

木琴の時間領域数値解析手法の検討

Euler-Bernoulli 梁モデルから Mindlin 平板モデル

Consideration of Finite-difference Time-domain Method for Vibration of Xylophone
From Euler-Bernoulli Beam Theory to Mindlin Plate Model

鶴秀生 (日東紡音響エンジニアリング)

TSURU, Hideo (Nittobo Acoustic Engineering Co. Ltd.)

ABSTRACT: A xylophone is an elastic material which has a non-uniform cross section. The basic physical model of the vibration of the xylophone is constructed by the Euler-Bernoulli beam theory. However, in that theory the shear deformation is not taken into account. Thus, the dispersion relation deviates from the actual value when the wavelength becomes short compared to the thickness of the beam. A improved dynamical equation of the xylophone is considered by using Timoshenko beam theory or Mindlin plate theory. Vibrational motions of the elastic bar are simulated numerically through a finite difference method. Since the order of the spatial differentiation in the coupled partial differential equations is larger than that of the time differentiation, an implicit method is used to stabilize its numerical behaviour. The simulation can predict temporal behaviours of the vibration which are influenced by the changes of the shape and the position of the impact point. It is concluded that the damping effects are important to reproduce a realistic sound.

1 はじめに

近年、楽器の物理モデルを構築して、その数値モデルを考えて固体の振動や空気の流れなどを直接数値解析することで、その楽器の発生する音を予測できるようになった¹⁾。今回は対象として木琴に代表される、撥でたたいて音を出す打楽器を取り扱い、数値解析手法としては時間領域有限差分法を適用した。

木琴は細長い構造をしているので基礎方程式を考える場合、計算量の観点から3次元モデルを直接適用するのではなく、1次元モデルや2次元モデルを適用して問題の解析を行うことが効率的である。1次元モデルとしては Euler-Bernoulli 梁理論をもとにしたものがあるが、その場合は剪断変形の影響を考慮しないので、波長が短くなるに従って横波の伝搬速度が速くなり現実のものと乖離してくる。剪断変形の影響を考慮できる1次元モデルとしては Timoshenko 梁理論がある。そこで横波の伝搬速度について Timoshenko 梁理論と Euler-Bernoulli 梁理論の比較を行った。また剪断変形の影響を考慮できる2次元モデルとして Mindlin 平板理論があり1次元モデルと2次元モデルから得られる結果の比較を行った。

梁や平板の曲げ波を時間領域で解析する場合は、系の運動を記述する偏微分方程式内の空間微分の次数が時間微分の次数より高くなる。その場合、時間積分を行うときに数値的な安定性に気をつける必要がある。そこで Implicit な積分法を適用することで安定化を確保した。

より現実の木琴に近い物理モデルを構築するために、粘弾性等の減衰や支持ばねの影響を考慮した。実際、振動の時間波形を用いて現実的な音を再現するには、減衰の効果は重要である。それらの影響について数値的に確認した。

2 1次元モデル理論

最初に1次元モデルによる木琴の振動解析について考えることにする^{2,3)}。高次の振動モードの周波数が基音の整数倍に近くなるように、またそのエネルギー比を制御するために、木琴は軸方向の中央部が薄くなる形状となっている。従って断面積が軸方向に一様でない構造をしている。そのことの影響を考慮できるように厚みを軸方向の関数として表現した。また木琴をたたく位置が中心軸上からずれることによって、ねじれ振動も励起されることが考えられるので、曲げ振動とねじれ振動のモード両方の影響を取り扱えるようにした。曲げ振動において剪断変形の影響も考慮できるように Timoshenko 理論を応用して基礎方程式を導いた^{4,5)}。質量密度 ρ 、断面積 A 、ヤング率 E 、剛性率 G の木琴の振動を記述する微分方程式を考えることにした。木琴の長さ方向を x 軸とした。曲げの水平方向を y 軸、鉛直方向を z 軸として、それぞれの方向に対する曲げ振動における変位を v 、 w とした。

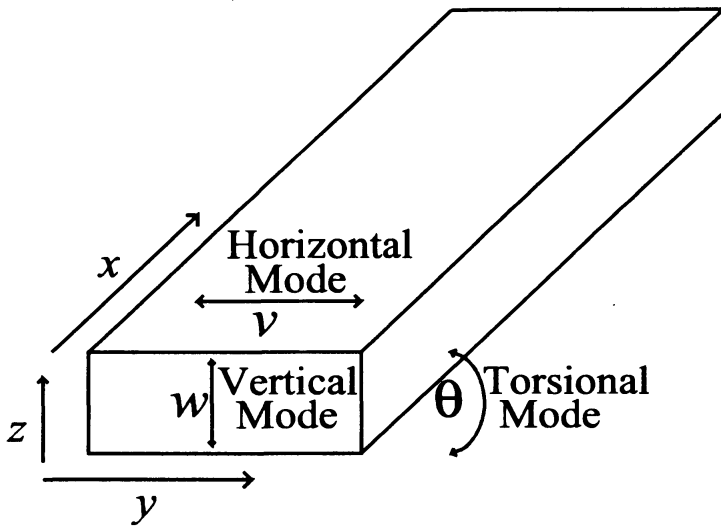


Fig.1 One dimension model

また Timoshenko 梁理論で現れる各方向まわりの回転角を ϕ_y 、 ϕ_z とし、それに対応する Timoshenko 係数を κ_y 、 κ_z とした。木琴などは断面が矩形なので、Timoshenko 係数は 0.833 を用いることにした。ねじれ振動の変数は θ とした。その他形状に関するパラメータは断面 2 次モーメント I_y 、 I_z とねじれ定数 J と剪断中心の重心に対する位置を y_s 、 z_s で表すことにした。そうすると、時間発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-AG\kappa_y \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi_y \right) \right] + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial t} - q_y + \rho A z_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = f_y, \quad (1)$$

$$AG\kappa_y(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi_y) + \frac{\partial}{\partial y}[EI_y(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial \phi_y}{\partial y}] = \rho I_y \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[-AG\kappa_z(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_z)] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho A \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial t} - q_z - \rho A y_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = f_z, \quad (3)$$

$$AG\kappa_z(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_z) + \frac{\partial}{\partial x}[EI_z(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial \phi_z}{\partial x}] = \rho I_z \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2}. \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(GJ(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial \theta}{\partial x}) + m_t + m_{st} - \rho I_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \rho I_s \gamma_3 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho A z_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho A y_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

となる。方程式中の η と γ_* は粘弾性と流体力学的減衰に関する係数である。また q_y 、 q_z を (1) (2) の式は水平方向の振動モード、(3)(4) の式は垂直方向の振動モード、(5) の式がねじれ振動モードの方程式になっている。剪断中心の位置が重心とずれる場合は各モードが連成することになる。これらの連立微分方程式を数値的に解くことで振動の挙動を求めることにした。Timoshenko 理論において Timoshenko 係数を無限大の極限に持っていくと剪断変形の影響が無視できる。また慣性モーメントを 0 にすると回転慣性を無視することができる。これらの二つの操作を施すと Euler-Bernoulli 梁理論に帰着する。

木琴の振動の場合は自由端境界条件となる。その場合、曲げ振動モードに関して、曲げモーメント力 M と剪断力 V が

$$M = 0, \quad V = 0. \quad (6)$$

となる。これを v や ϕ_y で表現すると

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \phi_y = 0. \quad (7)$$

となる。これらを満たすように振動の時間発展を追いかける必要がある。

最初に梁の曲げ振動について Timoshenko 梁理論と、Euler-Bernoulli 梁理論による波動伝搬速度の比較を行った。Timoshenko 梁理論における角振動数 ω と波数 k は

$$\omega^2 = \frac{GA\kappa}{2\rho I} \left[1 + \frac{Ik^2}{A} \left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) - \sqrt{\left[1 + \frac{Ik^2}{A} \left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \right]^2 - 4 \frac{EI^2 k^4}{GA^2 \kappa}} \right]. \quad (8)$$

の関係になる。一方 Euler-Bernoulli 梁における角振動数 ω と波数 k の関係は

$$\omega^2 = \frac{EI}{\rho A} k^4 \quad (9)$$

となる。これを用いて波数と位相速度の関係を比較して Fig.2 に図示する。

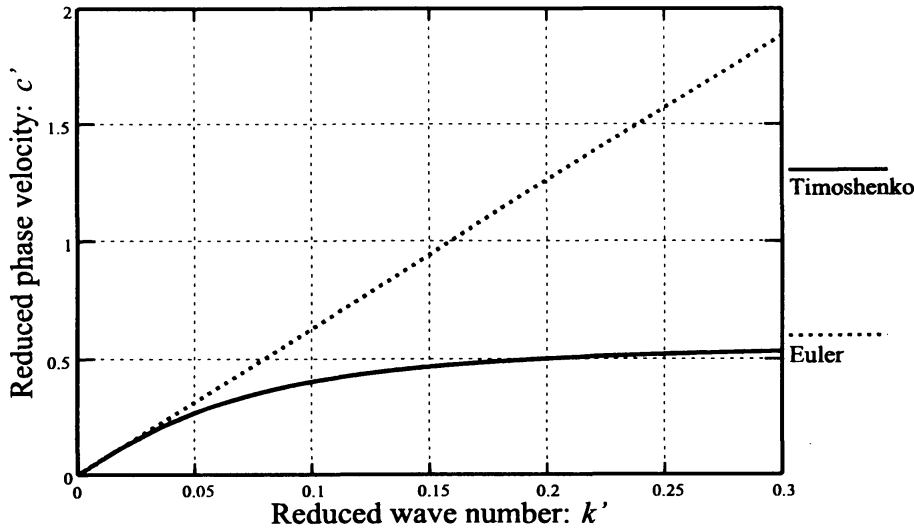


Fig.2 Dispersion Relation

ここで k' , c' は規格化された波数と位相速度

$$k' = \frac{rk}{2\pi}, \quad c' = \frac{c}{\sqrt{E/\rho}}, \quad r \text{ は断面 2 次半径} \quad (10)$$

である。短波長でモデルによる違いが大きくなるのがわかる。

次に太さや厚みが一樣な有限長 L の自由端の梁の曲げ振動の固有振動数の比較を行う。Timoshenko 梁の場合は補助的な変数 μ を以下のように導入する。

$$\mu^2 = k^2 - \frac{\rho}{E} \left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right) \omega^2. \quad (11)$$

そうすると、長さ L の梁が自明でない解を持つ条件は

$$\frac{2(-G\kappa\mu^2 + \rho\omega^2)}{k} - \frac{2(-G\kappa k^2 + \rho\omega^2)}{k} \cos(kL) \cosh(\mu L) - \frac{\mu^2(G\kappa\mu^2 + \rho\omega^2)^2 - k^2(-G\kappa k^2 + \rho\omega^2)^2}{(G\kappa k^2 + \rho\omega^2)\mu k^2} \sin(kL) \sinh(\mu L) = 0. \quad (12)$$

で表現される。 μ を消去することで固有周波数を得ることができる。一方 Euler-Bernoulli 理論によると固有周波数は

$$\tan\left(\frac{\omega L}{2u}\right) = \pm \tanh\left(\frac{\omega L}{2u}\right), \quad (13)$$

を満たす ω を探すことで求められる。ここで

$$u = \sqrt{\omega h \sqrt{\frac{E}{12\rho}}}. \quad (14)$$

である。Table 1 に質量密度 $1000(\text{kg}/\text{m}^3)$ 、ヤング率 $2.0 \times 10^{10}(\text{Pa})$ 、Poisson 比 0.25 の素材で構成された長さ 200mm で厚み 15mm の梁の固有周波数の理論値の比較を示した。

Table 1. Comparison of characteristic frequencies of the beam models.

| | Euler-Bernoulli | Timoshenko |
|--------|-----------------|------------|
| First | 1724(Hz) | 1689(Hz) |
| Second | 4752(Hz) | 4503(Hz) |
| Third | 9316(Hz) | 8439(Hz) |

高次モードで周波数の違いが大きくなることがわかる。

次に差分法を用いた数値モデルについて考えることにする。曲げ振動に関するの偏微分方程式は実質的には、空間微分が4階で時間微分が2階となる。そういった場合、差分法において時間積分を行うとき、安定性の確保が必要になる。そのために時間積分に陰解法を適用した。時間積分に対して陰解法を用いた差分法は、以下に示す手順で実施した。最初に(1)-(5)式の連立偏微分方程式系を空間微分のみを含む項 L 、時間の1階微分と空間微分を含む項 D 、時間微分のみを含む項 A に分解する。

$$L(\phi_y, v, \phi_z, w, \theta; t) + D(\phi_y, v, \phi_z, w, \theta; t) = A(\phi_y, v, \phi_z, w, \theta; t) \quad (15)$$

その後、空間微分の項 L 等を更新後の時刻 $t + \Delta t$ のときの値も用い差分化する。時刻 t のときの値をタイムステップ n の添え字を用いて表現して、同様に時刻 $t \pm \Delta t$ についても添え字 $n \pm 1$ で表現する。引き数を省略して各タイムステップの値を L^n, D^n 等で表現する。Implicit な積分を実施するように、パラメータ α を導入して、(15) 式の連立偏微分方程式を

$$\alpha L^{n+1} + (1 - 2\alpha)L^n + \alpha L^{n-1} + D^n = A^n \quad (16)$$

という形で差分化を行うことにする。なお α は 0 以上 0.5 以下の定数で 0 の時は陽解法に帰着する。(16) 式において、時間微分を含む項は差分化するときタイムステップ $n+1$ の値を用いることになる。同様に空間差分の項もタイムステップ $n+1$ の値を用いて差分値を評価することになる。従って未知量を用いて空間差分値を評価する必要がある。その手法を用いるとパラメータ $\alpha \geq 0.25$ で安定になることを示すことができる。このように、未知量を用いて空間差分値を計算ながら系の時間発展を予測するには、疎行列係数を持つ連立1次方程式を解く必要がある。今回のケースである1次元系においては、係数行列が帯行列となるので、連立1次方程式は直接法を用いて解いた。

3 Mindlin 平板モデル

次に2次元モデルである Mindlin 平板理論を応用して木琴の振動の定式化を行う⁵⁾。Mindlin 平板モデルにおいて、Fig.3 に示すように微小要素 $dx \times dy$ に対して加わる一般化応力として、モーメント力 M_x, M_y, M_{xy} と剪断力 Q_x, Q_y を考える。

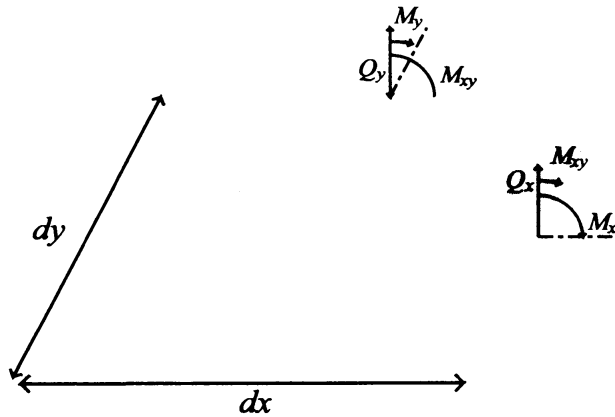


Fig.3 Moment force and shear force

この一般化応力は厚さ h の板において、3次元弾性体理論で用いられる応力テンソル τ_{ij} を面の厚み方向 (z 方向) に以下のように積分することで得られる。

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) z dz \quad (17)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad (18)$$

これら一般化応力に対する応答としての変位は、面に垂直な方向の変位 w と回転角 ψ_x, ψ_y を用いて表現することができる。なお回転角 ψ_* の定義は流儀によって符号が逆の場合があるので注意が必要である。一般化応力と変位を結びつける弾性定数である剛性率 G と板の曲げ弾性定数 D は、板の厚さを h としたとき、ヤング率 E とポワソン比 ν を用いて、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (19)$$

で表現される。厚さ h で密度 ρ の板面に垂直な方向の振動の時間発展方程式は、減衰パラメータ η を導入して変数 $\tilde{\psi}_x = \psi_x + \eta\dot{\psi}_x$ と $\tilde{\psi}_y = \psi_y + \eta\dot{\psi}_y$ を定義すると

$$\begin{aligned} \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi}_x &= \frac{\partial}{\partial x} [D \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_x + \nu D \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}_y] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} [D \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_y + D \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}_x] \\ &\quad - \kappa Gh [(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) + \eta(\dot{\psi}_x + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})] + M_{xe}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\psi}_y &= \frac{\partial}{\partial y} [D \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}_y + \nu D \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_x] + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} [D \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_y + D \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}_x] \\ &\quad - \kappa Gh [(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) + \eta(\dot{\psi}_y + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y})] + M_{ye}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} &= \frac{\partial h G}{\partial x} \kappa [(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) + \eta(\dot{\psi}_x + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})] + \kappa Gh \frac{\partial}{\partial x} [(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) + \eta(\dot{\psi}_x + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x})] \\ &+ \frac{\partial h G}{\partial y} \kappa [(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) + \eta(\dot{\psi}_y + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y})] + \kappa Gh \frac{\partial}{\partial y} [(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) + \eta(\dot{\psi}_y + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y})] - \rho h \gamma_m \dot{w} + f_z \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで κ は剪断係数で f_z, M_{xe}, M_{ye} は面に垂直な外力とそれぞれの方向に対する外部から加えられたモーメント力である。また流体力学的減衰係数 γ_{in} も導入した。なお、剪断係数について理論的な考察を行うとポワソン比 ν の間に

$$\kappa = \left(\frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \right)^2 \quad (23)$$

の関係が示される。

次に2次元モデルの境界条件について考えてみる。板周囲の辺に対する法線ベクトルを \mathbf{n} で定義して自由端境界条件を考慮すると

$$n_x M_x + n_y M_y = 0, \quad M_{xy} = 0, \quad n_x Q_x + n_y Q_y = 0 \quad (24)$$

の関係を満たすことがわかる。これらの方程式は

$$n_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + n_y \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = 0, \quad n_x \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + n_y \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (26)$$

の形に変形される。このように2次元の板構造モデルに対するの境界条件が連立微分方程式となるため、自由端境界の場合には固有振動解析は数値的にしか求まらない。またこのことが数値計算の収束性にも影響を与える。

平板モデルでの曲げ振動の数値解析においても1次元モデルの時と同様に差分法を用いて時間領域数値計算を行うときは、時間積分の安定化が重要になる。従って、時間発展方程式を差分化したときに実行する時間積分に関して Implicit な解法の適用が必要になる。2次元モデルの場合は、Implicit な数値積分で現れる連立1次方程式の係数行列が帯行列にならないので、反復解法を用いて解を求めることにした。

4 衝撃加振力の与え方

木琴の演奏においては、撥の打撃によって木琴に衝撃加振力を与える。そこで Hertz の固体接触理論⁶⁾を用いた衝撃加振力の予測手法について説明を行う。ヤング率 E_0 、ポアソン比 ν_0 の木琴にヤング率 E_1 、ポアソン比 ν_1 の半径 R の撥の先端が衝突する状況を考える。最初に補助的な量 C を定義する。

$$C = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_0^2}{E_0} + \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \right) \quad (27)$$

Hertz の固体接触理論を用いると時刻 t で働く力を $F(t)$ とすれば、接触域の半径 $a(t)$ は

$$a(t) = F(t)^{1/3} (CR)^{1/3} \quad (28)$$

となり、変形により撥の先端が沈み込んだ距離 $d(t)$ は

$$d(t) = F(t)^{2/3} \left(\frac{C^2}{R} \right)^{1/3} \quad (29)$$

となることが示される。二つの物体のそれぞれの質量 m_0, m_1 から求められる換算質量 m_r

$$m_r = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \quad (30)$$

と力 $F(t)$ を用いて、木琴と撥の先端部の相対加速度を求めることができる。 $F(t)/m_r$ で計算される相対加速度の2階積分を行うことで、距離 $d(t)$ の時刻歴を求めることができる。木琴への加振力の時刻歴はその $d(t)$ を式 (29) に代入することにより計算できる。木琴と撥の先端が接触している時間 τ は

$$g = \frac{4}{5C} \sqrt{R} \quad (31)$$

を定義して、初速度 v_i を用いることで

$$\tau = \frac{4\sqrt{\pi}\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)} \left(\frac{m_r^2}{g^2 v_i}\right)^{1/5} \approx 2.94 \left(\frac{m_r^2}{g^2 v_i}\right)^{1/5} \quad (32)$$

によって計算できることが解析的に示される⁶⁾。よって、接触時間は初速度の1/5乗に反比例することがわかる。この理論的考察においては撥や木琴の動的な振動の性質を無視しているが、比較的实验と対応がよいことが知られている。

実際に撥の先端部が衝突したときの加振力の時刻歴の計算値を Fig.4 に示す。木琴のヤング率は 2×10^{10} (Pa) とし、撥に比べて質量は十分に大きいとした。ここで撥の半径は 10mm、質量は 5(g) とした。ヤング率を変化させた場合は、衝突時の初速を 1(m/s) としてヤング率を 5×10^9 から 3×10^{10} (Pa) の間を変化させた。また衝突時の初速を変化させたときは、撥のヤング率を 2×10^{10} (Pa) を仮定して衝突時の初速を 0.5 から 3(m/s) の間を変化させた。

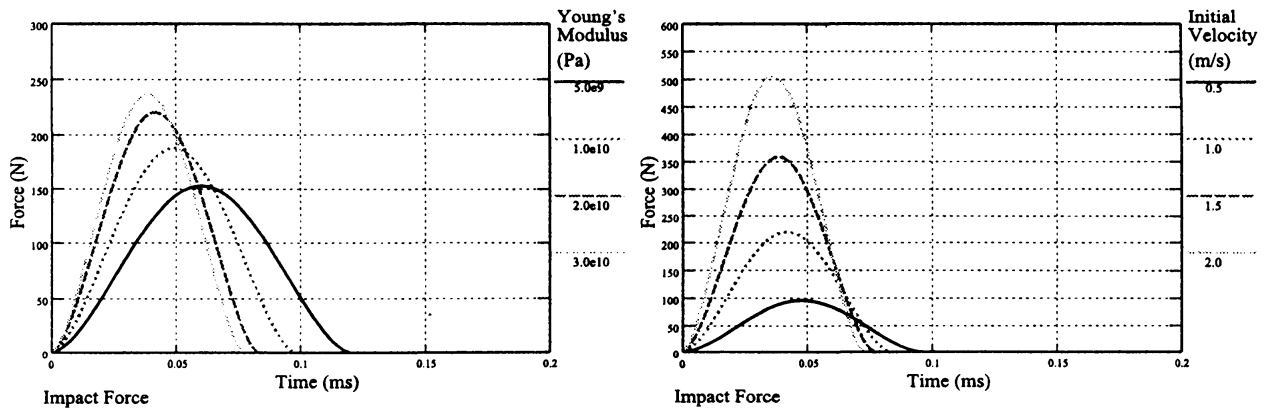


Fig.4 Impact force for various Young's modulus and initial velocities. The left figure stands for various Young's modulus and the right, for various initial velocities.

ヤング率が増えることで衝撃力の最大値や接触時間が変化することがわかる。同様に、初速が増えることで衝撃力の最大値や接触時間が大きく変化することがわかる。

5 計算モデルの比較

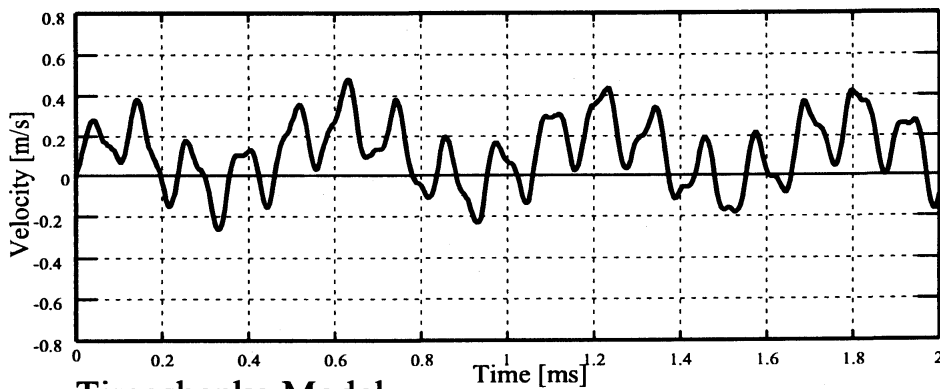
計算手法の妥当性の検討のため、自由端をもつ一様な断面の梁振動について Timoshenko 梁理論による計算と Mindlin 平板理論による計算の比較を行った。そのとき用いたモデル

のパラメータを Table 2 に示した。

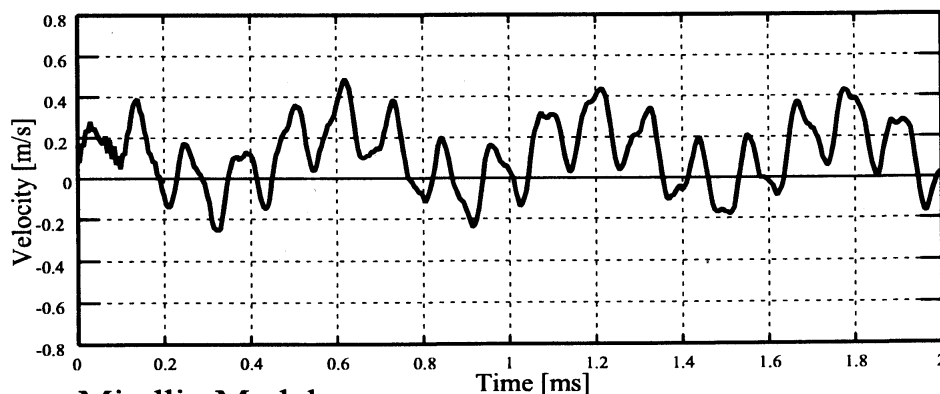
Table 2. Model parameter

| | |
|----------------------|---------------------------|
| Length | 200mm |
| Width | 30mm |
| Thickness | 15mm |
| Mass density | 1000.0kg/m ³ |
| Young's modulus | 2.0×10 ¹⁰ (Pa) |
| Poisson's ratio | 0.25 |
| $\Delta x, \Delta y$ | 1mm |
| Δt | 5 μ s |
| Initial velocity | 1m/s |

支持体のばね定数と減衰係数を 0 とし、加振点は中央と中央から 5mm 側方にずれた点と中央から 50mm 長手方向にずれた点の 3 点のいずれかとした。法線方向振動速度の時刻歴の比較を行った。Fig.5 に加振点が中央で評価点が中心軸上の際の法線方向振動速度の時間波形を示した。上のグラフが Timoshenko モデルによるもので下のグラフが Mindlin モデルによるものである。



Timoshenko Model



Mindlin Model

Vibrational velocity, Impact position (0.1, 0.0)m

Fig.5. Comparison of temporal waveforms of out-of-plane vibration. The top stands for Timoshenko model and the bottom, Mindlin model. The evaluation point is on the central line.

加振時に Mindlin モデルで観測される高周波の小さな変動を除き、双方の時刻歴波形は良好な一致を示している。実際、Fig.6 に示された Mindlin モデルで振動計算した場合の変位分布の時刻歴をみると、軸に垂直な方向に関しては、打撃時刻の直後を除き一様であることが観測された。

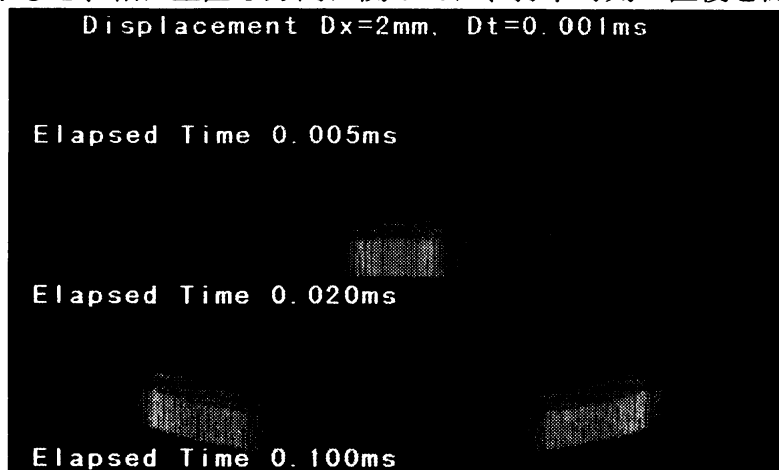
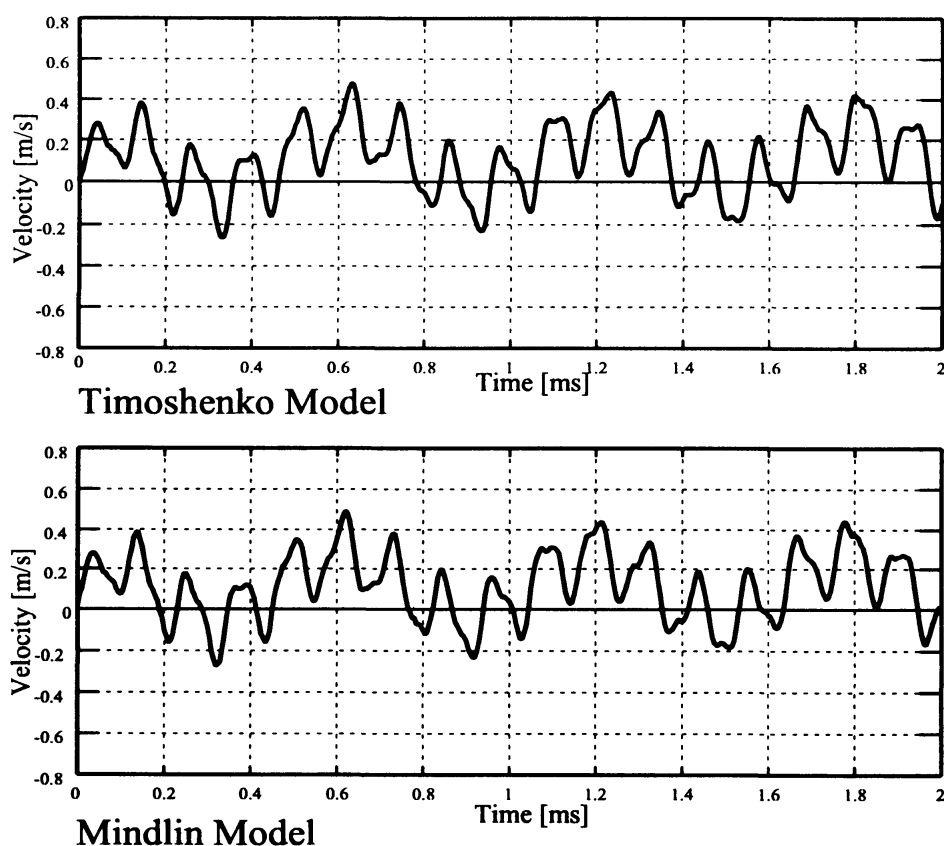


Fig.6. Spatial distribution of vibrational displacement of the impacted bar predicted by the Mindlin model.

次に評価点が中心軸から側方に 5mm ずれた場合の結果を同様に Fig.7 に示した。



Vibrational velocity, Impact position (0.1, 0.0)m

Fig.7. Comparison of temporal waveforms of out-of-plane vibration. The evaluation point is laterally shifted by 5mm from the central line.

異なる評価点においても結果は良好な一致を示している。次に評価点と加振点がともに中心軸から側方に5mmずれた場合の結果を Fig.8 に示した。

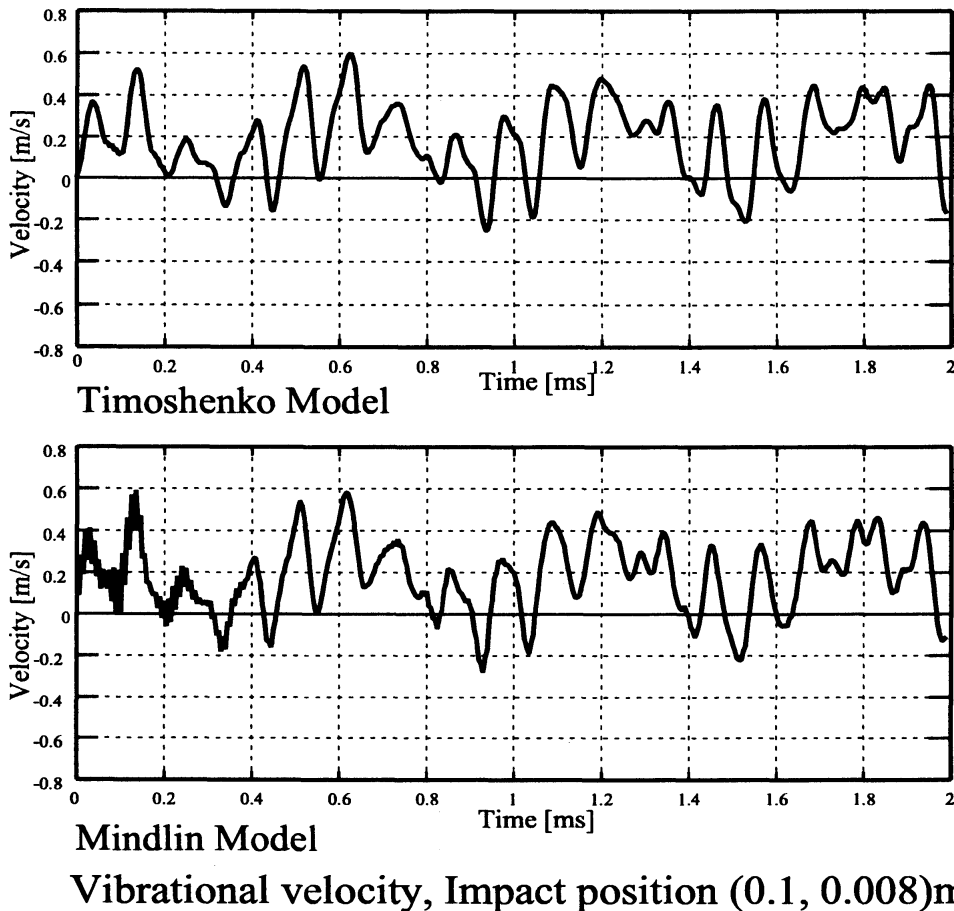


Fig.8. Comparison of temporal waveforms of out-of-plane vibration. The evaluation point and the impact position are laterally shifted by 5mm from the central line.

加振点が中心軸からずれているため、ねじれ振動も励起するので、計算モデルによる違いが大きいと予測されたが、この場合も比較的良好的な一致が見られる。このようにねじれ振動も考慮した Timoshenko 梁理論を応用した 1次元モデルは、木琴のような縦長の構造物の振動予測にはかなり適していることがわかる。一方、計算時間を比較したところ、2次元モデルの場合は連立1次方程式の解を求めるときに反復法による収束計算を行う必要もあるので、1次元モデルの約2000倍近く時間がかかった。したがって木琴のような細長い構造物の場合は、Timoshenko 梁理論を基礎としたモデルで十分精度良く、効率的に解析できることがわかる。

6 減衰や断面積が一様でない影響

次に粘弾性や流体力学的減衰や断面積が軸方向の関数として変化する影響を Timoshenko 梁理論を用いて数値計算によって検討した。木琴の実際の状況に近づけるため、梁構造を支持するばね定数の影響も取り入れた。最初に減衰の影響を考慮するために、粘弾性によ

る減衰係数 η と流体力学的減衰係数 γ を変化させて数値計算を行った。減衰係数として $\eta = 0, 1.0 \times 10^{-7}(\text{s})$ と $\gamma = 0.50(\text{s}^{-1})$ の値を用いて比較計算を行った。計算条件は前節とほぼ同一で、長さ 200mm、幅 30mm、厚さ 15mm の木琴に撥が衝突することによって励起される振動の予測を行った。それぞれの設定条件に対して数値シミュレーションで得られた法線方向振動速度の時刻歴を Fig.9 に示した。減衰の様子が粘弾性や流体力学的な減衰係数によって変化することが予測できた。

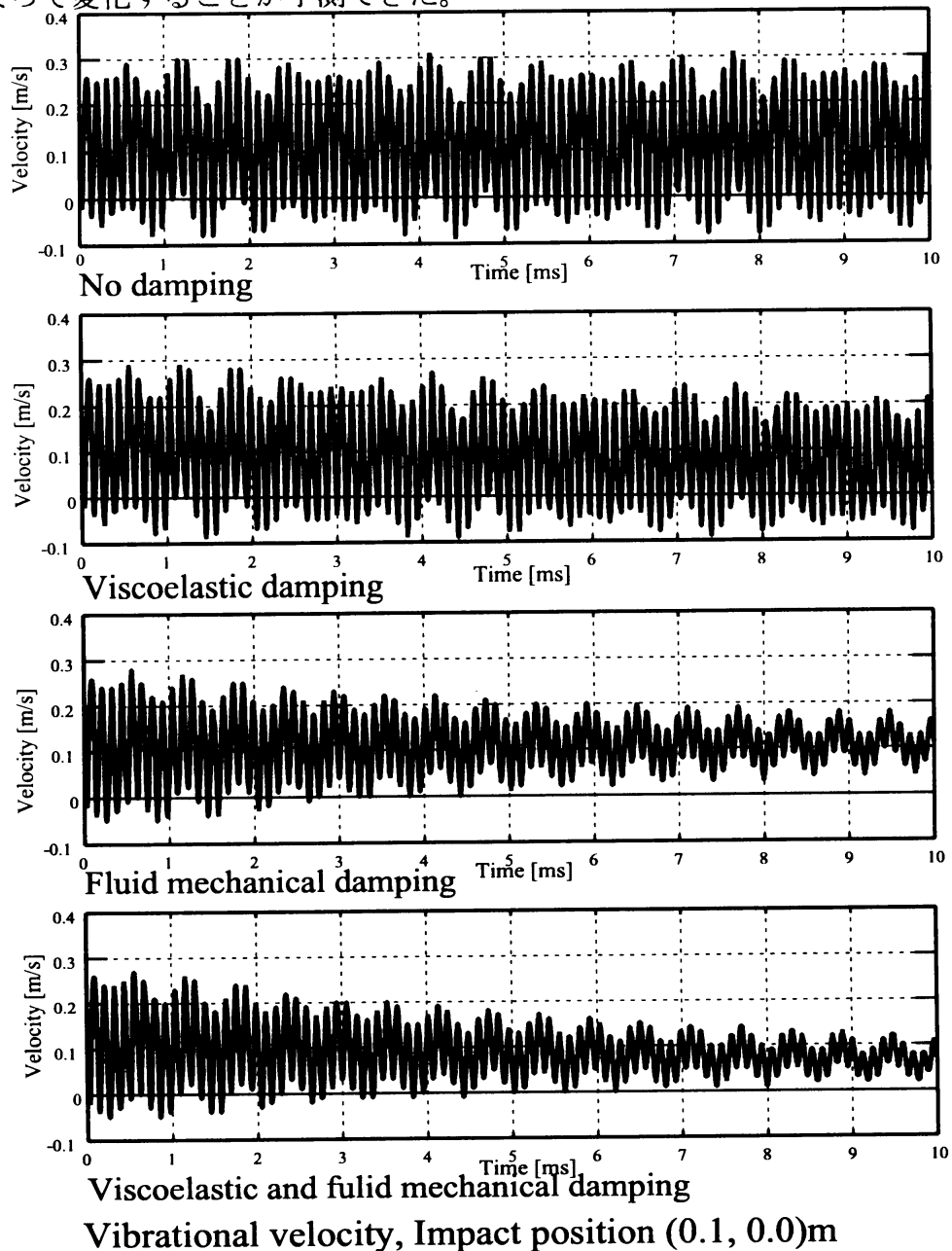


Fig.9. Comparison of damping effect by temporal waveforms of out-of-plane vibration.
次に断面積が一樣でない形状の影響について数値的な検討を試みた。

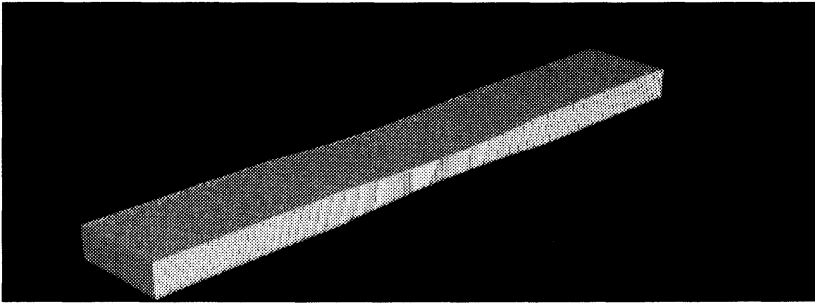


Fig.10. The model of non-uniform cross section.

木琴は Fig.10 に示すように中央部の厚みを薄くすることで、倍音構造を変化させ音色を調整する。そこで長さ 200mm で幅 30mm で厚みが 15mm で一様な形状と中央部が 7mm ほど薄くなるようにした形状の比較を行った。減衰係数として $\eta = 1.0 \times 10^{-7}(\text{s})$ と $\gamma = 50(\text{s}^{-1})$ の値を用いた。また木琴を保持するために、両端から 10mm のところに 1000N/m のばね定数で支持条件を設定した。中央を衝撃加振したときの (0.15, 0.0)m 点での法線方向振動速度の時刻歴を Fig.11 に示す。

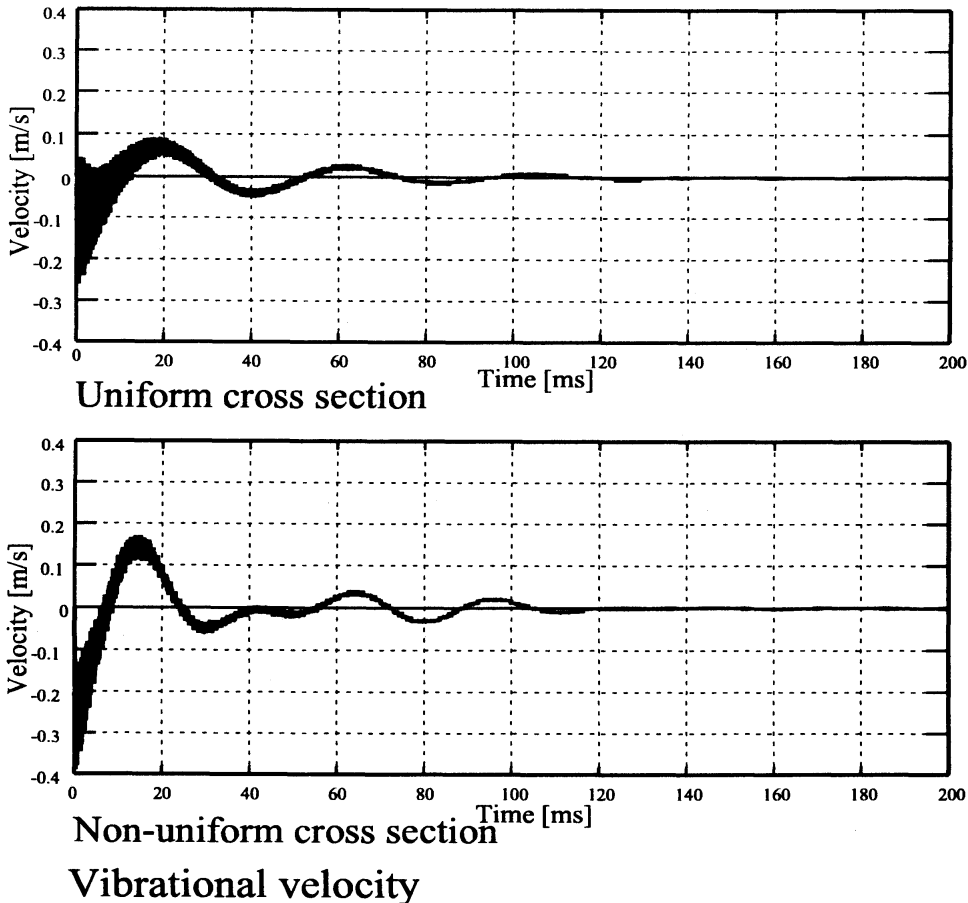


Fig.11. Temporal waveforms of out-of-plane vibration of the uniform beam (top) and the non-uniform beam (bottom).

上のグラフが一様な断面積で、下のグラフが 7mm ほど中央部を薄くしたものに对应する。振動の時間的構造が違ってくる。また低周波の変動は支持ばねの影響による固有振

動数に対応している。この計算結果の周波数スペクトルを Fig.12 に示す。

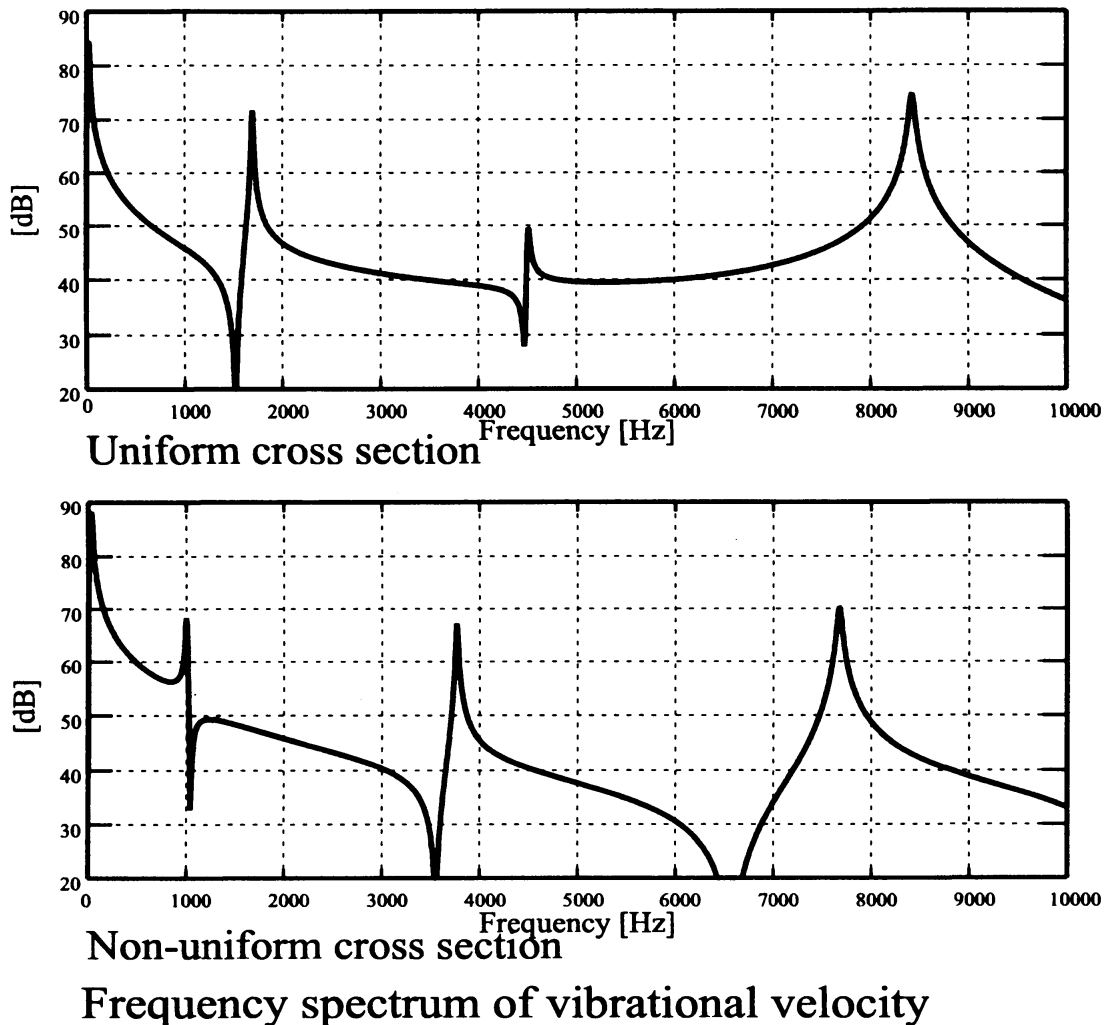


Fig.12. Power spectrums of out-of-plane vibration of the uniform beam (top) and the non-uniform beam (bottom).

断面積が一様な場合は、Table 1 で示された固有周波数と一致することがわかる。中央部を薄くしたものは、固有周波数が低くなるように変化することが予測できた。またそのことの結果、厚みの分布を調整することで楽器の倍音構造を変化させることができることを示した。

7 まとめ

数学者である Euler や Bernoulli が弾性棒の変形や振動理論を定式化した。その後に固体力学の大家 Timoshenko が剪断変形の影響も考慮できるような梁理論を提唱し、多くの振動解析に適用され精度良い解析が実現されてきた。今回は Timoshenko 梁理論と Mindlin 平板理論をもとに木琴のように断面積が一様でない細長い物体の振動の定式化を行った。定式化において捩れ振動モードや減衰の影響や支持ばねの影響等も考慮できるようにし

た。数値計算により両者のモデルの比較を行い良好な一致を見た。厚みが一様でない場合の固有周波数の変化の予測できた。今後の大きな課題は、表面の振動速度分布を境界条件として与えて、境界積分を用いることで実際に空気中で観測される音の予測することである。この課題の実現のために、効率的なアルゴリズムやデータ構造の考案中である。

参考文献

- [1] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical instruments, 2nd Edition*. Springer-Verlag (1998) NewYork.
- [2] F. Orduña-Bustamante, "Nonuniform beams with harmonically related overtones for use in percussion instruments." *J. Acoust. Soc. Am.* 90 (1991) pp. 2935-2941
- [3] A. Chaigne and V. Doutaut, "Numerical simulation of xylophones. I. Time-domain modeling of vibrating bars." *J. Acoust. Soc. Am.* 101 (1997) pp. 539-557
- [4] 近藤恭平, **振動論**, 培風館 (2002) 東京
- [5] Karl F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solid*. Dover (1991) NewYork.
- [6] L.D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity, 3rd Edition*. Butterworth-Heinemann (1999) Oxford.