [37] T. Kambe, 2008. "Variational formulation of ideal fluid flows according to gauge principle", *Fluid Dyn. Res.* **40**, 399-426.
- [38] T. Kambe, 1984. "Influence of viscosity on the aerodynamic sound emission in free space" *J. Sound & Vibration* **95**, 351-360.
- [39] T. Kambe, 2009. "Vortex sound with special reference to vortex rings: theory, computer simulations, and experiments", *Intern'l J. of Aeroacoustics* (to be published in 2009).