

## 渦運動と音波：Hill の球形渦の場合

東北大 流体研 服部裕司 (Yuji Hattori)  
Institute of Fluid Science, Tohoku University

### Abstract

Hill の球形渦は、Euler 方程式の厳密解の中でもユニークな特徴をもつ。筆者はこれまでに Hill の球形渦に関係する研究をいくつか行ってきた。本稿では、渦運動と音波 150 年にあたり、渦動力学研究と空力音研究における Hill の球形渦の価値を論じる。

## 1 はじめに

Hill の球形渦は、Euler 方程式の厳密解の中でも古くから知られているものの一つである。Hill の球形渦は、円筒座標系において (Stokes の) 流れ関数により次式により与えられる

$$\begin{aligned}\Psi(r, z) &= \frac{3U}{4R_0^2} r^2 (r^2 + z^2 - R_0^2), \quad (r^2 + z^2)^{1/2} < R_0, \\ &= -\frac{U}{2R_0^2} r^2 \left[ 1 - \frac{R_0^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right], \quad (r^2 + z^2)^{1/2} > R_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Hill の球形渦の特徴の一つは、渦度が球内部、すなわち 3 次元的にコンパクトな領域にのみあることである。陽的な式により表現される厳密解でこの性質を持つものは少ない。そのため、理論的な取り扱いにおいてモデルとして用いるのに適している。

渦度は球内部で軸からの距離に比例する大きさとなる。これは、実験で生成・観察される渦輪のそれとは異なると考えられることが多いようである。しかしながら、液体中の球形気泡内部の流れや気泡背後の流れは、しばしば Hill の球形渦によりよく近似できるとされている。

筆者はこれまでに Hill の球形渦を対象とした研究や用いた研究をいくつか行ってきた [1, 2, 3]。本稿では、これらを振り返ることにより、渦動力学研究と空力音研究における Hill の球形渦の価値を論じる。

## 2 Hill の球形渦による音波の散乱

渦による音波の散乱問題を取り扱う [1]。Fig. 1 のように平面音波が渦と相互作用する問題を考える。流れはエントロピーが一様の圧縮性流れとする。渦の速度場として Hill の球形渦のものをを用いる。

### 2.1 散乱振幅の理論式による予測

散乱音波  $p_s$  を、渦から十分遠い位置において、音圧  $p - p_0$  から入射平面音波  $p_i$  を引き去ったものとして定義する。散乱音波は

$$p_s(r, \theta, t) = \frac{|p_i|}{r} f(\theta) e^{i\omega(t-r/c_0)},\tag{2}$$

の形にあらわされると考えられる。散乱角度依存性は  $f(\theta)$  によりあらわされる。

Kambe and Mya Oo (1981)[4] は Lighthill の音響学的アナロジーに基づく Born 近似により  $f$  を以下のように求めた

$$f_1(\theta) = -\frac{\omega_s^2}{2\pi(1 - M_v \cos \theta)c_0^3} V_n(\kappa_0) \cos \theta,\tag{3}$$

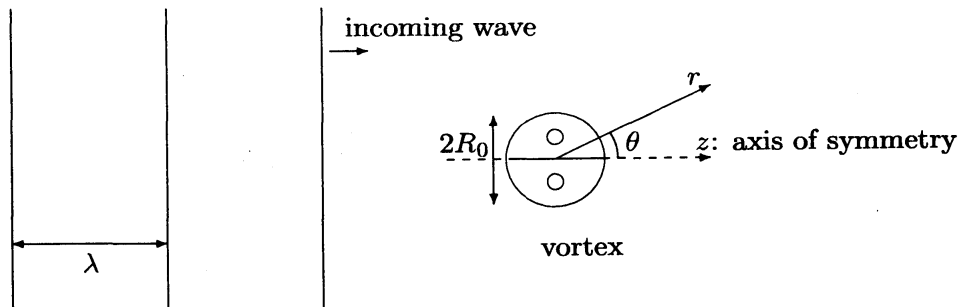


Figure 1: 問題設定

ただし、 $M_v$  は渦の進行速度に基づく Mach 数であり、 $V_n(\mathbf{k})$  は  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  の Fourier 変換である。

上の式 (3) は、分母にドップラー効果の因子をもつ。これは主要項の大きさが  $O(M_v)$  であるのに対し、 $O(M_v^2)$  の項も含んでいることを意味する。しかしながら、音響学的アナロジーにおいて散乱の源となる Lighthill テンソルは、

$$T_{ij} = (\rho^V + \rho^L)(v_i + u_i^L)(v_j + u_j^L) + (p^L - c_0^2 \rho^L) \delta_{ij} \quad (4)$$

$$= \rho^V v_i v_j + \rho^V (u_i^L v_j + v_i u_j^L) + \rho^L v_i v_j + \rho^L (c^2 - c_0^2) \delta_{ij} \\ + O(\rho_0 a M^3 c_0^2, \rho_0 a^2 c_0^2), \quad (5)$$

のようにならわされる。ただし、 $\rho = \rho^V + \rho^L$ ,  $p = p^V + p^L$ ,  $c^2 = \gamma p^V / \rho^V$  であり、上付きの  $V$  は渦による定常場、 $L$  は音波によるものをあらわす。 $\rho^L v_i v_j$  や  $\rho^L (c^2 - c_0^2) \delta_{ij}$  からも  $O(M^2)$  の寄与があるが、これは Kambe and Mya Oo (1981)[4] では考慮されていない。これを考慮して「改良された」Born 近似を  $f_1$  に次の  $f_2, f_3$  を加えたものとする

$$f_2(\mathbf{n}) = -\frac{\omega^2}{4\pi c_0^4} \frac{1}{1 - M_v \cos \theta} n_i n_j \tilde{B}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_0), \quad (6)$$

$$f_3(\mathbf{n}) = -\frac{\omega^2}{4\pi c_0^4} \frac{1}{1 - M_v \cos \theta} \tilde{C}(\boldsymbol{\kappa}_0), \quad (7)$$

ただし、 $\tilde{B}_{ij}(\mathbf{k})$  および  $\tilde{C}(\mathbf{k})$  はそれぞれ  $u_i u_j$  および  $c^2 - c_0^2$  の Fourier 変換である。

一方漸近接続展開 (Matched Asymptotic Expansion) を用いると次のような表式を得る [5, 6]

$$p_s = -\frac{|p_i| \omega^2 I}{c_0^3 4\pi} \cos \vartheta (\cos \vartheta + \cos \mu) \frac{e^{i(\mathbf{k}r + \mathbf{k}x_c - \omega t)}}{r} + O(r^{-2}). \quad (8)$$

ただし、

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (9)$$

である。この式は波長が長いとき Born 近似と一致する。

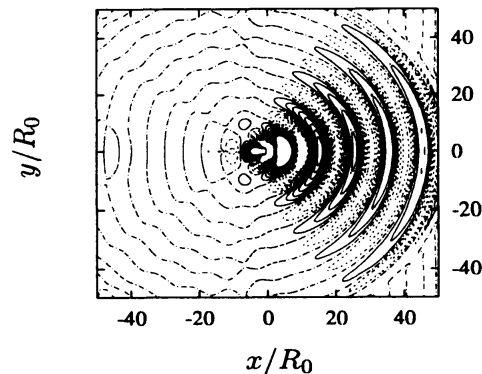


Figure 2: 散乱音波  $p_s$  の等値線図。実線、一点鎖線、破線はそれぞれ  $+$ ,  $0$ ,  $-$  に対応する。

## 2.2 DNS との比較

Fig. 2 に直接数値計算 (DNS) により得られたある瞬間における散乱音波の音圧の等値線図を示す。Hill の球形渦を中心として、入射音波の進行方向  $\theta = 0$  の両側に散乱振幅の大きい領域が扇状に広がっているのがわかる。また、散乱振幅は中心からの距離に反比例して減衰することも確かめられている。

Fig. 3 に散乱振幅の角度依存性を示す。(a) ~ (d) は Hill の球形渦の場合、(e), (f) は比較のために渦核において渦度が Gauss 分布をもつ渦輪の場合である。波長が大きく、Mach 数が小さい場合、いずれの理論式も DNS により得られる散乱振幅をよく予測する。波長が短くなるか Mach 数が大きくなると理論式の予測値に差が生じる。例外はあるものの、全般に改良された Born 近似がもっともよい予測を与える。また、Hill の球形渦と Gauss 型の渦輪の差は大きくはない。これは、入射音波の波長が渦の半径 (球半径) と同程度かそれよりも大きいため、波長よりも小さい構造の差があらわれにくいことによると考えられる。

## 3 Hill の球形渦の安定性

われわれは以前細い渦輪の線形安定性を解析的に調べ、曲率不安定性と呼ぶべき新しい不安定性を発見した [7, 8]。この不安定性のメカニズムは次のように説明される。細い渦輪の速度場を、渦核半径と渦輪半径の比を展開パラメタとして摂動展開により表現するとき、展開の最初の項は中立安定な直線渦であり、その次に双極子場があらわれる。直線渦上に立つ Kelvin 波の組が双極子場によってパラメタ不安定となるのである。双極子場は渦輪の渦管としての曲がりにより誘起される。

では、渦管が曲がっていれば曲率不安定となるであろうか? われわれはこの問題にさまざまな角度から取り組んでいる。「曲がり」に「振り」を加えたらせん渦においては、細い渦輪同様に曲率不安定性が存在することが示された [9]。ここでは太い渦輪である Hill の球形渦に関して、やはり曲率不安定性が存在するかどうか、新しい不安定性があるかどうかについて調べ

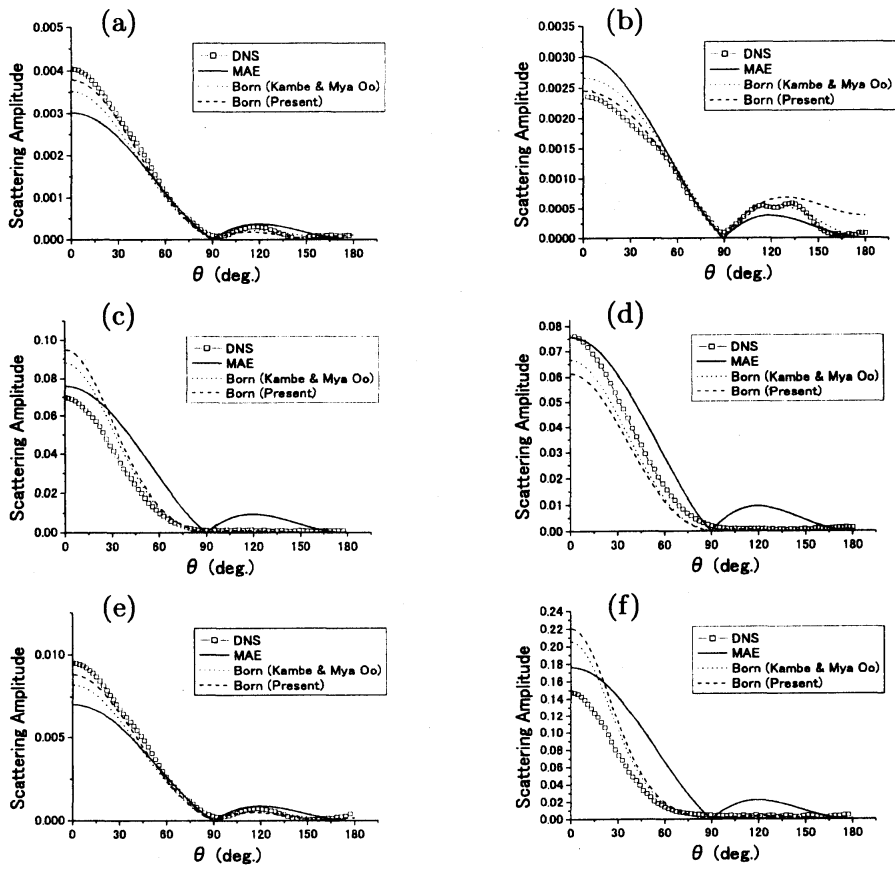


Figure 3: 散乱振幅。  $r/R_0 = 20$ . (a)  $\lambda/R_0 = 10, M_v = 0.15$ , (b)  $\lambda/R_0 = 10, M_v = -0.15$ , (c)  $\lambda/R_0 = 2, M_v = 0.15$ , (d)  $\lambda/R_0 = 2, M_v = -0.15$ , (e) Gauss 型,  $\lambda/R_0 = 10, M_v = 0.15$ , (f) Gauss 型,  $\lambda/R_0 = 2, M_v = 0.15$ . 四角形: DNS, 直線: MAE, 点線: Born 近似, 破線: 改良された Born 近似。

る。さらに、軸流(トロイダル方向の速度成分)の効果、Moffatt (1969)[10] の解

$$\Psi(r, z) = r^2 \left[ \frac{\lambda}{\alpha^2} + A \left( \frac{R_0}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^{3/2} J_{3/2}(\alpha \sqrt{r^2 + z^2}) \right], \quad (10)$$

$$u_\theta = \frac{\alpha}{r} \psi. \quad (11)$$

を利用して調べた結果をまとめる [2]。

### 3.1 手法: 局所安定性解析

Hill の球形渦の線形安定性を局所安定性解析により調べる。局所安定性解析では、安定性は次の常微分方程式系を解くことで調べることができる

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}), \quad (12)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\mathcal{L}^T \mathbf{k}, \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left( \frac{2\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} - I \right) \mathcal{L}\mathbf{a}, \quad (14)$$

ただし、 $\mathcal{L}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  である [11, 12]。この方程式は線形化された Euler 方程式において、擾乱を  $\mathbf{u}' = \exp[i\Phi(\mathbf{x}, t)/\delta] (\mathbf{a} + O(\delta))$  の形に仮定し、パラメタ  $\delta$  が小さい (= 短波長) として展開した式から導かれる。 $\mathbf{k} = \nabla\Phi(\mathbf{X}(t), t)$  が波数ベクトル、 $\mathbf{a}$  が振幅をあらわす。

上の方程式から次の形の方程式を導くことができる

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + V(t)q = 0, \quad (15)$$

$$V(t) = \frac{2\omega_\theta k_\theta^2 \mathbf{k}_\perp^T \mathcal{H} \mathbf{k}_\perp}{k_\perp^2 k^2} + \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \log \frac{k_\perp}{k} \right) + \frac{d}{dt} (\text{tr} \mathcal{L}_\perp) \right] - \left[ \frac{d}{dt} \left( \log \frac{k_\perp}{k} \right) + \text{tr} \mathcal{L}_\perp \right]^2, \quad (16)$$

$$q = \frac{k}{k_\perp} \mathbf{k}_\perp \times \mathbf{a}_\perp, \quad \mathcal{H} = \mathcal{L}_\perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

ここで、 $\perp$  は  $(r, z)$ -平面への射影であり、 $k = |\mathbf{k}|$ ,  $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$  である。式 (15) を Hill-Schrödinger 方程式とよぶ [13]。

ここでは指数不安定を取り扱うこととする。すると波数ベクトルは時間周期的でなくてはならない。軸流がない Hill の球形渦の場合、これは  $\mathbf{k}(0) \cdot \mathbf{u}(0) = 0$  を意味する。よって、流体粒子運動の初期位置を  $z = 0$  に選べば  $u_r(0) = 0$  であり  $k_z(0) = 0$  となる。そこで、波数ベクトルの初期条件を

$$\mathbf{k}(0) = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

のように選ぶ。軸流がある場合には、周期的であるためには

$$\left( u_\theta(0) - r \frac{\Theta'(\Psi)}{T'(\Psi)} \right) k_\theta(0) + u_z(0) k_z(0) = 0, \quad (19)$$

が満たされなくてはならない [14]。ここで  $T(\Psi)$  は流体粒子運動の  $(r, z)$ -平面における周期であり、また  $\Theta(\Psi) = \theta(t+T) - \theta(t)$  である。そこで、波数ベクトルの初期条件を

$$\mathbf{k}(0) = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \cos \phi \\ \sin \chi \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \tan \phi = \frac{k_{z0}}{k_{\theta 0}} = -\frac{u_\theta(0) - r\Theta'(\Psi)/T'(\Psi)}{u_z(0)}. \quad (20)$$

のように選ぶ。

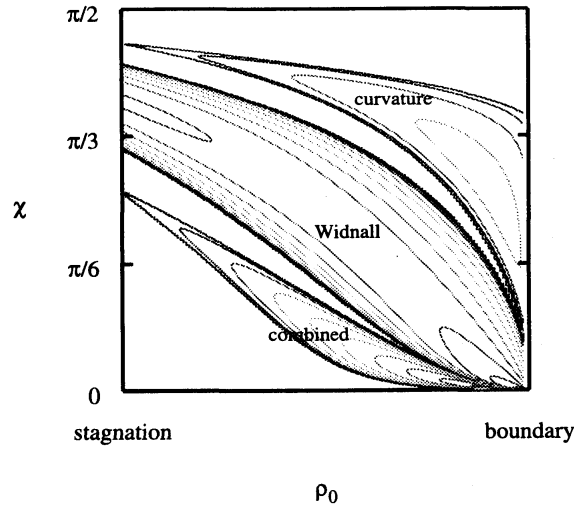


Figure 4:  $(\rho_0, \chi)$ -平面における不安定成長率の等高線図 (軸流なし). “stagnation” は  $\rho_0 = 0$  に、“boundary” は  $\rho_0 = r_0$  に対応する。

## 3.2 結果

式 (12)–(14) を数値的に解く。初期条件は 2 個のパラメタを含む。一つは流体粒子の初期位置を  $(r, z) = (r_0 - \rho_0, 0)$  のように決める  $\rho_0$  である ( $(r_0, 0)$  はよどみ点; 軸流がない場合は  $r_0 = R_0/\sqrt{2}$  である)。もう一つは式 (18) または (20) にあらわれる波数ベクトルの角度  $\chi$  である。

### 3.2.1 軸流がない場合

Fig. 4 に軸流がない場合の不安定成長率の等高線図を示す。3 個の不安定領域があらわれている。各領域はよどみ点付近では細い渦輪の場合 [8] と同様にパラメタ共鳴の条件  $\cos \chi = n/4$  により決まる角度を中心としてあらわれている。 $(\rho_0, \chi) = (0, \cos^{-1}(1/4) \approx 0.42\pi)$  から伸びるものが曲率不安定性に、 $(\rho_0, \chi) = (0, \cos^{-1}(2/4) = \pi/3)$  から伸びるものが Widnall 不安定性に対応する。 $(\rho_0, \chi) = (0, \cos^{-1}(3/4) \approx 0.23\pi)$  から伸びるものは細い渦輪において見られたものとは異なる新しい不安定性で、後述の理由により結合モードと呼ぶ。細い渦輪の場合に比して、不安定領域の幅が広い。各領域間の幅は境界に近づくと小さくなるが、領域が融合することはない。

Fig. 5 に各不安定領域の成長率の極大値を  $\rho_0$  の関数として示す。Widnall 不安定性の成長率は  $\rho_0$  に強く依存しないのに対して、曲率不安定性と結合モードの成長率はよどみ点付近で線形的に振る舞う。よどみ点付近では同程度の値をもつが、 $\rho_0$  が大きくなると結合モードの成長率が大きくなり、境界付近で Widnall 不安定性よりも大きくなる。

Fig. 4 の第 3 の不安定領域を結合モードと呼ぶ理由を以下に述べる。Hill の球形渦の流線はよどみ点付近でも大きく楕円にひずんでいる (よどみ点付近でのアスペクト比は 2 である)。したがって、よどみ点付近で Widnall 不安定性を引き起こすひずみ流の強さは  $O(1)$  である。一方、曲率不安定性を引き起こす双極子場は軌道 (平均) 半径に比例する強さをもつ。具体的には、 $(r, z)$ -平面でよどみ点を中心とする極座標  $(r, z) = (r_0, 0) + \rho(\cos \varphi, \sin \varphi)$  で速度場を表現

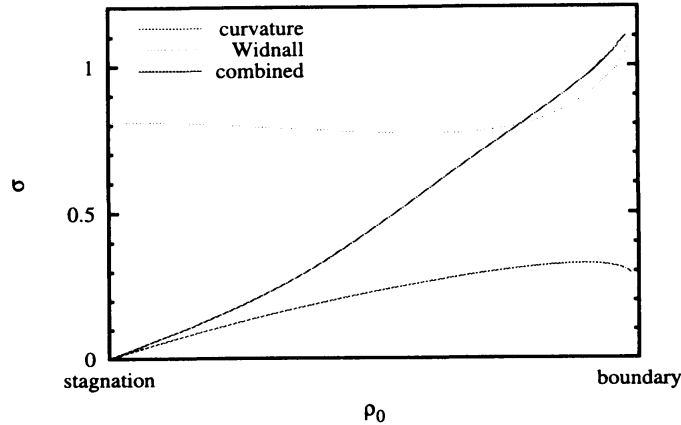


Figure 5: 極大不安定成長率 (軸流なし)。

すると

$$\rho = \frac{3U}{2} \left( \frac{\rho}{R_0} \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin 2\varphi + \frac{\rho^2}{R_0^2} \sin \varphi \right), \quad (21)$$

$$u_\varphi = \frac{3U}{2} \left[ \frac{\rho}{R_0} \left( \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos 2\varphi \right) + 2 \frac{\rho^2}{R_0^2} \cos \varphi \right], \quad (22)$$

となる。 $\cos 3\varphi, \sin 3\varphi$  など 3 以上の角波数をもつ項があらわれないことに注意していただきたい。つまり、結合モードは 3 次の場によって引き起こされるものではない。上の速度場と局所安定性解析の式から、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と行列  $\mathcal{L}$  は流体粒子運動の周期の 2 倍の周波数の強い振動成分をもつ:  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 e^{2i\omega t} + (\rho/R_0) \mathbf{k}_1 e^{i\omega t} + \dots + \text{c.c.}$  このとき、(15) にあらわれるポテンシャル  $V(t)$  は

$$V(t) = V_0 + V_2 e^{2i\omega t} + V_4 e^{4i\omega t} + \dots \\ + \frac{\rho}{R_0} (V_1 e^{i\omega t} + V_3 e^{3i\omega t} + \dots) + O\left(\frac{\rho^2}{R_0^2}\right), \quad (23)$$

のような形を取るであろう。(16) における演算の結果として  $V_3$  などの高次の項があらわれることに注意していただきたい。つまり、双極子場とひずみ流が「結合して」引き起こすのが結合モードである。

### 3.3 軸流がある場合

Fig. 6 に軸流をもつ Hill の球形渦の不安定成長率の等高線図を示す。軸流がない場合と比較すると、よどみ点付近が安定になることがわかる。これはよどみ点付近では軸流が  $O(\alpha)$  の大きさである ( $\alpha$  は軸流の強さをあらわす; 式 (11) 参照) のに対し、非軸流成分は  $O(\rho)$  と小さいため、共鳴条件を満たすことができなくなるためである。 $\alpha < 4$  の範囲では  $\alpha$  の増加とともに安定領域は拡大し、3つの不安定領域は小さくなる。ところが、 $\alpha > 4$  ではよどみ点付近から新たな不安定領域があらわれる。この領域は角度  $\chi$  に強い依存性をもたないことからわかるように、パラメタ不安定によるものではない。これは、軸流をもつ直線渦の「一般化された」遠

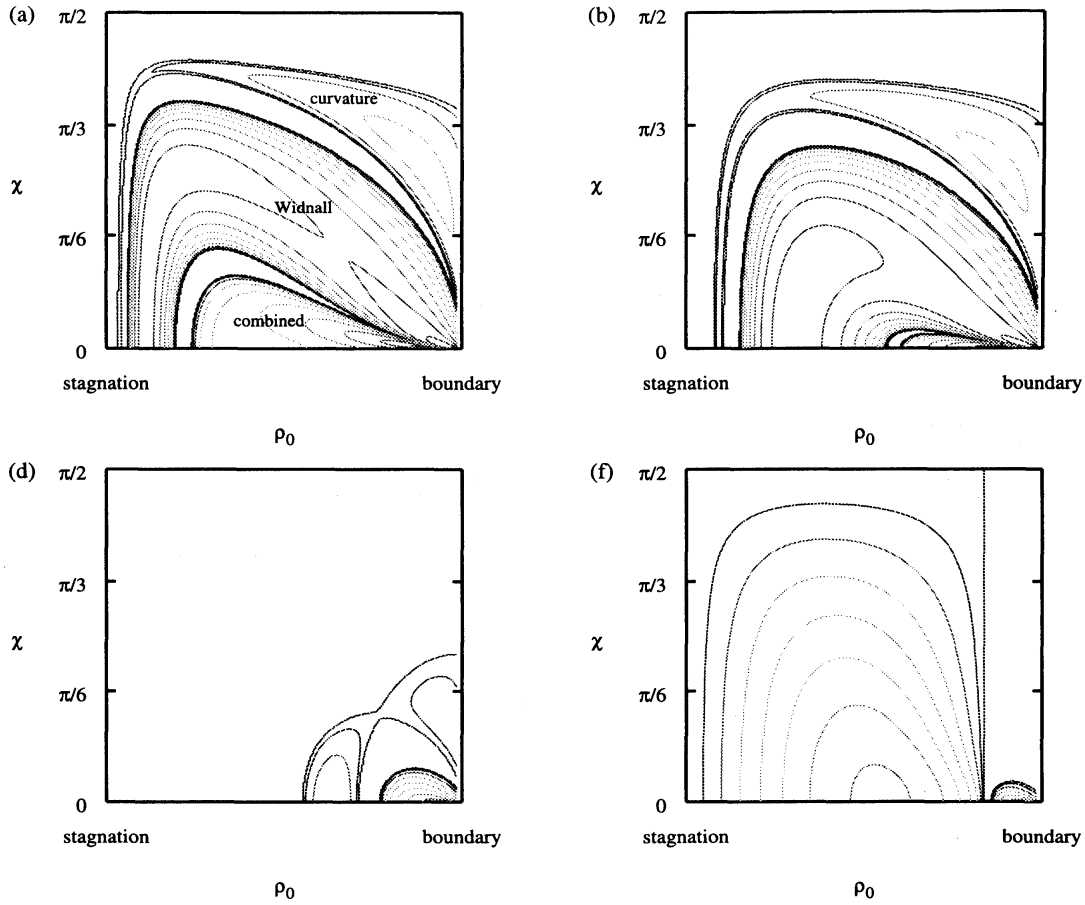


Figure 6:  $(\rho_0, \chi)$ -平面における不安定成長率の等高線図 (軸流あり). (a)  $\alpha = 1$ , (b)  $\alpha = 2$ , (c)  $\alpha = 4$ , (e)  $\alpha = 4.4$ .

心力不安定性 [15, 14] に対応する。この不安定性の条件は

$$u_\varphi \frac{d}{d\rho} \left( \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \frac{d}{d\rho} (\rho u_\varphi) + \left( \frac{du_\theta}{d\rho} \right)^2 \right] < 0, \quad (24)$$

とあらわすことができる ( $\theta$  を軸方向の座標に用いた)。今の場合、Hill の球形渦は直線渦とはかけ離れてはいるが、平均速度を用いて上の条件をあてはめると  $\alpha > \alpha_c \approx 3.2$  が不安定となる。3.2 という値は実際に不安定があらわれる 4 とそう遠くはないので、大雑把ではあるが遠心力不安定性であることが確認できたといえるであろう。

Fig. 7 に曲率不安定性、Widnall 不安定性、結合モードの極大成長率を示す。  $0 \leq \alpha \leq 2$  では成長率の大きさにさほど変化はないが、 $\alpha = 3, 4$  では成長率は小さくなる。

#### 4 Hill の球形渦の MHD への拡張

ここでは Hattori and Moffatt (2006)[3] において報告した磁気渦輪の運動に関する研究から Hill の球形渦の MHD への拡張について述べる。



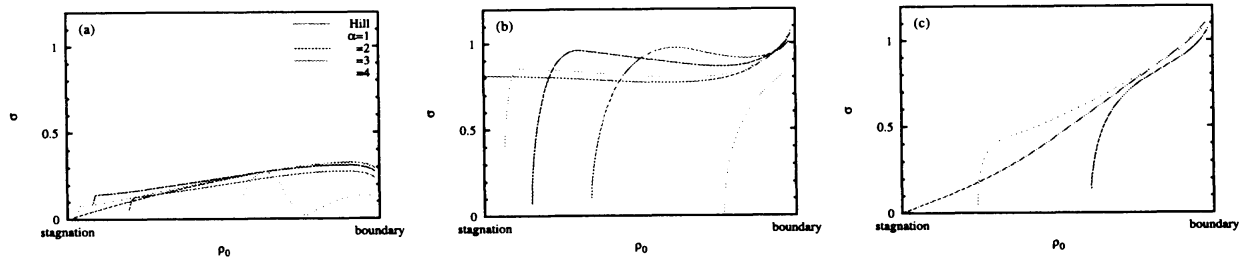


Figure 7: 極大不安定成長率 (軸流あり)。(a) 曲率不安定性, (b) Widnall 不安定性, (c) 結合モード。

#### 4.1 研究の動機

MHD において散逸が無視できる場合、3 個の保存量が存在する:

$$\text{全エネルギー: } E_T = E_H + E_M = \frac{1}{2} \int (u^2 + B^2) dV \quad (25)$$

$$\text{磁気ヘリシティ: } H_M = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \quad (26)$$

$$\text{クロスヘリシティ: } H_C = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (27)$$

磁気エネルギーと磁気ヘリシティの間には次の不等式が成り立つ

$$E_M \geq C |H_M|. \quad (28)$$

ただし、 $C$  は領域の形などによって決まる定数である。つまり、磁気エネルギーは磁気ヘリシティによって決まる下限をもつ。特に、磁気ヘリシティが 0 でなければ、磁気エネルギーは 0 になることができない。

では、磁気ヘリシティが 0 であったら、磁気エネルギーは 0 になるであろうか？ ここで、軸対称でトロイダル方向成分のみをもつトーラス状の磁場 (磁気渦輪と呼ぶ) の運動を考える。ローレンツ力がはたらく結果、磁気渦輪は対称軸に向かって収縮し (ただし体積は保存される)、磁気エネルギーは 0 になるように思われる。ところが、ある厳密解の族によって近似される球状の構造が形成され、これが有限のエネルギーを保持する結果、磁気エネルギーは (少なくとも数値計算の時間範囲内では) 0 にならないことが示された [3]。

ここで登場する厳密解の族が Hill の球形渦の MHD への拡張である。

#### 4.2 contour dynamics による定式化

MHD にしたがう電磁流体を考える。以下の仮定を置く:

- 散逸はない
- 非圧縮性である
- 軸対称である
- 速度場はポロイダル成分のみをもつ: 円筒座標系  $(r, \theta, z)$  で  $\mathbf{u} = (u_r(r, z, t), 0, u_z(r, z, t))$ ,
- 磁場はトロイダル成分のみをもつ:  $\mathbf{B} = (0, B_\theta(r, z, t), 0)$

- $t = 0$  で磁場の大きさはある有界領域でのみ非ゼロであり、対称軸  $r = 0$  からの距離に比例する:

$$\begin{aligned} B_\theta &= \kappa r, & f(r, z, t) > 0 \\ &= 0, & f(r, z, t) < 0 \end{aligned}$$

上の仮定は consistent である。すなわち、速度場のトロイダル成分や磁場のポロイダル成分が出現することはない。また、最後の性質が  $t > 0$  でも成り立つことは  $B_\theta$  が

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{B_\theta}{r} \right) = 0, \quad (29)$$

にしたがうことからわかる (非ゼロの磁場をもつ領域は変形・運動する)。

このとき、方程式は以下の contour dynamics に帰着される

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa^2 R \frac{\partial R}{\partial s}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = u_r(R(s, t), Z(s, t), t), \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = u_z(R(s, t), Z(s, t), t), \quad (31)$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{r} \oint \gamma(s, t) \left[ \frac{\partial}{\partial z} G(r, z | R(s, t), Z(s, t)) \right] ds, \quad (32)$$

$$u_z(r, z) = \frac{1}{r} \oint \gamma(s, t) \left[ \frac{\partial}{\partial r} G(r, z | R(s, t), Z(s, t)) \right] ds. \quad (33)$$

ただし、磁場領域の境界  $f = 0$  を  $s$  をパラメタとして  $(r, z) = (R(s, t), Z(s, t))$  によりあらわしている。

### 4.3 厳密解の族

上の式 (30)–(33) は

$$\Psi(r, z_*) = \begin{cases} \frac{3U_0' r^2}{4} [1 - (\sigma/R_0)^2] & \sigma < R_0, \\ -\frac{U_0 r^2}{2} [1 - (R_0/\sigma)^3] & \sigma > R_0, \end{cases} \quad (34)$$

によりあらわれる定常な厳密解をもつ。ただし、 $\sigma^2 = r^2 + z_*^2$  であり、 $(r, z_*) = (r, z - U_0 t)$  は一定速度で運動する座標系である。全圧が球面  $\sigma = R_0$  上で連続であるためには

$$U_0^2 - U_0'^2 = \left( \frac{2}{3} \kappa R_0 \right)^2 \quad (35)$$

が満たされなくてはならない。

上の解は、球  $\sigma = R_0$  の外部は速度  $U_0$  の Hill の球形渦、内部は速度  $U_0'$  の Hill の球形渦となっている。特に  $U_0 = U_0'$  の場合は磁場もなく ( $\kappa = 0$ ) Hill の球形渦そのものとなる。 $U_0 = -U_0'$  の場合にも  $\kappa = 0$ , つまり磁場がない。これは古典的な Hill の球形渦においては、渦層の存在を許せば内部の流れだけをそっくり向きを変えても定常解となることを意味している。 $|U_0| \neq |U_0'|$  の場合に、球表面上に存在する渦層は、磁場とともに球内部の流れを  $U_0$  で並進させるように作用する。

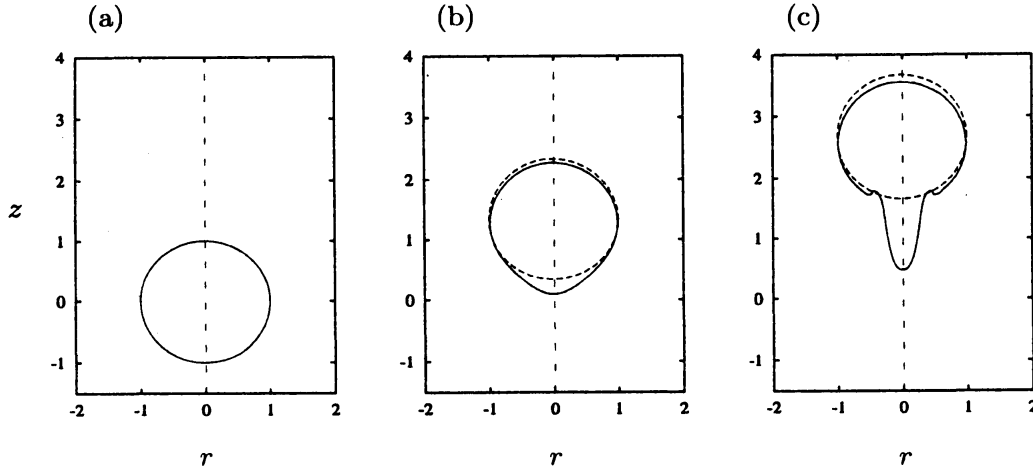


Figure 8: Hill の球形渦の MHD への拡張解の数値解。実線が数値計算、破線が厳密解をあらわす。(a)  $t = 0$ , (b)  $t = 2$ , (c)  $t = 4$ .

上の解は、無限遠で流れが静止している系では有限のエネルギーをもつ:

$$E_H = \pi R_0^3 \left( U_0^2 + \frac{3}{7} U_0'^2 \right) = \pi R_0^3 U_0^2 \left( \frac{10}{7} - \frac{4\kappa^2 R_0^2}{21U_0^2} \right), \quad (36)$$

$$E_M = \frac{3}{5} \pi R_0^3 \left( U_0^2 - U_0'^2 \right) = \frac{4}{15} \pi \kappa^2 R_0^5, \quad (37)$$

$$E_T = \pi R_0^3 \left( \frac{8}{5} U_0^2 - \frac{6}{35} U_0'^2 \right) = \pi R_0^3 U_0^2 \left( \frac{10}{7} + \frac{8\kappa^2 R_0^2}{105U_0^2} \right). \quad (38)$$

特に、 $U_0' = 0$  の場合は

$$E_H = \pi R_0^3 U_0^2, \quad E_M = \frac{3}{5} \pi R_0^3 U_0^2, \quad E_T = \frac{8}{5} \pi R_0^3 U_0^2, \quad (39)$$

となり、磁気エネルギーと運動エネルギーの比は  $E_M/E_H = 3/5$  である。

contour dynamics による定式化を用いて厳密解を数値的に確かめた結果を Fig. 8 に示す。 $t = 0$  で  $U_0' = 0$  の解を与えている。 $t = 2, 4$  で進行方向と逆の側から尾が伸びているのがわかる。これは Moffatt and Moore (1978)[16] により理論的に発見され、Pozrikidis (1986)[17] により数値的に確かめられた代数的な不安定性と同じものと考えられる。

## 5 おわりに

Hill の球形渦に関する三つの話題を紹介した。最後にその役割についてコメントする。

Hill の球形渦の最大の特徴は場が簡単な式によりあらわされることである。解析的な取り扱いをする上ではとても都合がよい。そのため、音波の散乱においては漸近接続展開法で各次数の解を陽的に得ることができた。渦の安定性においても、局所安定性解析の式にあらわれる速度の空間微分は高い精度の取り扱いが必要であるが、Hill の球形渦の場合にはこれを厳密に求めることができた。さらに、軸流の効果も容易に調べることができた。また渦輪としては、渦核が球の内部全体にひろがっている太い渦輪であることも特徴の一つである。これは数値計

算を行う際には、格子点を節約することができる点で有利である。ただし、実際には球表面で渦度の不連続をもつことが問題となることもある。

Hill の球形渦は、渦輪のモデル、あるいは一般にコンパクトな渦度をもつ渦流れのモデルとして大変有用である。MHD への拡張版も含めて、理論解析、数値シミュレーションにおいて、その特徴を活かして積極的に用いることは研究上大いに役立つであろう。

本稿で触れた研究は福本康秀、H. K. Moffatt, S. G. Llewellyn Smith の各氏との共同研究を含んでいる。また一部の研究は科研費 20540379 の援助を受けた。

## References

- [1] Y. Hattori and S. G. Llewellyn Smith, "Axisymmetric Acoustic Scattering by Vortices," *J. Fluid Mech.* **473**, 275–294 (2002).
- [2] Y. Hattori and K. Hijiya, "Short-wavelength Stability Analysis of Hill's Vortex with/without Swirl," *Phys. Fluids*, submitted.
- [3] Y. Hattori and H. K. Moffatt, "Evolution of toroidal magnetic eddies in an ideal fluid," *J. Fluid Mech.* **558**, 253–279 (2006).
- [4] T. Kambe and U. Mya Oo, "Scattering of sound by a vortex ring," *J. Phys. Soc. Japan* **50**, 3507–3516 (1981).
- [5] S. G. Llewellyn Smith and R. Ford, "Three-dimensional acoustic scattering by vortical flows. Part I: General theory," *Phys. Fluids* **13**, 2876–2889 (2001).
- [6] S. G. Llewellyn Smith and R. Ford, "Three-dimensional acoustic scattering by vortical flows. Part II: Axisymmetric scattering by Hill's spherical vortex," *Phys. Fluids* **13**, 2890–3000 (2001).
- [7] Y. Fukumoto and Y. Hattori, "Curvature instability of a vortex ring," *J. Fluid Mech.* **526**, 77–115 (2005).
- [8] Y. Hattori and Y. Fukumoto, "Short-wavelength stability analysis of thin vortex rings," *Phys. Fluids* **15**, 3151–3163 (2003).
- [9] Y. Hattori and Y. Fukumoto, "Short-wavelength stability analysis of a helical vortex tube," *Phys. Fluids* **21**, 014104 (2009).
- [10] H. K. Moffatt, "The degree of knottedness of tangled vortex lines," *J. Fluid Mech.* **35**, 117–129 (1969).
- [11] A. Lifschitz and E. Hameiri, "Local stability conditions in fluid dynamics," *Phys. Fluids A* **3**, 2644–2651 (1991).
- [12] S. Friedlander and M. M. Vishik, "Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2204–2206 (1991).
- [13] B. J. Bayly, D. D. Holm and A. Lifschitz, "Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows," *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **354**, 895–926 (1996).

- [14] A. Lifschitz and E. Hameiri, "Localized instabilities of vortex rings with swirl," *Comm. Pure Appl. Math.* **46**, 1379–1408 (1993).
- [15] S. Leibovich and K. Stewartson, "A sufficient condition for the instability of columnar vortices," *J. Fluid Mech.* **126**, 335–356 (1983).
- [16] H. K. Moffatt and D. W. Moore, "Response of Hill's spherical vortex to a small axisymmetric disturbance," *J. Fluid Mech.* **87**, 749–760 (1978).
- [17] C. Pozrikidis, "The nonlinear instability of hill vortex," *J. Fluid Mech.* **168**, 337–367 (1986).