

BURGERS 渦の安定性に関する数学解析

前川泰則 (神戸大学) [Yasunori Maekawa (Kobe University)]

Thierry Gallay (Institut Fourier, Université Grenoble I)

1. INTRODUCTION

Burgers 渦は 3 次元 Navier-Stokes 方程式に対するある定常解であり、渦度場の伸張効果と粘性による拡散効果という二つの基本的なメカニズムの釣り合いを端的に表している渦度場である。また、Burgers 渦は乱流において観察される渦管構造の簡単なモデルとして知られている [23, 12]。渦管は乱流における基本的な構造の一つと考えられるため、単純化されたモデルであるとはいえ、Burgers 渦は重要な研究対象として、具体的な関数で表示される軸対称な場合 [13, 18, 21, 3, 22] から非軸対称に一般化された場合 [20, 14, 4, 19] にいたるまで、これまで主に物理サイドから詳細に研究されてきた。一方、数学的な研究については、2次元安定性に関する [11] や [2, 10] などの先駆的な研究があったものの、Navier-Stokes 方程式に関連した他の数学的研究と比べるとむしろ少ない状況であった。しかしながら、[7] による大域的な 2次元漸近安定性の研究をはじめ、最近 Burgers 渦の研究において数学的にも多くの進展が得られるようになった [8, 9, 15, 16, 17, 5]。そこで本稿では、軸対称 Burgers 渦の安定性に話題を絞り、これまで数学的に得られている結果とその概略について述べたい。

2. FORMULATION

時間変数を t 、空間変数を $x = (x_1, x_2, x_3)$ 、流体の速度場及び圧力場をそれぞれ $V = V(x, t) \in \mathbb{R}^3$ 、 $P = P(x, t) \in \mathbb{R}$ としたとき、3次元 Navier-Stokes 方程式は

$$(2.1) \quad \partial_t V - \nu \Delta V + (V, \nabla) V + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0, \quad \nabla \cdot V = 0,$$

と表される。ここで $\nu > 0$ は動粘性係数、 ρ は密度 (定数)、 $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$ 、 $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})^\top$ である。渦管を表現するために、速度場 V に対して次のような仮定をおく。

$$(2.2) \quad V = V^s + U.$$

ここで V^s は下の (2.3) で与えられた軸対称 straining flow、 U はその摂動流 (未知関数) である。

$$(2.3) \quad V^s(x) = \gamma \left(-\frac{x_1}{2}, -\frac{x_2}{2}, x_3 \right)^\top = \gamma Mx.$$

上のパラメータ $\gamma > 0$ は straining flow の強度を表しており、また M は次のような行列となる。

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで V^s 自身も圧力場を $P^s(x) = -\frac{1}{2}\rho\gamma^2\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{4} + x_3^2\right)$ として Navier-Stokes 方程式 (2.1) の定常解となることに注意する。以下ではスケール変換

$$\tilde{x} = \left(\frac{\gamma}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}x, \quad \tilde{t} = \gamma t, \quad \tilde{V} = \frac{V}{(\gamma\nu)^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\rho\gamma\nu},$$

により、 $\gamma = \nu = \rho = 1$ として議論をすすめる。また、記号の簡略化のため、 \tilde{x} などのかわりに再び x などを用いる。速度場に対する $V = V^s + U$ という条件の下では、渦度場 $\Omega = \nabla \times V = \nabla \times U$ の発展方程式は次のようになる。

$$(2.4) \quad \partial_t \Omega - L\Omega + (U, \nabla)\Omega - (\Omega, \nabla)U = 0, \quad \nabla \cdot \Omega = 0.$$

ここで L は次の偏微分作用素である。

$$(2.5) \quad L\Omega = \Delta\Omega - (Mx, \nabla)\Omega + M\Omega.$$

未知速度場 U は 3 次元での Biot-Savart の法則により渦度場 Ω から次で与えられる。

$$(2.6) \quad U(x, t) = (K_{3D} * \Omega)(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \times \Omega(y, t)}{|x-y|^3} dy.$$

速度場 U が 2 次元的な流れを表すとき、つまり、 $U(x, t) = (U_1(x_h, t), U_2(x_h, t), 0)^\top$, $x_h = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ であるときには、対応する渦度場は $\Omega(x, t) = (0, 0, \Omega_3(x_h, t))^\top$ となり、(2.6) は 2 次元での Biot-Savart の法則

$$(2.7) \quad U_h(x_h, t) = (K_{2D} * \Omega_3)(x_h, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x_h - y_h)^\perp}{|x_h - y_h|^2} \Omega_3(y_h, t) dy_h.$$

となる。ここで $U_h = (U_1, U_2)^\top$, $x_h^\perp = (-x_2, x_1)^\top$ である。渦度場 G を

$$(2.8) \quad G(x) = (0, 0, g(x_h))^T, \quad g(x_h) = \frac{1}{4\pi} e^{-|x_h|^2/4}$$

により定義すれば $\{\alpha G\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ が (2.4) の定常解の族を与えることが確かめられる。なお、渦度場 G により生成される速度場 U^G は

$$(2.9) \quad U^G(x) = u^g(|x_h|^2)(-x_2, x_1, 0)^T, \quad u^g(r) = \frac{1}{2\pi r}(1 - e^{-r/4})$$

である。この定常の渦度場 αG が (総渦量 α の) 軸対称 Burgers 渦 [1] である。本稿では定常解 αG の漸近安定性を考察するが、その前にまず次の補題に注意する。

補題 2.1. ベクトル場 $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ が非圧縮性条件 $\nabla \cdot \Omega = 0$ を満たし、また、 $x_h = (x_1, x_2)^T$ 方向に十分速く減衰しているとする。このとき、 $\int_{\mathbb{R}^2} \Omega_3(x_h, x_3) dx_h$ は x_3 によらず一定である。

この補題は部分積分を用いて示される。渦度場の定義 $\Omega = \nabla \times V$ より、上記補題における非圧縮性条件は本稿で考察するベクトル場として自然な仮定である。さらに積分量 $\int_{\mathbb{R}^2} \Omega_3(x_h, x_3) dx_h$ は方程式 (2.4) の下で保存されるため、もし (2.4) の解 $\Omega(x, t)$ が時間無限大で Burgers 渦 αG に収束するとすれば、そのときの総渦量 α は $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(x_h, x_3, 0) dx_h$ を満たさなければならない。したがって、Burgers 渦の安定性の問題は簡単に言えば次のように述べられる：

問題. 初期渦度場 $\Omega_0 = (\Omega_{0,1}, \Omega_{0,2}, \Omega_{0,3})^T$ が与えられたとき、(2.4) の解 Ω が時間大域的に存在し、さらに、 $\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \Omega_{0,3}(x_h, x_3) dx_h$ としたときに時間無限大で解 Ω が αG に収束するか。言い換えれば、摂動部分 $\omega = \Omega - \alpha G$ が時間大域的に存在して時間無限大で 0 に収束するか。

上で摂動 ω はその定義と α の定め方から常に $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_3(x_h, x_3, t) dx_h = 0$ を満たすことに注意する。Burgers 渦が 2 次元的な渦度場であることから、上記の問題は次の二つの場合に分けられる。

- A. 摂動 ω が 2 次元渦度場である場合 (2 次元安定性)
- B. 摂動 ω が 3 次元渦度場である場合 (3 次元安定性)

A の場合には解 Ω の時間大域的な存在についてはさほど困難なく示される。一方、B の場合は流れが真に 3 次元的になるので Burgers 渦の安定性以前に解 Ω が爆発せずに時間大域的に存在するかどうかは一般には定かではなく、問題はより複雑になる。以下では A と B の二つの場合に分けて述べる。

3. 軸対称 BURGERS 渦の 2次元安定性

ここでは摂動 $\omega = \Omega - \alpha G$ が 2 次元的、つまり、 $\omega = (0, 0, \omega_3(x_h, t))^T$ である場合を考える。このとき、(2.4) から ω_3 に対する次の方程式を得る。

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_t \omega_3 - (\mathcal{L}_h - \alpha \Lambda_h) \omega_3 = -(K_{2D} * \omega_3, \nabla_h) \omega_3, & x_h = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x_h, t) dx_h = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

ただし、 \mathcal{L}_h 及び Λ_h は次で与えられる線形作用素である。

$$(3.2) \quad \mathcal{L}_h = \Delta_h + \frac{x_h}{2} \cdot \nabla_h + 1 = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{x_j}{2} \partial_{x_j} + 1,$$

$$(3.3) \quad \Lambda_h \omega_3 = (K_{2D} * g, \nabla_h) \omega_3 + (K_{2D} * \omega_3, \nabla_h) g.$$

2次元安定性については、未知関数がスカラー値関数 ω_3 であることと非線形項が輸送項のみであることから問題がある程度扱いやすくなり、数学的にも強い結果が得られている。実際、次のような大域的な安定性が示されている。

定理 3.1 ([11], [2], [10], [6], [7]). 初期摂動 $\omega_{0,3}$ が \mathbb{R}^2 上可積分かつ $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_{0,3}(x_h) dx_h = 0$ を満たすとする。このとき、(3.1) の解 ω_3 が時間大域的に一意的に存在して

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega_3(x_h, t)| dx_h = 0.$$

が成り立つ。

この定理では総渦量 α や摂動の初期値 $\omega_{0,3}$ の大きさに制限がないことに注意する。したがって、可積分性を保証する程度に空間遠方での減衰がある 2 次元的摂動に対しては、軸対称 Burgers 渦は大域的に漸近安定である。

上記定理は [11] でまず $|\alpha|$ 及び $\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_{0,3}(x_h)| dx_h$ が十分小さいときに示された。その後、[2] および [10] により、[11] で仮定されていた $\int_{\mathbb{R}^2} |\omega_{0,3}(x_h)| dx_h$ の大きさに対する制限が取り除かれた。なお、[6] では初期値が十分小さいという仮定の下で、より高階の漸近展開を得ている。総渦量 α に対する大きさの条件が本当に必要か否かはしばらく未解決であったが、[7] によってその条件が取り除かれ、これにより定理 3.1 が完全に証明された。

取り扱いやすいはずの 2 次元での問題にも関わらず、定理 3.1 の大域的な漸近安定性を数学的に示すのは難しい問題であった。その理由は、大域的な漸近安定性を示すためには (3.1) の線形化作用素 $\mathcal{L}_h - \alpha \Lambda_h$ の解析だけでは不十分であり、もとの Ω_3 そのものに対する方程式

$$(3.5) \quad \partial_t \Omega_3 - \mathcal{L}_h \Omega_3 + (K_{2D} * \Omega_3, \nabla_h) \Omega_3 = 0, \quad x_h \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

に対する非線形項の構造を十分に反映した解析が必要となるためであった。[7] で大きな進展が得られた理由は、次の相対エントロピー H が (3.5) におけるリャプノフ関数となることを発見したためである。

$$(3.6) \quad H(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_h) \log\left(\frac{f(x_h)}{g(x_h)}\right) dx_h.$$

ここで g は (2.8) で与えられた 2次元ガウス関数である。

補題 3.1 ([7]). Ω_3 を正值かつ空間遠方で十分速く減衰する (3.5) の解とする。このとき、次が成り立つ。

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} H(\Omega_3) = - \int_{\mathbb{R}^2} \Omega_3(x_h, t) \left| \nabla_h \log\left(\frac{\Omega_3(x_h, t)}{g(x_h)}\right) \right|^2 dx_h \leq 0.$$

この補題は部分積分及び非線形項に現れる 2次元 Biot-Savart の法則の具体的な表示を用いて証明される。補題 3.1 により、(3.5) の解の時間無限大での極限状態を特定することができ、定理 3.1 を示すことができる。

さて、総渦量 α が大きいときは渦度場が強い状態に対応し、物理的にもより重要となる。[18] では線形化作用素 $\mathcal{L}_h - \alpha \Lambda_h$ のスペクトルの分布と α の関係が数値的に調べられ、 $|\alpha|$ が十分大きいときには $\mathcal{L}_h - \alpha \Lambda_h$ が '非軸対称な' 関数に対して安定化効果を持つことが示された。この結果は [16] により数学的にも証明された。

4. BURGERS 渦の 3次元安定性

本節では摂動 $\omega = \Omega - \alpha G$ が 3次元渦度場である場合を考える。このとき、 ω に対する方程式は次のようになる。

$$(4.1) \quad \begin{cases} \partial_t \omega - (L - \alpha \Lambda) \omega = -(K_{3D} * \omega, \nabla) \omega + (\omega, \nabla) K_{3D} * \omega, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot \omega(t) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ \omega|_{t=0} = \omega_0, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ただし、 Λ は次で与えられる線形作用素である。

$$(4.2) \quad \Lambda \omega = (K_{3D} * G, \nabla) \omega - (\omega, \nabla) K_{3D} * G + (K_{3D} * \omega, \nabla) G - (G, \nabla) K_{3D} * \omega.$$

さて、一言に 3次元渦度場と言っても、摂動流としてどのようなベクトル場を想定するかは、物理的な妥当性あるいは方程式との数学的な適合性によって変わってくる。一つの自然な考え方は、定常解自身が含まれるよ

うな関数の集合を摂動のとりうるクラスとすることである。この考え方の下では、例えば Burgers 渦が 2 次元渦度場であることから、2 次元渦度場を含むような 3 次元ベクトル場の集合を摂動のクラスとして設定するのが自然である。そこで次のような関数空間を導入する。1 より大きな実数 m に対して $[0, \infty)$ 上の関数 ρ_m を

$$(4.3) \quad \rho_m(r) = \left(1 + \frac{r}{4m}\right)^m,$$

により定義する。この関数 ρ_m を用いて \mathbb{R}^2 上の重み付き L^2 空間 $L^2(m)$ 及びその部分空間 $L_0^2(m)$ を次で定める。

$$(4.4) \quad L^2(m) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} |f(x_h)|^2 \rho_m(|x_h|^2) dx_h < \infty\right\}$$

$$(4.5) \quad L_0^2(m) = \left\{f \in L^2(m) \mid \int_{\mathbb{R}^2} f(x_h) dx_h = 0\right\}.$$

次に \mathbb{R}^3 上の関数空間 $X(m)$ 及びその部分空間 $X_0(m)$ を

$$(4.6) \quad X(m) = \left\{\phi(x_h, x_3) \mid \phi(\cdot, x_3) \in L^2(m) \text{ for all } x_3 \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. \|\phi\|_{X(m)} = \sup_{x_3 \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(x_h, x_3)|^2 \rho_m(|x_h|^2) dx_h \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\right\},$$

$$(4.7) \quad X_0(m) = \left\{\phi \in X(m) \mid \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x_h, x_3) dx_h = 0 \text{ for all } x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

で定義する。以上の準備の下、摂動 ω の属する関数空間を $X(m) \times X(m) \times X_0(m)$ 、すなわち、 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top \in X(m) \times X(m) \times X_0(m)$ とする。 $X(m)$ の定義から、 $X(m)$ に属する関数は x_3 方向に減衰しなくてもよい。関数空間 $X(m) \times X(m) \times X_0(m)$ は真に 2 次元的な渦度場も含むことになる。なお、 ω の第三成分 ω_3 が $X(m)$ ではなく $X_0(m)$ に属することを要請しているのは、Burgers 渦の安定性の問題では、先に述べたように摂動 ω が $\int_{\mathbb{R}^2} \omega_3(x_h, x_3, t) dx_h = 0$ を満たさねばならないことを反映している。記号を簡単にするため

$$(4.8) \quad \mathbb{X}(m) = X(m) \times X(m) \times X_0(m)$$

とおく。これらの設定の下、次の定理が成り立つ。

定理 4.1. $m > 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする。このとき、初期摂動 $\omega_0 \in \mathbb{X}(m)$ が十分小さいならば、(4.1) の解 ω が時間大域的に一意的に存在して、かつ ω は時間を無限大にしたときに $\mathbb{X}(m)$ のノルムで 0 に収束する。より正確には次の評価が成り立つ。

$$(4.9) \quad \|\omega(\cdot, t)\|_{\mathbb{X}(m)} \leq C \|\omega_0\|_{\mathbb{X}(m)} e^{-\frac{t}{2}}, \quad t > 0.$$

ここで $C > 0$ は α と m にのみ依存する定数である。

端的に言えば、定理 4.1 は Burgers 渦がどの総渦量 α に対しても 3 次元摂動に対して局所的に漸近安定であること主張している。なお、 ω に対して保証されている時間減衰率 $e^{-\frac{t}{2}}$ は α に依存しないことに注意する。ただし、 $|\alpha|$ が大きくなるほどそれに応じて初期摂動 ω_0 は十分小さくとる必要がある。

定理 4.1 はまず $|\alpha|$ が十分小さいときに [8] で示され、最近この $|\alpha|$ に対する制限が [5] により取り除かれた。証明の鍵はともに (2.4) の線形化問題

$$(4.10) \quad \begin{cases} \partial_t \omega - (L - \alpha \Lambda) \omega & = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ \omega|_{t=0} & = \omega_0 \in \mathbb{X}(m) \end{cases}$$

に対する解析である。以下では $|\alpha|$ が十分小さい場合とそうでない場合に分けて証明のアイデアを述べる。

4.1. Analysis of $L - \alpha \Lambda$ for small $|\alpha|$. ここでは $|\alpha| \ll 1$ の下で定理 4.1 を示した [8] での議論を簡単に述べる。まず、

$$(4.11) \quad \mathcal{L}_h = \Delta_h + \frac{x_h}{2} \cdot \nabla_h + 1 = \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{x_j}{2} \partial_{x_j} + 1,$$

$$(4.12) \quad \mathcal{L}_3 = \partial_{x_3}^2 - x_3 \partial_{x_3},$$

とおいたとき、 $L\omega = \Delta\omega - (Mx, \nabla)\omega + M\omega$ は

$$L\omega = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_h \omega_h \\ \mathcal{L}_3 \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{L}_h + \mathcal{L}_3 - \frac{3}{2}) \omega_h \\ (\mathcal{L}_h + \mathcal{L}_3) \omega_3 \end{pmatrix},$$

と書けることに注意する。偏微分作用素 \mathcal{L}_h 及び \mathcal{L}_3 に対する半群（ここで \mathcal{L}_j に対する半群とは時間発展方程式 $\partial_t \omega - \mathcal{L}_j \omega = 0$ に対する解作用素を指す）は具体的に

$$(4.13) \quad e^{t\mathcal{L}_h} \phi = \frac{1}{4\pi a(t)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x_h - y_h e^{-\frac{t}{2}}|^2}{4a(t)}} \phi(y_h) dy_h, \quad a(t) = 1 - e^{-t},$$

$$(4.14) \quad e^{t\mathcal{L}_3} \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_3 e^{-t} - y_3|^2}{2b(t)}} \phi(y_3) dy_3, \quad b(t) = 1 - e^{-2t}$$

と表される。したがって、 L_3 に対する半群は具体的に

$$(4.15) \quad e^{tL_3} \phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi b(t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_3 e^{-t} - y_3|^2}{2b(t)}} (e^{t\mathcal{L}_h} \phi(\cdot, y_3))(x_h) dy_3,$$

と与えられ、これを用いて L に対する半群の表示

$$(4.16) \quad e^{tL} \omega_0 = (e^{-\frac{3}{2}t} e^{tL_3} \omega_{0,1}, e^{-\frac{3}{2}t} e^{tL_3} \omega_{0,2}, e^{tL_3} \omega_{0,3})^\top$$

を得る。実は \mathcal{L}_h の $L^2(m)$ 及び $L_0^2(m)$ におけるスペクトルは $m > 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{L}_h) &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq 0\} \quad \text{in } L^2(m), \\ \sigma(\mathcal{L}_h) &\subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{2}\} \quad \text{in } L_0^2(m) \end{aligned}$$

を満たすことが知られており、 $e^{t\mathcal{L}_h}$ の評価も得られている (例えば [6])。これらと上の半群の表示 (4.13)-(4.16) を用いると L の $\mathbb{X}(m)$ におけるスペクトルを評価でき、特に

$$(4.17) \quad \sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{2}\} \quad \text{in } \mathbb{X}(m), \quad m > 2,$$

を得る。偏微分作用素 Λ は低階項なので、 $|\alpha|$ が十分小さいときには作用素 $L - \alpha\Lambda$ のスペクトルも評価でき、特に

$$(4.18) \quad \sigma(L - \alpha\Lambda) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda < 0\} \quad \text{in } \mathbb{X}(m), \quad m > 2, \quad |\alpha| \ll 1$$

を作用素の摂動理論に関する一般論で得ることができる。

4.2. Analysis of $L - \alpha\Lambda$ for not small $|\alpha|$. 上の議論で見たように、 $|\alpha|$ が十分小さいときには (4.10) の解析に線形作用素に対する一般の摂動理論が適用できる。しかし、 $|\alpha|$ が十分小さくないときにはこのような一般論だけでは不十分であり、特に、 L のスペクトルの情報だけでなく Λ の構造をより詳細に調べなければ $L - \alpha\Lambda$ のスペクトルを評価することはできない。

以降では $|\alpha|$ に対する制限を取り除いた [5] でのアイデアを簡単に説明する。まず、 L および Λ の重要な性質として、 x_3 変数に対しては簡単な関係

$$(4.19) \quad [\partial_{x_3}, L] = \partial_{x_3} L - L \partial_{x_3} = -\partial_{x_3},$$

$$(4.20) \quad [\partial_{x_3}, \Lambda] = 0,$$

があることに注意する。したがって $\partial_{x_3}^k e^{t(L-\alpha\Lambda)} = e^{-kt} e^{t(L-\alpha\Lambda)} \partial_{x_3}^k$ が成り立ち、たとえ最初の段階で半群 $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ (あるいは $L - \alpha\Lambda$ のスペクトル) に

対して悪い評価しか得られていなくても、 $e^{t(L-\alpha)}$ の k 階微分である作用素 $\partial_{x_3}^k e^{t(L-\alpha)}$ に対しては、 k を十分大きくとることで指数時間減衰評価を得ることができる。これは直感的に言えば、straining flow V^s による強い x_3 方向への引き伸ばし効果により、流れが x_3 方向に一様に伸ばされ、そのため流れの x_3 方向の（高階）微分に強い時間減衰効果が生じることを意味している。

もちろん $\partial_{x_3}^k e^{t(L-\alpha\Lambda)}$, $k \gg 1$ に対して時間減衰評価が得られても、直ちに $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ の評価を得ることはできない。第二の重要なステップは半群 $\partial_{x_3}^{k-1} e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ の評価で困難を引き起こしうる部分が実は一つ微分の多い $\partial_{x_3}^k e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ のみで評価されることを示すことである。これが示されると第三のステップとして k に対する backward induction により、もとの $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ の指数時間減衰評価を得ることができる。実際、すでに $\partial_{x_3}^k e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ に対しては時間減衰評価を得ているとしてよいので、第二のステップにより微分の一つ少ない $\partial_{x_3}^{k-1} e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ に対する評価が従うからである。こうして $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ の指数時間減衰評価（あるいは $L - \alpha\Lambda$ のスペクトルに対する評価）を得ることができる。あとはしかるべき非線形項の評価を示し、不動点定理による一般論で定理 4.1 が示される。

全体の証明の流れにおいて第一と第二のステップが特に重要であり、Burgers 渦の解析に特有の議論である。以下 $k=0$ として第二のステップの概略を簡単に説明する。ここでは $L - \alpha\Lambda$ を以下のように分解して解析することが鍵となる。まず、線形化作用素 Λ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ を

$$\begin{aligned} \Lambda\omega &= (U^G, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)U^G + (K_{3D} * \omega, \nabla)G - (G, \nabla)(K_{3D} * \omega) \\ (4.21) \quad &= \Lambda_1\omega - \Lambda_2\omega + \Lambda_3\omega - \Lambda_4\omega, \end{aligned}$$

と定め、さらに $\tilde{\Lambda}_3$ を

$$(4.22) \quad \tilde{\Lambda}_3\omega = (K_{2D} * \omega_3, \nabla)G.$$

と定義する。これを用いて線形作用素 $L_{2D,\alpha}$ と N を

$$L_{2D,\alpha}\omega = \begin{pmatrix} (\mathcal{L}_h - \frac{3}{2} - \alpha\Lambda_1 + \alpha\Lambda_2)\omega_h \\ (\mathcal{L}_h - \alpha\Lambda_1 - \alpha\tilde{\Lambda}_3)\omega_3 \end{pmatrix},$$

および

$$N = \Lambda_3 - \tilde{\Lambda}_3 - \Lambda_4,$$

と定める。ここで $L_{2D,\alpha}$ は x_3 変数によらないという意味で 2 次元的な作用素であることに注意する。これらの作用素を用いれば $L - \alpha\Lambda$ は

$$(4.23) \quad L - \alpha\Lambda = L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3 - \alpha N,$$

と表される。よって、半群 $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ は (抽象的) 積分方程式

$$(4.24) \quad e^{t(L-\alpha\Lambda)} = e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} - \alpha \int_0^t e^{(t-s)(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} N e^{s(L-\alpha\Lambda)} ds,$$

を満たすことになる。この表現を用いて $e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ を評価するためにはまず $e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)}$ の評価が必要である。これについて次が成り立つ。

補題 4.1. $m > 2$ とする。このとき、 $\partial_{x_3}^k e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} = e^{-kt} e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} \partial_{x_3}^k$ が成り立つ。また、任意の $f \in \mathbb{X}(m)$ に対して、

$$\|e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} f\|_{\mathbb{X}(m)} \leq C e^{-\frac{t}{2}} \|f\|_{\mathbb{X}(m)}, \quad t > 0,$$

が成り立つ。

補題 4.1 に述べられている最初の性質は $[\partial_{x_3}, L_{2D,\alpha}] = 0$ 及び $[\partial_{x_3}, \mathcal{L}_3] = -\partial_{x_3}$ から直ちに従う。半群 $e^{t(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)}$ の評価については、 $|\alpha|$ が小さくないので全く自明ではないが、詳細は [5] に譲り、ここでは省略する。さて、補題 4.1 が得られても、 $|\alpha|$ が小さくないときには (4.24) の右辺第二項の評価を得るのに困難がある。しかしこの困難は、右辺第二項が先に述べたように $\partial_{x_3} e^{t(L-\alpha\Lambda)}$ で評価されるということを示すことで克服される。これを保証するのが次の補題である。

補題 4.2. $m > 2$ とする。このとき $\partial_{x_3}^k N = N \partial_{x_3}^k$ であり、また、任意の $f \in \mathbb{X}(m)$ に対して、

$$\|Nf\|_{\mathbb{X}(m)} \leq C \|\partial_{x_3} f\|_{\mathbb{X}(m)},$$

が成り立つ。

上の補題 4.1 と補題 4.2 を用いると (4.24) の右辺第二項は

$$\begin{aligned} & \left\| \alpha \int_0^t e^{(t-s)(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} N e^{s(L-\alpha\Lambda)} ds \right\|_{\mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{X}(m)} \\ & \leq |\alpha| \int_0^t \left\| e^{(t-s)(L_{2D,\alpha} + \mathcal{L}_3)} N e^{s(L-\alpha\Lambda)} \right\|_{\mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{X}(m)} ds \\ & \leq C |\alpha| \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}} \left\| N e^{s(L-\alpha\Lambda)} \right\|_{\mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{X}(m)} ds \\ & \leq C |\alpha| \int_0^t e^{-\frac{t-s}{2}} \left\| \partial_{x_3} e^{s(L-\alpha\Lambda)} \right\|_{\mathbb{X}(m) \rightarrow \mathbb{X}(m)} ds, \end{aligned}$$

と評価され、これにより必要な評価が得られたことになる。最終的には $L - \alpha\Lambda$ のスペクトルは次のように評価される。

$$(4.25) \quad \sigma(L - \alpha\Lambda) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\frac{1}{2} \right\} \quad \text{in } \mathbb{X}(m), \quad m > 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

最後に、非軸対称な Burgers 渦に対しても、その非軸対称性が十分小さければやはり局所的な漸近安定性が成り立つことに注意しておく。これは基本的には (4.25) の評価と線形作用素の摂動理論により従うものである。

REFERENCES

- [1] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.* (1948) 171-199.
- [2] A. Carpio, Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three, *Commun. P. D. E.* **19** (1994) 827-872.
- [3] D. G. Crowdy, A note on the linear stability of Burgers vortex, *Stud. Appl. Math.* **100** (1998) 107-126.
- [4] J. Jiménez, H. K. Moffatt, C. Vasco, The structure of the vortices in freely decaying two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* **313** (1996) 209-222.
- [5] Th. Gallay and Y. Maekawa, Three dimensional stability of the Burgers vortex, in preparation.
- [6] Th. Gallay and C. E. Wayne, Invariant manifold and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^2 , *Arch. Rational Mech. Anal.* **163** (2002) 209-258.
- [7] Th. Gallay and C. E. Wayne, Global Stability of vortex solutions of the two dimensional Navier-Stokes equation, *Comm. Math. Phys.* **255** (2005) 97-129.
- [8] Th. Gallay and C. E. Wayne, Three-dimensional stability of Burgers vortices : the low Reynolds number case, *Phys. D.* **213** (2006) 164-180.
- [9] Th. Gallay and C. E. Wayne, Existence and stability of asymmetric Burgers vortices, *J. Math. Fluid Mech.* **9** (2007) 243-261.
- [10] Y. Giga and M.-H. Giga, *Nonlinear Partial Differential Equation, Self-similar solutions and asymptotic behavior*, (Kyoritsu: 1999 (in Japanese)), English version to be published by Birkhäuser.
- [11] Y. Giga and T. Kambe, Large time behavior of the vorticity of two dimensional viscous flow and its application to vortex formation, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988) 549-568.
- [12] S. Kida and K. Ohkitani, Spatiotemporal intermittency and instability of a forced turbulence, *Phys. Fluids A.* **4** (1992) 1018-1027.
- [13] S. Leibovich and Ph. Holmes, Global stability of the Burgers vortex, *Phys. Fluids* **24** (1981) 548-549.
- [14] H. K. Moffatt, S. Kida and K. Ohkitani, Stretched vortices-the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics, *J. Fluid Mech.* **259** (1994) 241-264.
- [15] Y. Maekawa, On the existence of Burgers vortices for high Reynolds numbers, *J. Math. Anal. Appl.*, **349** (2009) 181-200.
- [16] Y. Maekawa, Existence of asymmetric Burgers vortices and their asymptotic behavior at large circulations, *Math. Model Methods Appl. Sci.*, **19** (2009) 669-705.
- [17] Y. Maekawa, Spectral properties of the linearization at the Burgers vortex in the high rotation limit, to appear in *J. Math. Fluid Mech.*
- [18] A. Prochazka and D. I. Pullin, On the two-dimensional stability of the axisymmetric Burgers vortex, *Phys. Fluids.* **7** (1995) 1788-1790.

- [19] A. Prochazka and D. I. Pullin, Structure and stability of non-symmetric Burgers vortices, *J. Fluid Mech.* **363** (1998) 199-228.
- [20] A. C. Robinson and P. G. Saffman, Stability and Structure of stretched vortices, *Stud. Appl. Math.* **70** (1984) 163-181.
- [21] M. Rossi and S. Le Dizès, Three-dimensional temporal spectrum of stretched vortices, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2567-2569.
- [22] P. J. Schmid and M. Rossi, Three-dimensional stability of a Burgers vortex, *J. Fluid Mech.* **500** (2004) 103-112.
- [23] A. A. Townsend, On the fine-scale structure of turbulence, *Proc. R. Soc. A* **208** (1951) 534-542.