

波動音響に対するシンプレティック時間積分法の最適化

(Optimization of Symplectic Integration Methods for Computational Acoustics)

岩津 玲磨 (Reima Iwatsu)*¹

鶴 秀生 (Hideo Tsuru)²

*¹Tokyo Denki University

²Nittobo Acoustic Engineering Corporation Ltd.

1 はじめに

波動音響, 電磁場解析には FDTD (Finite-Difference-Time-Domain) 法⁽¹⁾ およびその改良版がよく使われる. 改良版には陽的 4 次差分法 (FDM) と多段 4 次のシンプレクティック積分法 (SIA) が試されている⁽²⁾. 一方で空力音響には DRP (Dispersion-Relation-Preserving) スキーム⁽³⁾, またはコンパクト差分スキーム^(4,5) で空間を離散化して低散逸, 低分散誤差の Low-Dissipation and Dispersion Runge-Kutta (LDD-RK) 法で時間進行させる方法⁽⁶⁾ がよく使われている.

これら DRP, LDD-RK スキームには共通して, 波の分散関係をよく保持すること (DRP) が大事だというアイデアが用いられている. この考え方は RK 法にとどまらず, 線形多段階積分 (LMM) 法にも適用できる⁽⁷⁾. しかし, 波を長時間積分するときにはむしろエネルギーが保存されるスキームの方がよい成績を示す⁽⁸⁾.

こうした観察をもとにして波動音響に適した時間積分法をさがすと, シンプレクティックで, かつ分散誤差の少ない積分法が有効であろうと思われる. シンプレクティック積分法⁽⁹⁾ は粒子のビーム⁽¹⁰⁾, 天体⁽¹¹⁾, 分子動力学, 量子力学⁽¹²⁾ などへの適用で成功をおさめてきた. 過去の文献を調べると, 安定性最大のものが最適とされてきたようである⁽¹³⁾.

ここでは, 3 段 3 位の分割されたルンゲ・クッタ (Partitioned RK) 法⁽¹⁰⁾ をとりあげて, 1) シンプレクティシティ条件に新しい解が存在すること, 2) このクラスの SIA で位相誤差を最小にする (新しい) 解があること, 3) それらの新しい係数の SIA と, いくつかの代表的な LDD-RK の比較について, 報告する.

2 シンプレクティック積分法

微分可能な写像 g のヤコビ行列 $g'(p, q)$ がいたるところで

$$g'(p, q)^T J g'(p, q) = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

をみたすものをシンプレクティック変換とよぶ. すると, ハミルトンの運動方程式

$$\dot{y} = J^{-1} \nabla H(y), \quad y = (p, q), \quad \nabla H(y) = H'(y)^T \quad (2)$$

にしたがう流れ ϕ_t はシンプレクティック変換である. そして, 正準方程式によって運動が与えられているとき, ハミルトニアン H は第一積分になる (エネルギー保存). そこで, 離散的なシンプレクティック変換をつくることができれば, 離散的なシンプレクティック構造が保存され, 数値積分の高い信頼性が保障される⁽⁹⁾.

2.1 分割されたルンゲ・クッタ (PRK) 法

ここでは, s 段陽解法のルンゲ・クッタ法をとりあげる.

$$p^{i+1} = a_i p^i - c_i h H_q(q^i) \quad (3)$$

$$q^{i+1} = b_i q^i + d_i h H_p(p^{i+1}) \quad (4)$$

ただし $a_i = b_i = 1, i = 1, \dots, s, (q, p)^1 = (q, p)(t), (q, p)^{s+1} = (q, p)(t+h), H(q, p) = V(q) + A(p)$ の場合をみつかる. 3位シンプレクティシティ条件⁽¹⁰⁾は

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1, \quad d_1 + d_2 + d_3 = 1, \quad c_2 d_1 + c_3(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}, \quad (5)$$

$$c_2 d_1^2 + c_3(d_1 + d_2)^2 = \frac{1}{3}, \quad d_3 + d_2(c_1 + c_2)^2 + d_1 c_1^2 = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

である. この連立方程式には, ルースによる係数⁽¹⁰⁾が知られている (表1). そのほかに, マクラクランの係数⁽¹³⁾が報告されている (表2). 最近, 3位条件をみたす, ルース法より安定で位相誤差が少ない係数がみつかった⁽¹⁴⁾. 新しくみつかった共役な係数は表1に解 A, B と示した係数である. このうち解 A がルース法よりも安定性がよく位相誤差が小さい係数である. 解 A はマクラクラン係数よりも位相誤差が小さい. この係数 (解 A) は6次コンパクト差分と兼用するとき, とくによい性能を示した. さらに, この種類の係数のなかで位相誤差を最小にできるものがあることがわかった (解 P).

上の連立方程式は次のようにして解くことができる. 以下に示すように, マクラクランの解は上の方程式の解のなかで安定性を最大とする解であることを示すことができる.

2.2 陽的3段3位PRK法の一般解⁽¹⁴⁾

はじめに $d = d_1 + d_2$ とおくことにすれば, $d_3 = 1 - d$ である. もし $d = 0$ ならば, ルース解が求まる. もし $d \neq 0$ ならば, 与えられた方程式は以下のような式になる:

$$c_1 = 1 + \frac{1}{d_1 d} \left(\frac{1}{3} - \frac{d_1 + d}{2} \right), \quad c_2 = \frac{1}{d_1 d_2} \left(\frac{d}{2} - \frac{1}{3} \right), \quad c_3 = -\frac{1}{d d_2} \left(\frac{d_1}{2} - \frac{1}{3} \right), \quad (7)$$

$$\left(\frac{d}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{d_1 d_2}{3} \left(d - \frac{3}{4} \right) \quad (8)$$

ただし

$$d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d \neq \frac{3}{4}$$

のような条件が付随する. この条件がみたされないことを仮定すると, 矛盾が生じる. ここでさらに $e = d_1 d_2$ とおけば, 2次方程式

$$z^2 - dz + e = 0 \tag{9}$$

が式(8)をみたす実根をもてば, それらが捜していた解 (d_1, d_2) を与えることになる. 実根条件より $D = d^2 - 4e \geq 0, (d - \frac{3}{4})(d^3 - \frac{15}{4}d^2 + 4d - \frac{4}{3}) \geq 0$ より

$$d < \frac{3}{4} \quad \text{or} \quad d \geq d_0 \simeq 2.218.$$

$$(d_1, d_2) = \frac{1}{2} (d \pm \sqrt{d^2 - 4e}) \quad \text{or} \quad (d_1, d_2) = \frac{1}{2} (d \mp \sqrt{d^2 - 4e}). \tag{10}$$

便宜的に上の式のうち前者を枝 A, 後者を枝 B と呼ぶことにする. 図 1 に解曲線 A, B を d の関数として示す.

ルースの係数は枝 A 上の $d \rightarrow 0$ (極限值は存在する) の点, マクラ克蘭の係数は枝 A 上 $d \simeq 0.73$ の点 (後出), 解 A は枝 A 上 $d = \frac{4}{9}$ の点に対応している.

Table 1. Coefficients of third-order symplectic time integration method

	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3
Ruth	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
solution A	$\frac{1}{12} (-7 + \sqrt{\frac{209}{2}})$	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12} (8 - \sqrt{\frac{209}{2}})$	$\frac{2}{9} (1 + \sqrt{\frac{38}{11}})$	$\frac{2}{9} (1 - \sqrt{\frac{38}{11}})$	$\frac{5}{9}$
solution B	$-\frac{1}{12} (7 + \sqrt{\frac{209}{2}})$	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12} (8 + \sqrt{\frac{209}{2}})$	$\frac{2}{9} (1 - \sqrt{\frac{38}{11}})$	$\frac{2}{9} (1 + \sqrt{\frac{38}{11}})$	$\frac{5}{9}$

Table 2. Coefficients of third-order symplectic time integration method

	c_1	c_2	c_3
	d_1	d_2	d_3
McLachlan	d_3	d_2	d_1
	$z = -\left(\frac{2}{27} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)^{1/3},$ $w = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9z} + z,$ $y = \frac{1}{4}(1 + w^2),$ $\left(\frac{1}{9y} - \frac{w}{2} + \sqrt{y}\right)^{1/2} - \frac{1}{3\sqrt{y}}$		
	$=0.919661523017399857$	$\frac{1}{4d_1} - \frac{d_1}{2}$	$1 - d_1 - d_2$
solution P	0.260311692419906	1.094142798316745	-0.354454490736651
	0.630847692986669	-0.094142798316742	0.463295105330073

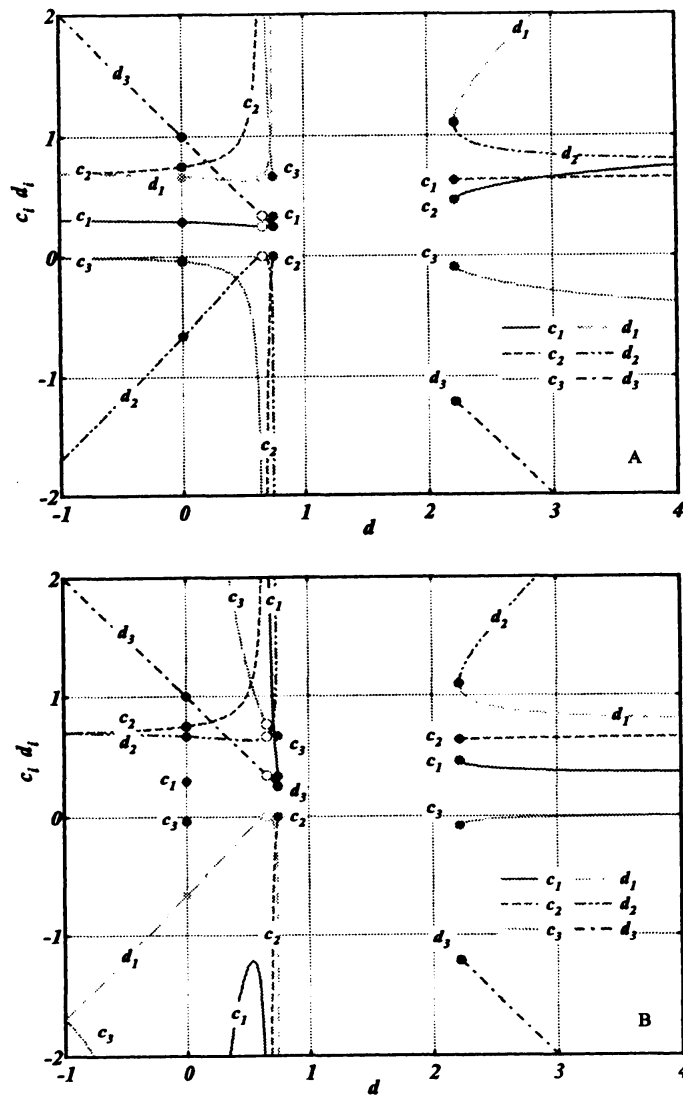


Figure 1: Coefficients c_i, d_i as a function of d , branch A and branch B

3 安定性解析

3.1 安定性の限界

1次元調和振動子の運動をテスト関数として、3段3位法の安定性限界および位相誤差限界を調べる。テスト方程式は

$$p_t = -\omega^2 q, \quad q_t = p \quad (11)$$

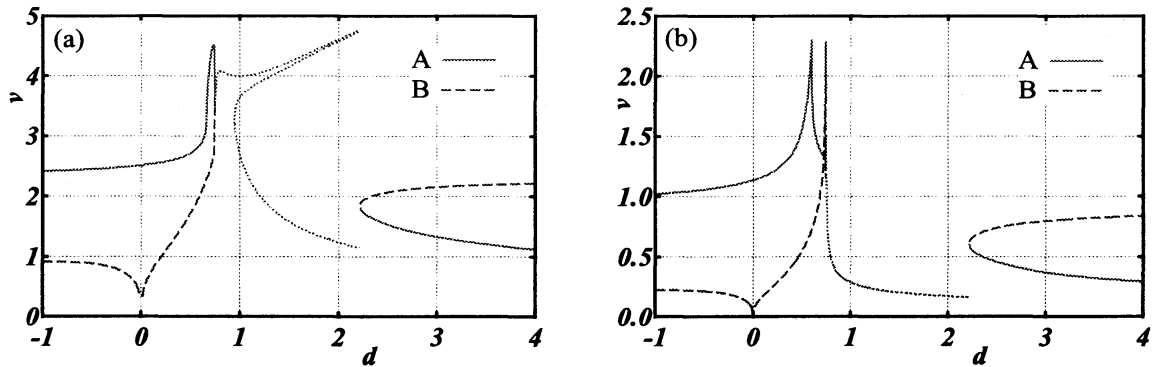


Figure 2: Stability limit (a) and the phase error limit (b) as a function of d , for branch A and branch B

ただし $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$, $\nu = \omega h$. ルンゲ・クッタ法の1段 ($i = 1, \dots, s$), および, 3段法は行列の形式で

$$\begin{pmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -c_i \omega \nu \\ d_i h & 1 - c_i d_i \nu^2 \end{pmatrix}}^{M_i} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = \overbrace{M_3 M_2 M_1}^M \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

と表わされる. 時間積分法の増幅率⁽⁶⁾として 適当なものは M のスペクトル半径 $\rho(M)$ であろう. そこで

$$\det(M) = \det(M_1) \det(M_2) \det(M_3) = 1, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(M) &= 2 - (c_1 + c_2 + c_3)(d_1 + d_2 + d_3)\nu^2 \\ &+ [c_1 c_2 (d_2 + d_3) d_1 + c_2 c_3 (d_3 + d_1) d_2 + c_3 c_1 (d_1 + d_2) d_3] \nu^4 - c_1 d_1 c_2 d_2 c_3 d_3 \nu^6, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0 \quad (15)$$

であるから, 漸近安定条件 $|\rho(M)| \leq 1$ を要請して安定性の上限が求まる. ルース法, 新解 A, B それぞれの安定限界は $\nu \leq 2.507$ (ルース法), $\nu \leq 2.666$ (解 A), $\nu \leq 1.573$ (解 B) となる. 安定性限界を d の関数として示したものが図 2(a) である.

3.2 増幅率誤差の限界

シンプレティック積分法の特徴としては, 安定性にかかわらず必ず $\rho(M) \equiv 1$ となることがあげられる ($\rho(M) \leq 1$ は λ が虚数のとき, $\operatorname{tr}(M)^2 - 4 \det(M) \leq 0$ のみにみたされ, このとき行列 M の固有値 $|\lambda| = 1$ となる. λ が実数のときは $\det(M) = 1$ より, かならず不安定モードがひとつあらわれる). したがって, $G = \rho(M) \equiv 1$, シンプレティック PRK 法の増幅率誤差 $\alpha(\nu) = |1 - G|$ ⁽⁶⁾ は安定性限界まで 0 である.

3.3 位相誤差の限界

積分法の位相 ν^* は

$$\cos(\nu^*) = \frac{1}{2} \frac{\text{tr}(M)}{\sqrt{\det(M)}} = 1 - C_1\nu^2 + C_2\nu^4 - C_3\nu^6,$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3)(d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2},$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(d_1(c_3 + c_1)d_2c_2 + d_2(c_1 + c_2)d_3c_3 + d_3(c_2 + c_3)d_1c_1) = \frac{1}{24},$$

$$C_3 = \frac{1}{2}c_1c_2c_3d_1d_2d_3$$

となる. ここで C_3 の値はルース法, 解 A, 解 B のそれぞれに対して $\frac{7}{3456} \simeq 2.03 \cdot 10^{-3}$, $\frac{5}{7776} \left(\frac{107}{2} - 5\sqrt{\frac{209}{2}} \right) \simeq 1.54 \cdot 10^{-3}$ and $\frac{5}{7776} \left(\frac{107}{2} + 5\sqrt{\frac{209}{2}} \right) \simeq 6.73 \cdot 10^{-2}$ となる. 厳密な値は $\frac{1}{6!} \simeq 1.39 \cdot 10^{-3}$ であるから, 解 A の方がルース法よりも (大部分の ν の値に対して) 位相誤差の少ないことがわかる. さらに, 次に示すように C_3 の値を 0 にするような係数が存在することがわかった.

3.4 陽的 3 段 3 位積分法の最適解 (位相誤差最小解)

安定性限界を d の関数としてプロットすると, 枝 A 上 $d \simeq 0.73$ の点において安定性が最大となる (図 2a). マクラクランによる最適解はこの点に対応している. マクラクランは係数に対称性 $c_i = d_{4-i}$, ($i = 1, \dots, 3$) を課して, ハミルトニアン of 誤差主要項の係数を最小にするような解を求めた. ハミルトニアン of 誤差主要項の係数を最小にするような係数が安定性最大だったということなる.

一方で枝 A 上 $d \simeq 0.54$, 枝 B 上 $d \simeq 0.74$ の点において $C_3 = \frac{1}{720}$, つまり位相誤差を最小にすることができる. 図 2(b) をみると, そのふたつの点に対応してふたつのピークが, 枝 A, B 上にひとつずつ観察される. これらふたつの係数の組のあいだには, 係数に対称性 $(c_i, d_i) \rightarrow (d_{4-i}, c_{4-i})$ がなりたつ. そこで, これらは実質的に同じ解とみなしてもよいだろう. 便宜的にこの新たにみつかった位相誤差最小解を解 P とよぶことにする. 解 P は時間反転に対して対称ではない. 解 P は, (q, p) , H が 3 次精度であるとともに, 位相のみが 8 次精度で計算できる積分法ということになる. 表 2 に 15 桁の数値を載せる.

4 数値計算結果

4.1 1次元ベンチマーク問題 I

初期値問題

$$f_t + f_x = 0, \quad f(0) = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln(2) \left(\frac{x}{3} \right)^2 \right) \quad (16)$$

の解を時刻 $t_F = 400$ において求める問題⁽¹⁵⁾を, 時刻 $t_F = 400$ と $t_F = 1000, 10000$ までの長時間積分に拡張した. $-40 \leq x \leq t_F + 60, \Delta x = 1.0$.

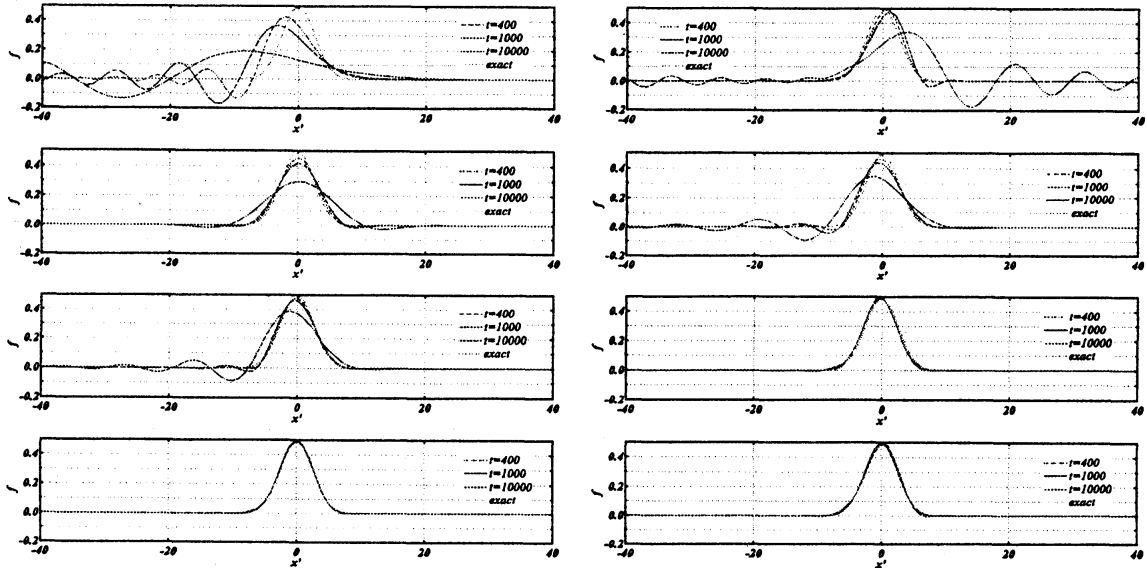


Figure 3: $x' = x - ct$. From top left, top right, \dots , to bottom right, FDTD ($\sigma = 0.7$), FDTD-CD6 ($\sigma = 0.25$), RK33-Williamson ($\sigma = 0.5$), RK34-Carpenter & Kennedy ($\sigma = 1.0$), RK45-CK ($\sigma = 1.0$, Ruth's method ($\sigma = 0.7$), solution A ($\sigma = 1.0$) and solution B ($\sigma = 0.25$)

FDTD 法以外の空間方向は 6 次コンパクト差分で離散化した. 比較したのは, FDTD 法, FDTD-CD6, ウィリアムソンの 3 段 3 位低容量ルンゲ・クッタ法 (RK33W)⁽¹⁶⁾, カーペンター・ケネディの 4 段 3 位低容量ルンゲ・クッタ法⁽¹⁷⁾, カーペンター・ケネディの 5 段 4 位低容量ルンゲ・クッタ法⁽¹⁷⁾, ルース法, 解 A と解 B である. 安定性が異なるので, それぞれの方法は異なるクーラン数 $\sigma = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ をもちいて計算している. RK33W は乱流の DNS で用いられることがあるが, 散逸が大きい. 他の方法がいずれも多かれ少なかれ波形を崩すのに対して, 3 つのシンプレティック積分法は長時間ののちも波形をきれいに保っている.

誤差 $E_n = \sum_{j=2}^{N-1} |f_j - f(x_j)|$ のクーラン数に対する「帯域幅」を図 4 に示す. ルース法と解 A は σ に対してほぼ E_n の値を一定に保っている.

4.2 ベンチマーク問題 II

1 次元初期値問題

$$u_t + p_x = 0, \quad p_t + u_x = 0,$$

$$p(x, 0) = \cos\left(\frac{2\pi}{a}\right) \exp\left[-\ln(2)\left(\frac{x}{b}\right)^2\right], \quad u(x, 0) = \frac{1}{\rho_0 c} p(x, 0)$$

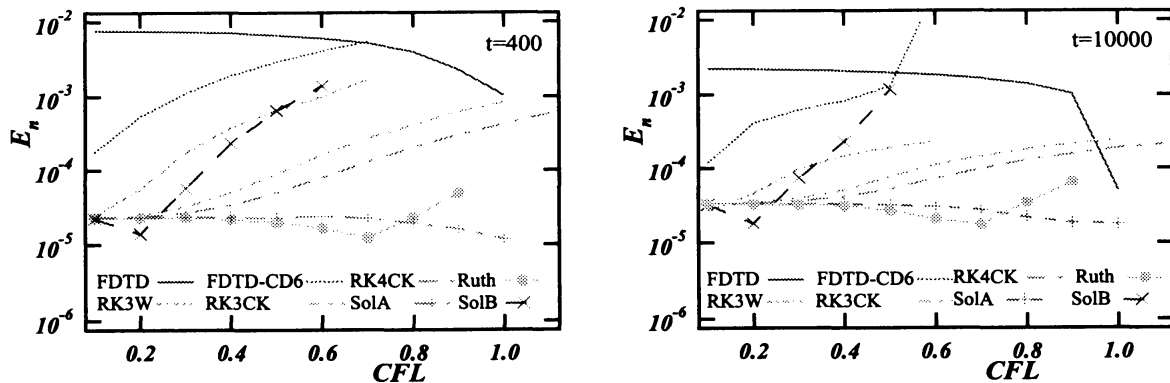


Figure 4: Numerical error E_n as a function of σ

($a = 10, b = 12, \Delta x = 1, \rho_0 = 1, c = 1$) の解を時刻 $t = 800$ において求める問題⁽²⁰⁾を、同じように長時間積分 $\rightarrow t = 1000, 10000$ に拡張する. ($-50 \leq x \leq t + 50, \Delta x = 1.0$).

4つの3段3位のシンプレティック積分法, ルース法, マクララン係数, 解 A, 解 P と, 代表的な6段4位のLDD-RK法, スタニスク, ハバシによる方法⁽¹⁸⁾, カルボらによる方法⁽¹⁹⁾, ベーラント, ボギー, バイリー⁽²⁰⁾による方法を比較した. 図5に示すように, 位相誤差の小さいふたつの方法, 解 A と解 P 以外は波形のずれが目立つ結果となった.

図6の E_n からは, 図4と類似の傾向が観察できる. 最近のLDD-RK法は広い安定性領域をもっているが, クーラン数を大きくすると, 誤差が増加する. それに対して, 低分散シンプレティック法(解 P)は安定性の限界は低い, 安定な範囲で誤差がクーラン数によらずにほとんど一定なレベルに保たれる. ルース法と解 A が特定のクーラン数で E_n を小さくする理由は, いまのところ不明だが, 空間の離散化(コンパクト差分のフーリエ表式)と関係のあることが考えられる.

LDD-RK法とシンプレティックPRK法の性能をまとめるために, 表3にそれぞれの安定性, 散逸誤差, 分散誤差の上限を比較する. 計算時間については, 右辺の計算回数(function evaluation)を比較すると, 音の波に対して3段PRK法が $3(n+1)$, LDD-RK46法が $6n$ (n は次元)となる. 低分散シンプレティックPRK法は代表的なLDD-RK法に匹敵する, あるいはそれ以上の性能であることが示唆される.

5 おわりに

結果を要約すると, 3段3位のPRK法をとりあげて

- 1) シンプレクティシティ条件に新しい解が存在すること,
- 2) このクラスのSIAで位相誤差を最小にする(新しい)解があること,
- 3) それらの新しい係数のSIAと, いくつかの代表的なLDD-RKを比較した結果

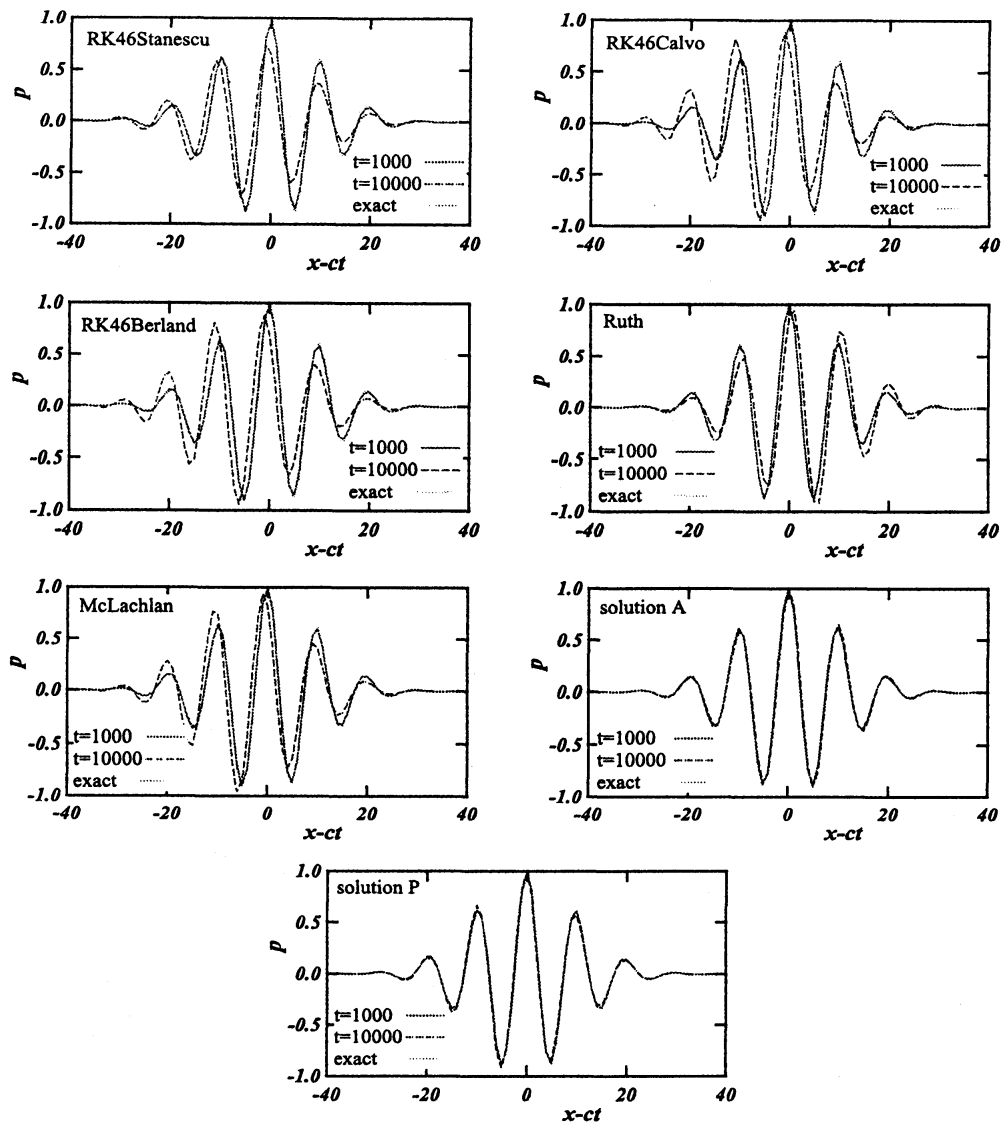


Figure 5: p vs. $x' = x - ct$.

について、報告した。波束の伝播を計算する問題で比較をおこなうと、低分散シンプレティック PRK の方が LDD-RK よりもよい精度を示した。

この結果は、波の問題にシンプレティック法を適用するときには位相誤差の小さいことが重要であることを示している (振動的な常微分方程式についてはハイラー⁽⁹⁾の第 8 章参考)。過去の文献を調べると、幾何学的な側面が強調されている一方で、位相誤差について述べているものが少ない。粒子法などの積分では不変面が壊されない、エネルギーの誤差のドリフトが生じないことがより大事であったことの反映と推測される。

ところで、系の振動数があらかじめわかっているときに、ほとんど厳密に積分できる方法として Trigonometric Fitting (TF) 法⁽²¹⁾ が提案させている。TF 法は系の発

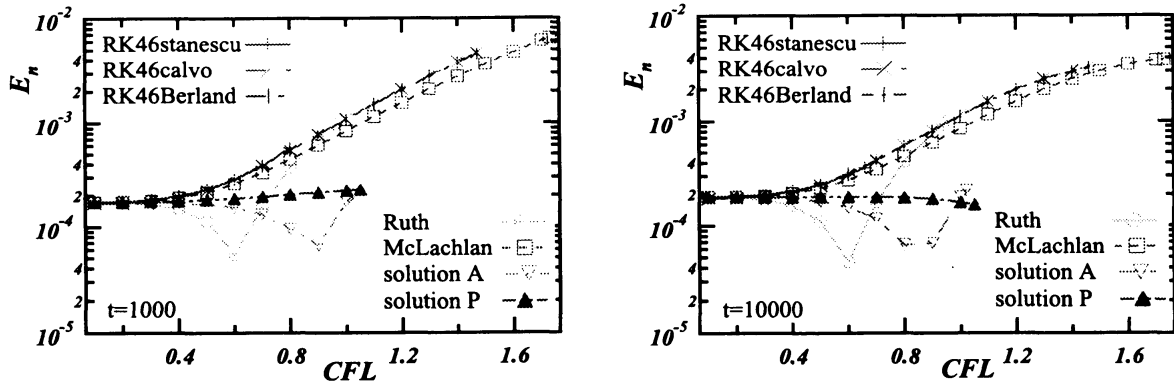


Figure 6: Numerical error E_n at $t = 1000$ and $t = 10000$

展が厳密解

$$y(t_0 + h) = e^{i\omega h} y(t_0)$$

に一致するように係数に条件を課する。これだけだと係数の数 $2s$ に対して条件式の数がたりないので、残りの $(2s - 4)$ 個 (式 3,4 の場合) の係数は s 段シンプレティック積分法と同じにするようにして係数の値を定める。この方法によると位相誤差をほとんど 0 にできる。

しかし、複数の振動数がふくまれるような場合、TF 法は通常の積分法と同様の代数的な誤差レベルに落ちてしまう。そこで今後、

- 1) 位相誤差最小の係数をもとにした TF 法
- 2) あらかじめ音のスペクトルがわかっているような場合や、対象とする音域が限定されるような場合にシンプレティック-TF 法の係数 (ν の関数) を振動数領域で積分することによって、その音域で平均的に誤差を小さくすることができるかどうかについて検討する。

Table 3.

Stability, dissipation error and dispersion error limits of the integration methods

	Stability $ G(\nu) \leq 1$	Dissipation $1 - G(\nu) < 5 \cdot 10^{-4}$	Dispersion $ \nu^* - \nu /\pi < 5 \cdot 10^{-4}$
RK46-Stanescu	1.65	1.18	2.01
RK46-Berland	3.80	1.97	1.53
Ruth	2.51	2.51	1.14
McLachlan	4.52	4.52	1.34
solution A	2.67	2.67	1.41
solution P	2.75	2.75	1.69

参考文献

- (1) Yee, K.S. "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Transactions on Antennas and propagation*, AP-14(3) (1966) 802-807.
- (2) Sha, W., Huang, Z., Wu, X. and Chen, M., "Application of the symplectic finite-difference time-domain scheme to electromagnetic simulation," *J. Comput. Phys.* 225 (2007) 33-50.
- (3) Tam, C.K.W. and Webb, J.C. "Dispersion-relation-preserving schemes for computational acoustics," *J. Comput. Phys.* 107 (1993) 262-281.
- (4) Lele, S.K., "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution," *J. Comput. Phys.*, 103 (1992) 16-42.
- (5) Tsuru, H. and Iwatsu, R., "Accurate numerical prediction of acoustic wave propagation," to appear in *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, (DOI: 10.1002/acs.1118).
- (6) Fu, F.Q., Hussaini, M.Y. and Manthey, J.L. "Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics," *J. Comput. Phys.*, 124 (1996) 177-191.
- (7) 岩津玲磨, 鶴秀生, "時間領域音響計算に用いる compact 差分と多段階積分法の最適化," *複雑流体の数理解析とシミュレーション*, 数理解析研究所講究録 1539, 1-14, 2007.
- (8) 鶴秀生, 岩津玲磨, "音響設計のための時間領域差分法の高精度化," *非線形波動現象の数理解析と応用*, 数理解析研究所講究録 1645, 177-188, 2009.
- (9) Hairer, E., Lubich, C. and Wanner, G., *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, second ed., Springer 2006.
- (10) Ruth, D.R., A canonical integration technique, *IEEE Trans. Nuclear Sci.* NS-30, no.4 (1983) 2669-2671.
- (11) Yoshida, H., Construction of higher order symplectic integrators, *Phys. Lett. A*, 150 (1990) 262-268.
- (12) Takahashi, K. and Ikeda, K., Applicability of symplectic integrator to classically unstable quantum dynamics, *J. Chem. Phys.* 99 (1993) 8680-8694.
- (13) McLachlan, R.I. and Atela, P., The accuracy of symplectic integrators, *Nonlinearity* 5 (1992) 541-562.
- (14) Iwatsu, R., Two new solutions to the third-order symplectic integration method, *Phys. Lett. A* 373 (2009) 3056-3060 (DOI:10.1016/j.physleta.2009.06.048).
- (15) Hardin, J.C. *et al.* (Eds.) "ICASE/LaRC Workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics," NASA CP-3300, 1995.
- (16) Williamson, J.H., Low-storage Runge-Kutta schemes, *J. Comput. Phys.*, 35, (1980) pp.48-56.

- (17) Carpenter, M.K. and Kennedy, C.A., "Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes," NASA TM 109112, 1994.
- (18) Stănescu, D. and Habashi, W.G., 2N-storage low-dissipation and dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.* 143 (1998) 674-681.
- (19) Calvo, M., Franco, J.M. and Rández, L., A new minimum storage Runge-Kutta scheme for computational acoustics, *J. Comput. Phys.* 201 (2004) 1-12.
- (20) J. Berland, C. Bogey, and C. Bailly, Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm, *Comput. Fluids* 35 (2006) 1459-1463.
- (21) Monovasilis and Simos, Symplectic and trigonometrically fitted symplectic methods of second and third order, *Phys. Lett. A*, 354, (2006) 377-383.