数理解析研究所講究録
第 1699 巻 2010 年 68-72

Siegel disks of transcendental entire functions and singular values

Shunsuke MOROSAWA
Department of Natural Science,
Faculty of Science, Kochi University

概 要

本稿では超越整関数のジーゲル円板と特異値に関する知られているいくつかの結果を紹介する。

1 ジーゲル円板と特異値

ジーゲル円板とはファトウ集合の不変成分の一つで、単位円板と等角同値であり、その上での写像の作用は単位円板上の無理数回転と共役となるものである。ファトウ集合の不変成分は特異値と密接な関係がある。ここで特異値とは臨界値あるいは漸近値のことである。ジーゲル円板の場合には次のことが言える。

定理 1. ジーゲル円板の境界は、ある特異値の前方軌道の閉包に含まれる。

次数 2 以上の有理関数の場合についてはファトウ [4] が示している。この定理に関して次のような問題がドゥアディ [2] から出された。

問題 2. ジーゲル円板の境界は特異点を含むか？

これに対しギス [6] が次を示した。

定理 3. 回転数がディオファンタス条件を満たし、さらにジーゲル円板の境界がジョルダン曲線であるならば、境界は臨界点を含む。

一方でエルマン [10] は2次多項式でそのジーゲル円板の境界が擬円であるが、臨界点を含まないものを構成した ([3] 参照)。これらのことから、ジーゲル点の回転数の数論的意味や境界の位相的性質が研究対象となって行く。本稿ではこれ以上立ち入らず、初期の参考論文をいくつか挙げておく。[2]、[8]、[9]、[11]、[19]、[20]。

臨界点については次のマニエの定理 [13] に注意しておく。

定理 4. 有理関数のジーゲル円板の境界は、ある再帰臨界点の前方軌道の閉包に含まれる。

2　超越整関数のジーゲル円板

超越整関数を考えると、無限遠点は真性特異点であり、ジュリア集合は非有界となる。無限遠点はジュリア集合に含まれると考える。

正弦関数は超越整関数であるが、特異値は2つの臨界値である。この関数族についてチョウ [21]、[22] は次を示した。

定理 5. $f(z) = e^{2\pi\theta i}\sin(z)$ で θ は有界型無理数であるとする。このとき、このジーゲル円板の境界は擬円であり、その上に2つの臨界値を持つ。

また、$f_a(z) = (e^{2\pi\theta i}z + az^2)e^z$ $(a \neq 0)$ とすると、2つの臨界点とひとつの漸近値 0 を持つが 0 は不動点である。キーンとチョウ [12] は次を示した。

定理 6. θ は有界型無理数であるとすると、原点を中心とするジーゲル円板の境界は擬円であり、その上にいずれかあるいは両方の臨界値を持つ。

指数関数は臨界値を持たず、ただひとつの漸近値を持つ。エルマン、ベーカー、リッポン [1] が次の問題を提出した。

問題 7. $g_\lambda(z) = \lambda(e^z - 1)$、$|\lambda| = 1$ が原点を中心とするジーゲル円板 S_λ を持つとする。
(a) S_λ が $\mathbb{C}$ で有界となる λ が存在することを示せ。
(b) もし S_λ が $\mathbb{C}$ で非有界であれば漸近値 $-\lambda$ は S_λ 上にあるか？

リッポン自身 [18] は2次多項式の時の議論を拡張して、ほとんど全ての λ について g_λ のジーゲル円板の境界上に $-\lambda$ があることを示した。問題 7 (b) の答えはレンペ [16] が与えた。

定理 8. g_λ が非有界ジーゲル円板を持つならば、$-\lambda$ はその境界上にある。

ジーゲル円板が非有界となるかどうかについては、グラチックとシュビィアテック [7] は次を示した。

定理 9. 臨界点を持たない整関数が有界型無理数の回転数を持つジーゲル円板を持てば、それは非有界となる。

奥山 [15] は構造有限型超越整関数についてマニエの定理の一般化を与えている。

参考文献

[1] D. A. Brannan and W. K. Hayman, Research problems in complex analysis, Bull. London Math. Soc., 21 (1989), 1–35.

[2] A. Douady, Systémes dynamiques holomorphic, Séminaire Bourbaki, exp. 599, Astérisque 105-106(1983), 39–63.

[3] A. Douady, Disques de Siegel et anneaux de Herman, Séminaire Bourbaki, Astérisque 152–153 (1987), 151–172.

[4] , P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, Bull. Soc. Math. Fr. 48(1920), 33–94, 208–304.

[5] , L. Geyer, Siegel discs, Herman rings and Arnold family, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2001), 3661–3683.

[6] E. Ghys, Transformation holomorphie au voisinage d'une courbe de Jordan, C. R. Acda. Sc. Paris 289(1984), 385–388.

[7] J. Graczyk and G. Świątek, Siegel disks with critical points in their boundaries, Duke Math. J., 119 (2003), 189–196.

[8] M. R. Herman, Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphére de Riemann, Bull. Soc. math. France, 112 (1984), 93–142.

[9] M. R. Herman, Are there critical points on the boundaries of singular domains?, Commun. Math. Phys., 99 (1985), 593–612.

[10] M. R. Herman, Conjugaison quasi symétrique des difféomorphismes du cercle des rotations et applications aux disques singuliers de Siegel I, http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/Herman/qsconj2/index.html

[11] M. R. Herman, Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of C^n near a fixed point, VIIIth international congress on mathematical physics (Marseille, 1986), 138–184, World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

[12] L. Keen and G. Zhang, Bounded-type Siegel disks of a one-dimensional family of entire functions, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 29 (2009), 137–164.

[13] R. Mañé, On a theorem of Fatou, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 24 (1993), 1–11.

[14] H. Kriete, Herman's proof of the existence of critical points on the boundary of singular domains, Progress in holomorphic dynamics, Pitman Res. Notes Math. Ser., 387 (1998), Longman, 31–40.

[15] Y. Okuyama, Linearization problem on structurally finite entire functions, Kodai math. J., 28(2005), 347–358.

[16] L. Rempe, On a question of Herman, Baker and Rippon concerning Siegel disks, Bull. London math. Soc., 36 (2004), 516–518.

[17] L. Rempe, Siegel disks and periodic rays of entire functions, J. reine angew. Math. 624 (2008), 81–102.

[18] P. J. Rippon, On the boundaries of certain Siegel discs, C. R. Acad. Sci. Paries Sér. I Math., 319 (1994), 821–826.

[19] J. T. Rogers, Jr., Diophantine conditions imply critical points on the boundaries of Siegel disks of polynomials, Commun. Math. Phys., 195 (1998), 175–193.

[20] J. T. Rogers, Jr., Recent results on the boundaries of Siegel disks, Progress in holomorphic dynamics, Pitman Res. Notes Math. Ser., 387(1998), 41–49, Longman, Harlow,

[21] G. Zhang, On the dynamics of $e^{2\pi i\theta}\sin(z)$, Illinois J. Math. 49 (2005), 1171–1179

[22] G. Zhang, An application of the topological rigidity of the Sine family, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 33 (2008), 81–85.