数理解析研究所講究録
第1699巻2010年144-159

複素力学系と作用素環

岡山大学・環境学研究科　梶原 毅 (Tsuyoshi Kajiwara)
Graduate School of Environmental Science
Okayama University

1 序論

本稿は, 綿谷安男氏との共同研究に基づくものであり, 部分的に泉正己氏との共同研究の内容を含む。

複素力学系, 特に有理関数によってリーマン球面上に与えられる非可逆力学系に対して Cuntz-Pimsner 環と呼ばれる C*-環を構成する標準的な手法がある。構成された C*-環は, もとの力学系の性質を反映している。C*-環に対しては, 代数構造を利用して不変量を定義することができる。これによって, もとの力学系に不変量を定義することも期待できる。

有理関数力学系をジュリア集合に制限すると, 作られた C*-環は, 単純かつ純無限という性質を満たし, K-群の情報で分類されることが知られている重要なカテゴリに入る。また, C*-環上に自然に生じるゲージ作用に関する KMS state を分類することにより, もとの力学系のエルゴード的性質をある程度復元することもできる。これらの結果の詳細は, 以前この研究集会で発表し, 講究録でも詳しく述べた。

本稿では, 特に上記の結果に引き続いて得られたことに重点を置いて述べる。

分数乗などの無理関数は有理関数で表すことはできないが, 有理関数の拡張である algebraic correspondence として表現される。algebraic correspondence に対しても, 有理関数と同様に C*-環を定義することができる。ジュリア集合にあたる不変集合が 1 次元トーラスになる場合について, K-群を具体的に計算した。

以前有理関数力学系から作られる C*-環に対して KMS state の分類を行った際に, 分岐点同士のつながり具合など, 分岐点の逆像の情報を復元することはできなかった。今回, C* 環およびゲージ作用から分岐点の逆像の情報を一部取り出すことができたので, これを報告する。

有限グラフは, 記号力学系の類似物と考えることができる。有限グラフが sink, source を持つ場合には, Contz-Pimsner 環を一般化した構成 (Katsura [11]) を行うことができる。この C*-環の KMS state の分類を行うことで, 有理関数力学系における分岐点と, 有限グラフにおける sink, との意外な類似性が明らかになる。

ゲージ作用による固定点 (コア) は, 力学系から作られた C*-環に比較して, もとの力学系の情報をより多く持っていると考えられる。一般にコアの解析は困難であるが, 有理関数力学系が双曲的であるときには, 単純かつ一意的なトレースを持つことを示すことができる。また, マルコフシフトの場合にコアの K-群の情報を用いて定義されていた次元群を拡張した概念を, 有理関数力学系に対して定義することができる。まだ計算例は少ないが, 作用素環の不変量を用いてもとの力学系の不変量を与える試みであり, 意味のある例における計算は今後の課題である。

さらに, 測度力学系, マルコフシフトなどで研究されている軌道同型の概念についても, 研究の端緒についたところであり, その一部を報告する。

2 C*-環からの準備

2.1 C*-correspondence

A を C*-環, X は linear space とする。 $X \times X$ から A への写像 $(x|y)_A$ で次をみたすものを, A 値内積という。

1. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2|y)_A = \alpha_1(x_1|y)_A + \alpha_2(x_2|y)_A, \qquad x_1,\, x_2,\, y \in X,\, \alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$

2. $(x|y)_A = (y|x)^*_A, \quad x,\, y \in X.$

3. $(x|x)_A \in A^+$ であり, $(x|x)_A = 0$ と $x = 0$ が同値。

このとき, X に $\|x\| = \|(x|x)_A^{1/2})\|$ によってノルムを考えることができる。

X に A の右加群構造と, A 値内積 $(x|y)_A$ が定義されていて次を満たすとする。

1. $(x|ya)_A = (x|y)_A a \quad x,\, y \in A, \quad a \in A$。

2. X は $\|\cdot\|$ で完備である。

このとき, X を Hilbert A 加群という。 $A = \mathbb{C}$ のときはヒルベルト空間である。$(x|y)_A$ の形の元の線形結合が A で稠密なとき X は full であるという。

X 上の線形写像 T で, $(Tx|y)_A = (x|Sy)_A$ が任意の $x,\, y$ に対して成り立つような $S = T^*$ が存在するようなもの全体を $\mathcal{L}(X_A)$ とかく. $x,\, y$ に対して

$$\theta_{x,y} z = x(y|z)_A$$

で, one rank operator を定義する。$\{\theta_{x,y}|x, y \in X\}$ によって $\mathcal{L}(X)$ の中で生成される C* 環を $\mathcal{K}(X)$ とかき, コンパクト環という。 $\mathcal{K}(X)$ は $\mathcal{L}(X)$ の閉イデアルである。

X が Hilbert A 加群として, A から $\mathcal{L}(X)$ への準同型 ϕ があるとする。そのとき, (X, ϕ) を, A 上の C*-correspondence と呼ぶ。なお, ここでは ϕ は単射で, 非退化であるとし, また X は full であることも仮定する。

$I_X = \phi^{-1}(\phi(A) \cap K(X))$ は A のイデアルになり, コンパクトイデアルという。 一般には, I_X は A より小さくなり, Cuntz-Pimsner 環の定義のために必要なものである。

2.2 Cuntz-Pimsner 環の構成と例

A を C*-環, A 上の X を C*-correspondence とする。$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間として C*-correspondence の $B(\mathcal{H})$ 上の表現 π とは, C*-環 A の $B(\mathcal{H})$ への *-表現 π_A と X から $B(\mathcal{H})$ への線形写像 π_X の組で, 任意の $x,\, y \in X,\, a \in A$ に対して

$$\pi_X(x)^*\pi_X(y) = \pi_A((x|y)_A), \quad \pi_X(x)\pi_A(a) = \pi_X(xa), \quad \pi_A(a)\pi_X(x) = \pi_X(\phi(a)x)$$

をみたすもののことである。(X, ϕ) の表現 π に対して,

$$\pi_K(\theta_{x,y}) = \pi_X(x)\pi_X(y)^*$$

をみたす $\mathcal{K}(X)$ の $B(\mathcal{H})$ における表現 π_K が一意的に存在する。

そこで, (X, A) の表現で

$$\tilde{\pi}_A(a) = \tilde{\pi}_K(a) \qquad \forall a \in I_X$$

をみたすものの中で普遍的なものを π とかく。$\mathcal{O}_X = \mathrm{C}^*(\pi)$ とおき, これを (X, A) から決まる Cuntz-Pimsner 環という。

$t \in \mathbb{T}$ に対して,

$$\gamma_t(x) = e^{it}x, \quad \gamma_t(a) = a$$

とすると π の普遍性によって $\mathcal{O}_X$ 上の自己同型が定まる。これをゲージ作用という。ゲージ作用は $\mathcal{O}_X$ に整数の grading(次数構造) を与え, 非常に重要なものである。

Example 2.1. $A = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^n$ で, A の左右作用は普通のスカラーの倍とし, X の A 内積は, 通常の内積とする。そのとき, $\mathcal{O}_X$ は, ヒルベルト空間上の n 個の作用素 $\{S_i\}_{i=1}^n$ で,

$$S_i^* S_i = I \quad (i = 1, \dots, n), \qquad \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = I$$

を満たすもので生成される C^*-環であり, $\mathcal{O}_n$ とかかれる。これは n 生成元の *Cuntz* 環と呼ばれ, 非常に重要なものである。

この環は, n 個の元の片側フルシフトからも C*-correspondence を経由して作られる。有理関数力学系は, Lyubich 測度についての零集合を除けば片側フルシフトと同型になることが示されている ([3])。

次に, 片側フルシフトの一般化である片側マルコフシフトから C*-correspondence を構成し, それから C*-環を作る。

Example 2.2. B を成分が 0 か 1 であるような n 次正方行列とし

$$\Lambda_B = \{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbf{N}} \mid B_{x_j, x_{j+1}} = 1 \}$$

とおく。$\sigma((x_j)_{j=1}^\infty) = (x_{j+1})_{j=1}^\infty$ によって, Λ_B 上の非可逆な連続写像 σ を定義する。$\mathcal{C}_B = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Lambda_B \times \Lambda_B \mid \mathbf{y} = \sigma(\mathbf{x}) \}$ とし, $A_B = \mathrm{C}(\Lambda_B)$, $X_B = \mathrm{C}(\mathcal{C}_B)$ とおく。そのとき, $a, b \in A_B$, $f, g \in X_B$ に対して,

$$(\phi(a) f \cdot b)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b(\mathbf{y})$$

$$(f|g)_{A_B}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \sigma^{-1}(\mathbf{y})} \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

とすると, (X_B, ϕ) は A_B 上の *C^*-correspondence* である。これから作られる C^*-環を $\mathcal{O}_B$ とかき, B によって決まる *Cuntz-Krieger* 環と呼ぶ。

上の構成では, 行列 B から B によって決まる片側マルコフシフト (Λ_B, σ) を経由して Cuntz-Krieger 環を定義したが, 部分等距離写像と射影の関係式によって定義するやり方もあり, そちらの方が一般的である。本稿では, あとでマルコフシフトと有理関数力学系のアナロジーを用いるので, この定義を採用している。なお, 同様の行列 B によって両側のシフトを考えたものが通常のマルコフシフトでり, シフトが可逆な連続写像になることから, こちらが研究されることの方が多い。

3 C*-環の性質

3.1 有理関数力学系から作られる C*-環

$R(z)$ を 2 次以上の有理関数で, $\hat{\mathbb{C}}$ 上に R によって与えられる非可逆力学系を考える。

$\{R^n(z)\}_{n=0,\ldots}$ が同等連続であるような $z \in \hat{\mathbb{C}}$ 全体を Fatou 集合 F_R という。 $J_R = \hat{\mathbb{C}} \backslash F_J$ を Julia 集合と呼ぶ。 J_R と F_R は R で完全不変である。

$w_0 = R(z_0)$ とする。 z と w の適当な局所座標系のもとで

$$R(z) = w_0 + a_N(z - z_0)^N + a_{N+1}(z - z_0)^{N+1} + \cdots \qquad a_N \neq 0$$

となるとき, $e_R(z_0) = N$ とおき, z_0 における分岐指数という。$B_R = \{z \in \hat{\mathbb{C}} | e_R(z) \geq 2\}$ と置き, B_R を分岐点集合という。E_R で R の例外点の集合を表す。$E_R \subset B_R$ である。

有理関数 R によってリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の完全不変閉集合 J 上に定まる力学系に対して, C*-correspondenc を定義する。J としては, $\hat{\mathbb{C}}$ 自身かジュリア集合 J_R を考えることが多い。

$A_J = C(J)$ を可換 C*-環, $\mathcal{C}_J = \{ (z, R(z)) \,|\, z \in J \}$ として, $X_R(J) = C(\mathcal{C}_J)$ とする。 f, $g \in X_R(J)$, a, $b \in A$ に対して,

$$(\phi(a)f \cdot b)(z, R(z)) = a(z)f(z)b(R(z))$$
$$(f|g)_A(z) = \sum_{w \in R^{-1}(z)} e_R(w)\overline{f(w)}g(w)$$

とする。 なお, $J = \hat{\mathbb{C}}$ のときには A と X の双方で $\hat{\mathbb{C}}$ を省略する。

Proposition 3.1. 上の式が $X_R(J)$ の両側 A_J 作用と A_J 値右内積を与え, $X_R(J)$ は A_J 上の *C*-correspondence* になる。

内積の定義において $e_R(z)$ をかけていることにより連続関数になって A_J の元が定義される。

Proposition 3.2. $X_R(J)$ に対して, $I_{X_R(J)} = \{ f \in \mathrm{C}(J) \,|\, f|_{B(R) \cap J} = 0 \}$ である。

$X_R(J)$ に対して構成した Cuntz-Pimsner 環を それぞれ $\mathcal{O}_R(J)$ とかく。特に $J = \hat{\mathbb{C}}$ のときには単に $\mathcal{O}_R$ とかく。

C* 環が simple であるとは, ノルム位相で閉じている両側イデアルが自明なものに限ることである。 simple unital C* 環 A が purely infinite とは, $\mathbb{C}$ でなく, A の 0 でない元 a に対して, x, y が存在して $xay = I$ となることである。C* 環が A nuclear であるとは, 別の C* 環に対して, $A \otimes B$ の C* ノルムが一意的になることであり, ある意味有限次元環に近い状況を表す。

Theorem 3.3. *(Kajiwara and Watatani [6])* R が *2* 次以上の有理関数であるとき, $\mathcal{O}_R(J_R)$ は常に *simple* かつ *purely infinite* である。

3.2 algebraic correspondence から作られる C*-環

有理関数は, $P(z)$, $Q(z)$ を有理関数として $w = P(z)/Q(z)$ とかける。分母をはらうことによって $Q(z)w - P(z) = 0$ の形になるのでこの形にして有理関数の一般化を考える。$p(z, w)$ を z, w

の多項式として，その零点を algebraic correspondence という。algebraic correspondence から作られる「力学系」は，S. Bullet によって研究された。

ただし，p は $\hat{\mathbb{C}}\times\hat{\mathbb{C}}$ 上の多項式と考えなければならないので，次のように定義する。p が z については m 次，w については n 次であるとき，

$$\tilde{p}(z_1,z_2,w_1,w_2)=z_2^m w_2^n p(z_1/z_2,w_1/w_2)$$

によって 4 変数の多項式 $\tilde{p}$ を定義する。$\hat{\mathbb{C}}$ を 1 次元複素射影直線とみてその中での (z_1,z_1) の同値類を $[z_1,z_2]$ とかき，

$$\mathcal{C}_p=\{\,([z_1,z_2],[w_1,w_2])\in\hat{\mathbb{C}}\times\hat{\mathbb{C}}\,|\,\tilde{p}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0\}$$

とおく。これは $\hat{\mathbb{C}}\times\hat{\mathbb{C}}$ の中のコンパクト集合である。簡単のため，以下

$$\mathcal{C}_p=\{\,(z,w)\in\hat{\mathbb{C}}\times\hat{\mathbb{C}}\,|\,p(z,w)=0\,\}$$

と書く。これは特別の例として，有理関数 R によって $\hat{\mathbb{C}}$ 上に与えられる力学系のグラフを含む。

$p(z,w)$ に対して $w=w_0$ を固定し z の方程式 $p(z,w_0)=0$ の解とみたときの重複度を $e_p(z_0,w_0)$ とかき，$p(z,w)$ の (z_0,w_0) における分岐指数という。

$$B(p)=\{\,z\in\hat{\mathbb{C}}\,|\,\exists w\in\hat{\mathbb{C}}\text{ s.t } p(z,w)=0,\ e(z,w)\geq 2\,\}$$

とする。$B(p)$ の元は分岐点と呼ばれる。

$\hat{\mathbb{C}}$ の部分集合 J が p-不変であるとは，$z\in J$ かつ $p(z,w)=0$ なら $w\in J$ となり，$w\in J$ かつ $p(z,w)=0$ なら $z\in J$ となることである。

2 変数多項式 p に対して J を p-不変閉集合として，

$$\mathcal{C}_p(J)=\{\ (z,w)\in J\times J\ |\ p(z,w)=0\ \}$$

とおく。$A_J=\mathrm{C}(J)$, $X_p(J)=\mathrm{C}(\mathcal{C}_P(J))$ として，$a\in A_J$, $f\in X_p(J)$ に対して

$$(a\cdot f\cdot b)(z,w)=a(z)f(z,w)b(w)$$
$$(f|g)_A(w)=\sum_{\{z\in J\,|\,(z,w)\in\mathcal{C}_p(J)\}} e_P(z,w)\overline{f(z,w)}g(z,w)$$

によって左右の A_J 加群構造と A_J 値内積を定義する。ϕ を A_J の左作用として，$(X_P(J),\phi)$ は C*-correspondence である。

$(X_P(J),\phi)$ から作られる Cuntz-Pimsner 環を $\mathcal{O}_P(J)$ と書いて，algebraic correspondence から決まる C*-環という。

J を p-不変閉集合とする。

$$\mathcal{P}_n=\{\ (z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})\in J^{n+1}\ |\ (z_i,z_{i+1})\in\mathcal{C}_p(J),\ i=1,\ldots,n\ \}$$

とおく。これは長さ n の path 空間と呼ばれる。J の部分集合 U に対して，

$$U^{(n)}=\{\,w\in J\ |\ (z_1,z_2,\ldots,z_n,w)\in\mathcal{P}_n \text{ for some } z_1\in U, z_2\ldots z_n\in J\ \}$$

とおく。

Definition 3.4. p が J 上 *expansive* とは, J の空でない開集合 U で, $U^{(n)} = J$ となるものが存在することである。

Definition 3.5. N は自然数とする。集合 *N-generalized periodic points* GP(N) を

$$\begin{aligned}\mathrm{GP}(N) =&\{w \in J \mid \exists z \in J\ \exists m, n \quad 0 \le m \ne n \le N, \exists(z, z_2, z_3, \ldots, z_n, w) \in \mathcal{P}_n,\\ &\exists(z, u_2, u_3, \ldots, u_m, w) \in \mathcal{P}_m\}.\end{aligned}$$

で定義する。

Definition 3.6. p が J 上 *free* であるとは, 任意の自然数 N に対して $GP(N)$ が有限集合になることである。

Theorem 3.7. *(Kajiwara and Watatani [7])* p が J 上で *free* かつ *expansive* であれば, $\mathcal{O}_p(J)$ は *simple* かつ *purely infinite* である。

有理関数力学系の場合にはこれらの条件は自動的になりたっていたが, algebraic correspondence の場合には検証が必要となる。free でない例も, expansive でない例も存在する。
次が, 条件をみたしている例である。

Example 3.1. *(1)* $p(z,w) = (w - z^m)(w - z^n)$ で m, n が互いに素のときには, $J = \mathbb{T}$ として p は J 上 *free* であり, また J 上 *expansive* である。
(2) $p(z,w) = w^m - z^n$ とする。n が m を割り切らないならば, $J = \mathbb{T}$ として p は J 上 *free* であり, また J 上 *expansive* である。

algebraic correspondence のもっともわかりやすい例は, 分数の巾乗関数およびそれらの積によって与えられる algebraic correspondence である。これから作られる C*-環の K-群は次の通りである。

Example 3.2. $p(z,w) = z^m - w^n$, $J = \mathbb{T}$ とする。そのとき, 以下がなりたつ。
(1) $n = 1$, $m = 1$ に対して
$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
(2) $n = 1$, $m \ne 1$ に対して
$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$.
(3) $n \ne 1$, $m = 1$ に対して
$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$.
(4) $n \ne 1$, $m \ne 1$ に対して
$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \cong \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$.

次は, 分岐点のない algebraic correspondence を掛け合わせることによって分岐点が出現し, それが K-群の計算に影響を与えている例である。

Example 3.3. *([7])* $p(z,w) = (w - z^m)(w - z^n)$ *(m > n)* とする。

$$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{Z}^{m-n}, \qquad K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T})) \simeq 0$$

Example 3.4. *([7])* 上の例をもっと一般化して, $p(z,w)=(w-z^{m_1})(w-z^{m_2})\cdots(w-z^{m_k})$ の場合についても K-群を計算することができ,

$$K_0(\mathcal{O}_p(\mathbb{T}))\simeq\mathbb{Z}^b,\qquad K_1(\mathcal{O}_p(\mathbb{T}))\simeq\mathbb{Z}/((k-1)\mathbb{Z})$$

となることがわかる。ここで b は分岐点の数を表し, k は p の w についての次数である。

さらに, $p(z,w)=(w^{n_1}-z^{m_1})(w^{n_2}-z^{m_2})\cdots(w^{n_k}-z^{m_k})$ と一般化したものについても, 同様の解析が可能である。

因数分解できないような algebraic correspondence に対しては, 一般に不変集合を見つけることも難しく, 意味のある例を計算することは容易でない。これは今後の課題である。

また, algebraic correspondence は有限生成 Klein 群との関係が興味ある点であるが, これについても今のところ結果はなく, 今後の課題である。

4 KMS state

4.1 有理関数から作られる C*-環

KMS state は古くから統計力学における平衡状態として知られているものであり, 力学系のエルゴード的性質を反映していると考えられる。

A を C*-環とし, α を $\mathbb{T}$ の A への作用とする。$A^{(m)}=\{a\in A|\alpha_t(a)=e^{imt}a\}$ とおく。

$\beta>0$ とする。A の state φ が α に関する β-KMS state であるとは,

$$\varphi(ab)=e^{m\beta}\varphi(ba)$$

$a\in A$, $b\in A^{(m)}$ $(m\in\mathbb{Z})$ がなりたつことである。$\beta>0$ なら φ は自動的に α 不変になる。$\beta=0$ の場合は, α 不変な tracial state を β-KMS state の定義として採用する。β-KMS state 全体の集合は凸閉集合になり, 端点を求めることが重要な問題である。

この節では, 2次以上の有理関数 R に対して, $\mathcal{O}_R$ のゲージ作用 γ に関する β-KMS state の分類を述べる。

$f\in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して,

$$\tilde{f}(z)=\sum_{w\in R^{-1}(z)}f(w)$$

とおく。 $\tilde{f}$ は不連続関数である。 $\hat{\mathbb{C}}$ のボレル符号付き測度 μ に対して,

$$F(\mu)(f)=\mu(\tilde{f})$$

と置けば, これにによって $C(\hat{\mathbb{C}})^*$ 上の Perron-Frobenius 型作用素 F が定義される。

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の点測度 δ_w に対しては,

$$F(\delta_w)=\sum_{w\in R^{-1}(z)}\delta_w$$

となる。

以下記号の便宜のため, $F_\beta=e^{-\beta}F$ とおく。Cuntz-Pimsner 環の KMS state の理論, および複素力学系から作られる Hilbert C*-module の基底の構成により, 次がわかる。

Proposition 4.1. *([4])* $\mathcal{O}_R$ のゲージ作用 γ に関する *β-KMS state* は, $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度 μ で次の *(K1), (K2)* を満たすものと対 応する。

$$\begin{array}{lll} (K1) & F_\beta(\mu)(f) = \mu(f) & f|_{B(R)} = 0 \\ (K2) & F_\beta(\mu)(f) \le \mu(f) & f \in C(\hat{\mathbb{C}})^+ \end{array}$$

$\beta > \log N$ とする。w を分岐点として, $\hat{\mathbb{C}}$ 上のボレル確率測度 $\mu_{\beta,w}$ を,

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,w} &= m_{\beta,w} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\beta} \sum_{z \in R^{-k}(w)} \delta_z \\ &= m_{\beta,w} \sum_{k=0}^{\infty} {F_\beta}^k(\delta_z) \end{aligned}$$

とする。 ここで, $m_{\beta,w}$ は正規化定数である。w が例外点のときは, $0 < \beta \le \log N$ に対しても同じ式で $\mu_{\beta,w}$ を定義することができる。

Proposition 4.2. $\mu_{\beta,w}$ は *Proposition 4.1* の条件 *(K1), (K2)* を満たし, $\mathcal{O}_R$ の *β-KMS state* $\varphi_{\beta,w}$ に一意的に拡張される。

Proposition 4.3. $\beta > \log N$ のとき, *β-KMS state* は, $\{\varphi_{\beta,b} \mid b \in B(R)\}$ の一次結合でかける。さらに, これらは端点である。

Proposition 4.4. *Lyubich* 測度 μ_L は *Proposition 4.1* の *(K1), (K2)* を満たし, $\beta = \log N$ に対して *β-KMS state* φ^L を与える。

Theorem 4.5. *(Izumi, Kajiwara and Watatani [4])* R を 2 次以上の有理関数とし, $0 < \beta$ とする。$\mathcal{O}_R$ の *β-KMS state* の端点は次のように分類される。

1. R が例外点を持たないとする。 $0 < \beta < \log N$ のときは, *β-KMS state* はない。 $\beta = \log N$ のときは, φ^L が唯一つの *β-KMS state* である。 $\log N < \beta$ のときは, $\{\varphi_{\beta,z} \mid z \in B(R)\}$ が端点である。

2. R が例外点を持つとする。$0 < \beta < \log N$ の場合には, $\{\varphi_{\beta,z} \mid z \in E(R)\}$ である。$\beta = \log N$ のときは, $\{\varphi_L, \varphi_{\beta,z} \mid z \in E(R)\}$ が端点である。$\log N < \beta$ のときは, $\{\varphi_{\beta,z} \mid z \in B(R)\}$ が端点である。

$\beta = 0$ のときには, β-KMS state を γ-不変な tracial state と解釈する。 そのとき, 次がなりたつ。

Proposition 4.6. *([4])*

1. $E_R = \{w\}$ のときは, 唯一つの γ 不変 *tracial state* が存在する。

2. $E_R = \{w_1, w_2\}$ で $R(w_i) = R(w_i)$ $(i = 1, 2)$ のときは, 2 個の γ 不変 *tracial state* φ_{w_i} で, $C(\hat{\mathbb{C}})$ への制限が, δ_{w_i} となるものがある。

3. $E_R = \{w_1, w_2\}$ で $R(w_1) = w_2$, $R(w_2) = w_1$ のときは, 唯一つの γ-不変 *tracial state* φ で, $C(\hat{\mathbb{C}})$ への制限が $1/2(\delta_{w_1} + \delta_{w_2})$ になるものがある。

Algebraic correspondence から作られる C*-環に対しても, KMS state の分類は同様に可能である。特に分岐点から生じる KMS state についてはほとんど同じである。ただし, 有理関数の場合と違って, 不変集合上に Lyubich 測度にあたるものの存在が不明なので, 連続型の KMS state の存在が一般にはわからない。

4.2 分岐点の逆像

有理関数力学系から作られる C*-環の K-群および KMS state の分類において, 分岐点は重要であった。各分岐点は finite type KMS state を与えていた。すなわち, KMS state の情報から分岐点の数, さらには被覆の位数すなわち有理関数の次数などを復元することができる。

さらに, 分岐点同士のつながり具合を表していると思われる分岐点の Perron-Frobinius 型作用素の繰り返しによる逆像の情報を復元することも, 興味ある問題である。しかしながら可換 C*-環 A は $\mathcal{O}_R$ およびゲージ作用によって標準的に決まるものではないので, 分岐点の逆像の情報を $\mathcal{O}_R$ とゲージ作用から復元するためには, さらに一工夫必要と思われる。

C*-correspondence (X_R, ϕ) の代わりに $B_R = \mathcal{O}_R^{\mathbb{T}}$, $Y_R = \mathcal{O}_R^{\mathbb{T}} X_R$ によって作られる C*-correspondence (Y_R, ϕ) を用いて議論することにより, 次の定理が成り立つことがわかる。

Theorem 4.7. R_1, R_2 がそれぞれ有理関数, γ_1, γ_2 はそれぞれから構成される *Cuntz-Pimsner* 環 $\mathcal{O}_{R_1}$, $\mathcal{O}_{R_2}$ 上のゲージ作用とする。そのとき,

$$(\mathcal{O}_{R_1}(\hat{\mathbb{C}}), \mathbb{T}, \gamma_1) \simeq (\mathcal{O}_{R_2}(\hat{\mathbb{C}}), \mathbb{T}, \gamma_2)$$

なら, $\#B_{R_1} = \#B_{R_2}$ であり, 数列の有限集合

$$\{\, \#\{R^{-k}(z)\}_{k=0,1,2,\dots} \mid z \in B_R \,\}$$

は分岐点を適宜並べかえることによって一致する。

$b(z) = \#\{\, R^{-k}(z) \,\}_{k=0,1,2,\dots}$ とおく。$z \in B_R$ に対して $\bigcup_{i=1}^{\infty}(R^{-i}(z) \cap B_R) = \emptyset$ ならば $b(z) = (1, N, N^2, N^3, \dots)$ である。もしこれが空集合でないと, 数列が変わる。

Example 4.1. $R(z) = z^2$ とする。$B_R = \{0, \infty\}$ である。

$$b(0) = (1, 1, 1, \dots)$$
$$b(\infty) = (1, 1, 1, \dots)$$

Example 4.2. $R(z) = z^2 + 1$ とする。$B_R = \{0, \infty\}$ であるが,

$$b(0) = (1, 2, 4, 8, \dots)$$
$$b(\infty) = (1, 1, 1, \dots)$$

Example 4.3. $R(z) = z^2 - 1$ とする。 $B_R = \{0, \infty\}$ であるが,

$$b(0) = (1, 2, 3, 6, 11, \dots)$$
$$b(\infty) = (1, 1, 1, \dots)$$

この他にも, いろいろ計算は可能であり, 分岐点間のつながりを C*-環の情報で復元することが可能な場合がある。ただし, 網羅的に調べることは一般には困難である。

4.3 グラフ C*-環の KMS state

有限グラフは複素力学系とはかなりみかけは違ったものであり, 共通点は見えにくい。しかしながらそれぞれから作られた C*-環上の KMS state の分類, すなわちエルゴード的性質を考えると, ある程度の共通点が存在することがわかる。

有限離散グラフ E とは, 頂点の集合 E^0 と辺の集合 E^1 の組, さらには E^1 から E^0 への２つの写像, すなわち source 写像, range 写像が与えられたものである。有限グラフは一見力学系とは無縁のようだが, 実は隣接行列を通じて correspondence (写像の一般化) とみることにより, 力学系の観点から扱うことができ, 有理関数力学系と同様の構成で C*-環を作ることができる。その C*-環の KMS state を考えると, 有限グラフの sink が有理関数力学系における分岐点と同様のふるまいをすることがわかる。

辺 e に対して source を $s(e)$, range を $r(e)$ とかく。なお, $s(e)$ とならない頂点 を sink, $r(e)$ とならない頂点を source という。

グラフ C*-環とは, 直交射影の族 $\{\ P_v \mid v \in E^0\}$ と値域が互いに直交している部分的等距離写像の族 $\{\ Q_e \mid e \in e^1\ \}$ で

$$Q_e^* Q_e = p_{r(e)}, \quad P_v = \sum_{s(e)=v} Q_e Q_e^* \quad (v \text{ は sink ではない})$$

をみたすもので生成される普遍的な C*-環である。

これは, 辺と頂点の相互関係をヒルベルト空間の作用素の中に表現したものと考えられる。

$E_r^0 = \{ v \in E^0 \,|\, |s^{-1}(v)| > 0 \}$, $E_s^0 = \{ v \in E^0 \,|\, |s^{-1}(v)| = 0 \}$, $A_E = \mathrm{C}(E^0)$, $X_E = \mathrm{C}(E^1)$ とするとき, $\xi, \eta \in X_E$, $f \in A_E$ に対して,

$$(\xi|\eta)_A(v) = \sum_{r^{-1}(v)} \overline{\xi(e)}\eta e, \qquad (\xi f)(e) = \xi(e) f(r(e)), \qquad \phi(f)\xi(e) = \xi(e) f(r(e))$$

によって左右の A_E 作用と A_E 値内積を定義すると X_E は A_E 上の C*-correspondence になる。ただし, X_E は full とは限らず, また ϕ は単写とも非退化とも限らない。このような C*-correspondence に対しても, Katsura [11] によって C*-環が構成されている。X_E から構成される C*-環を $\mathcal{O}_E$ とかく。なお, ここで I_X にあたる A_E のイデアルは, $\phi(\mathrm{C}(E_r^{(0)}))$ である。Cuntz-Pimsner 環において示されていた KMS state の構成定理 (Laca and Neshveyev [13]) は, さらに一般化された relative Cuntz-Pimsner 環においても同様に成り立つ (Kajiwara and Watatani [8])。

有限グラフ E から, sink およびそこから出発すると必ず sink に到達する頂点またそれらを range として持つ全ての辺を除外して作ったグラフを F とかく。F は sink を持たない。λ_0 で F から作られる隣接行列の最大固有値 (Perron-Frobenius 固有値) とする。

Theorem 4.8. *(Kajiwara and Watatani [8])*

(1) $\beta > \log\lambda_0$ とする。そのとき, 有限グラフ E から作られるグラフ C^*-環の $\log\beta$-*KMS state* の端点は, もとのグラフの *sink* 全体と一対一に対応している。

(2) E_1^0 が空でないとする。B_{11} の *Perron-Frobenius* 固有値を λ_0 とする。$\log\lambda_0$-*KMS state* が存在し, F から作られるグラフ C^*-環の *KMS state* となる。

(1) で得られる KMS state は I 型フォンノイマン環を生成する。(2) で得られる KMS state は以前から知られていたものであり, 適当な条件を満たせば III 型フォンノイマン環を生成する。

sink は分有限グラフを力学系とみなしたときの特異点にあたり, 有理関数力学系の分岐点に類似のものと考えられる。

5 ゲージ作用による不動点環

5.1 不動点環の性質

連続な空間の力学系にマルコフ分割が存在する場合, それらと記号力学系には深い関係がある。マルコフシフトとのアナロジーにより, 有理関数 R から作られる C*-環 $\mathcal{O}_R$ のゲージ作用による不動点環 $\mathcal{O}_R^{\mathbb{T}}$ (コアとも呼ばれる) は, $\mathcal{O}_R$ よりももとの力学系の情報を多く含んでいるとも考えられるが, 分岐点のある場合など, 一般に構造が複雑でその性質を調べるのは容易ではない。

成分が 0 か 1 であるような正方行列 B によって与えられるマルコフシフトから作られる C*-環の場合においては, $\mathcal{O}_B$ の単純性よりも, $\mathcal{O}_B^{\mathbb{T}}$ の単純性の方が条件が厳しいことがわかっている。前者の単純性は, B の既約性プラスアルファの条件で与えられるが, 後者については, B が aperiodic であることが必要十分である。

今のところ, 有理関数力学系から作られる C*-環の不動点環について一般的な結果は得られていないが, 有理関数 R に双曲的という条件をつけると以下の結果を得る。

B_R を R の分岐点全体の集合とし, $B^+(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(B_R)$ とおく。$B^+(R)$ は R の postcritical set と呼ばれる。

Definition 5.1. 有理関数 R が双曲的であるとは, $J_R \cap \overline{B^+(R)} = \emptyset$ となることである。

この定義より, R のジュリア集合 J_R が分岐点を含まないことがわかるが, 双曲性はそれよりも強い条件である。

Proposition 5.2. 有理関数 R が双曲的であるとき, リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上にもとの距離と同値な位相を定義する新しい距離 d を導入し次のようにできる。

$0 < c < 1$ が存在し, 任意の x, $y \in J_R$ に対して, $R^{-1}(x) = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$, $R^{-1}(y) = \{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$ を適当に番号を付け替えて,

$$d(x_i, y_i) \le cd(x, y) \qquad i = 1, \ldots, N$$

となる。

例えば, $R(z) = z^2$ とするとジュリア集合は $J_X = \mathbb{T}$ であり, 上はみたされている。これは, R の逆 R^{-1} が「大体」self-similar な branch を持つことを意味している。従って, 以下の定理は, 分岐点を持たない self-similar map にの場合においても成り立つ。

Theorem 5.3. R が双曲的であるとき, $\mathcal{O}_R(J_R)$ のゲージ作用による不動点環 $\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ は単純である。

双曲性の仮定から J_R が分岐点を含まないことより, groupoid の手法を用いてこの定理を証明することができる。

Theorem 5.4. R が双曲的であるとき, $\mathcal{O}_R(J_R)$ のゲージ作用による不動点環 $\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ は一意的な *tracial state* を持つ。

双曲性の仮定により J_R が分岐点を含まないので, $\mathcal{F}_n = \pi_K^{(n)}(\mathcal{K}(X^{\otimes n}))$ であり, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ となる。なお, $\mathcal{F}^{(\infty)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$ とすると, $\mathcal{F}^{(\infty)} = \mathcal{O}_R^{\mathbb{T}}$ である。これによって, J_R 上の確率測度の議論に帰着することができ, 最終的に縮小写像を用いた議論で, tracial state の一意性を示すことができる。

双曲的でない場合には, J_R が分岐点を含むことがある。その場合には, 分岐点から $\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ 上の連続型でない tracial state が作られ, tracial state の一意性が成り立たないことがすでにわかっている。

不動点環は, 次のような場合には簡単に計算される。

Example 5.1. $R(z) = z^2 + c$ ただし c はマンデルブロ集合の外の点とする。そのときは, J_R が完全不連結集合で, $\mathcal{O}_R(J_X)^{\mathbb{T}}$ は $M_{2^\infty}(\mathbb{C})$ である。

ここで, $M_{2^\infty}(\mathbb{C})$ とは, $M_{2^k}(\mathbb{C}) = M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_2(\mathbb{C})$ で, 包含関係 $M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes I_2 \subset M_{2^{k+1}}(\mathbb{C})$ による帰納極限で得られる C* 環であり, UHF C*-環と呼ばれている。これが simple で一意的な trace を持つことは, 古くから知られている。

Example 5.2. $R(z) = z^n$ とする。この場合 $J_R = \mathbb{T}$ である。$\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ は $M_k(\mathrm{C}(\mathbb{T})) \subset M_{k+1}(\mathrm{C}(\mathbb{T}))$ の埋め込みによる帰納極限で与えられる C^*-環である。なお, $n = 3$, $k = 1$ のときの埋め込みは,

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ここで a は $a(z) = z$ で与えられる $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ の元である。この埋め込みは *n-times around embedding* と呼ばれる。

この環は以前から Bunse-Dedense 環と呼ばれており, weighted shift から作られる C* 環として知られていた。また, 繰り上がりを表現している adding machine 力学系とも関係がある。これについても, simple で unique tracial state を持つことが知られている。

一方, ジュリア集合が分岐点を含む場合には, 不動点環のイデアル構造, tracial state の分類などは容易ではない。

5.2 拡張された次元群

マルコフシフト, およびより一般的なサブシフトに対して, 次元群が定義され, それらの分類に対して有効であった (Krieger [12], Matsumoto [14])。 有理関数力学系は, 測度論的には記号力学系に近いので, 記号力学系で有効な定義を利用するメリットがあると予想できる。

行列 B によって与えられるマルコフシフトから作られる Cuntz-Krieger 環のゲージ作用による不動点環は, 有限次元 C*-環の増加列で記述される (AF 環と呼ばれる)C*-環である。この有限次元環の増加列に対して, 次のように次元群と呼ばれる群, その正錐, 群の自己同型の組が定義される。

B によって決まる $\mathbb{Z}^n$ から $\mathbb{Z}^n$ への写像の無限列

$$\mathbb{Z}^n \to^A \mathbb{Z}^n \to^A \mathbb{Z}^n \cdots$$

を考える。$DG(\Lambda_n) = \lim_{\to}(\mathbb{Z}^n, A)$, $DG(\Lambda_n)_+ = \lim_{\to}(\mathbb{Z}^n_+, A)$ とおく。ここで, Λ_n は, n 個の成分を持つ片側フルシフトを表わす。帰納極限は次のように実現することができる。すなわち $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ の元に, $(v,m) \simeq ({}^tBv, m+1)$ によって同値関係を入れ, これで $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ を割ったものが, 上の帰納極限である。λ_B を $\lambda_B([v,m]) = [v, m+1]$ によって与えると, これは $DG(\Lambda_n)$ の自己同型になる。

Definition 5.5. *(Krieger [12])* 行列 B によって決まるマルコフシフトの次元群とは,

$$(DG(\Lambda_n), DG(\Lambda_n)^+, \lambda_B)$$

である。

マルコフシフトの次元群は, もとのマルコフシフトを分類する際に非常に強力である。Krieger によって, 二つのマルコフシフトがシフト同値であることと次元群が等しいことが同値であることが示されている。

行列 B によって与えられるクンツ・クリーガー環とは, 片側マルコフシフトに対して C*-correspondence を作り, それから Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_B$ を構成したものとして 2.2 節で定義していた。Cuntz-Pimsner 環 $\mathcal{O}_B$ のゲージ作用による不動点環 $\mathcal{O}_B^{\mathbb{T}}$ は AF 環であり, この環の K 群の情報で直前に述べた次元群が与えられことが, Krieger によって示されている。不動点環の K_0 群が $DG(\Lambda_n)$, K_0 群の正錐, すなわちある $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(\mathcal{O}_B^{\mathbb{T}})$ の直交射影に対応する元全体が $DG(\Lambda_n)^+$ である。$\mathcal{O}_B$ のゲージ作用の双対作用は $\mathbb{Z}$ の $\mathcal{O}_B \times_\gamma \mathbb{T}$ への作用であり, $\mathcal{O}_B \times_\gamma \mathbb{T}$ は $\mathcal{O}_B^{\mathbb{T}}$ と Morita 同値であることにより, $\mathbb{Z}$ の双対作用はこれによって $K_0(\mathcal{O}_B^{\mathbb{T}})$ 上の自己同型を誘導する。これが λ_B でに一致する。

マルコフシフトの場合とのアナロジーにより, 有理関数によって J_R 上に与えられる力学系に対して C*-correspondence を作り, それから Cuntz-Pimsner 環を作ったときにも, $\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}$ の K_0 群, その正錐, ゲージ作用の双対作用が誘導する $K_0(\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}})$ への $\mathbb{Z}$ の作用 λ_R をとれば, もとの力学系の位相共役類の不変量を得ることができるのではないか。ただし, 後の例でわかるように, 有理関数力学系の場合にはこれだけでは不十分であり, K_1 群の情報も付加する必要があるように思われる。

Definition 5.6. 有理関数 R に対して, $(K_0(\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}}), K_0(\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}})^+, \lambda_R)$ および $K_1(\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}})$ を R によって $\hat{\mathbb{C}}$ 上に決まる力学系の拡張された次元群と呼ぶ。

有理関数の次元群は, 有利関数力学系に対して豊かな情報を与えるかも知れないが, 特に分岐点のある場合に, 不動点環の計算が非常に難しく, 今のところ興味ある結果は得られていない。これも今後の課題である。

前に提示した例に対しては計算が可能である。

Example 5.3. $R(z) = z^2 + c$, ただし c はマンデルブロ集合の外の点とする。この場合, 次元群は,

$$\mathbb{Z} \to^2 \mathbb{Z} \to^2 \mathbb{Z} \to^2 \cdots$$

によって与えられるので, $DG(\Lambda_2) = \mathbb{Z}[1/2]$ となる。正錐は自然なものであり, $\mathbb{Z}$ の作用は 2 倍で与えられる。K_1 群は 0 である。

Example 5.4. $R(z) = z^n$ とする。ジュリア集合は $J_R = \mathbb{T}$ である。この場合, $DG(\Lambda_n)$, $DG(\Lambda_n)^+$, λ_R は上の例と同じであり, 区別がつかないが, $K_1(\mathcal{O}_R(J_R)^{\mathbb{T}})$ が $\mathbb{Z}$ となって上の例との違いが出る。

Example 5.4 の n が異なるものは R の次元 n によって分類される。さらに, 上の二つの例の区別が, K_1 群を考えることによって分類されている。複素力学系などの連続な空間の力学系はマルコフ分割を考えることによって記号力学系と関係付けられていのだが, もし, 記号力学系に落としたときに失われる情報を K_1 群が表していることがわかると, 興味深い。

6 将来への展望

これまでのことから, 複素力学系は記号力学系, 有限グラフから決まる力学系と多くの共通点をもっていることがわかり, 後者で得られていることが, 今後の C*-による複素力学系研究のモチベーションに成り得ることが想像される。

記号力学系 (離散グラフを含む) との対比

	複素力学系	記号力学系, graph
infinite type KMS state (ergodicity)	リュービッチ測度	Perron-Frobenius eigenvector (graph) 等
finite type KMS state (ergodicity の破れ)	分岐点	sink (graph)
固定点環の simplicity	双曲性	aperiodicity
固定点環の trace の一意性	双曲性	aperiodicity
分岐点の幾何的情報	逆軌道	不明
次元群 (不動点環はもとの力学系を決めるか?)	固定点環の K_0 群と K_1 群 (結果は不明)	固定点環の K_0 群 (強い結果あり)
軌道同型	不明	定理あり (松本)

最後に, 複素力学系における軌道同型について少し述べる。力学系に対して位相共役よりも弱い概念が, 軌道同型である。

測度空間の同型写像の軌道同型については, Dye [2] による有名な結果が知られている。また位相空間の同型写像の場合には, 富山 [17] による結果がある。これらは, 同型写像に対する結果であるが, 近年 Matsumoto [15] により, マルコフシフト力学系に対する軌道同型の結果が得られている。複素力学系についても, 軌道同型について考える意味はあると思う。

マルコフシフトで軌道同型定理を示すためには, $C(J_R)$ にあたる環が極大可換であることが必要 ([15]) であった。

Theorem 6.1. *[9]* R を有理関数とする。そのとき R に付随する C^*-環 $\mathcal{O}_R(J_R)$ の中で $\mathrm{C}(J_R)$ は極大可換環である。

マルコフシフトにおいては, 同様な可換環の極大性は行列が既約であることと同値であった。有理関数力学系は常に essentiall free であり, 既約性に対応する性質は保証されている。

有理関数力学系の軌道同型について, 今後研究を進めていく予定であるが, まだ確たる見通しはないのが現状である。

参考文献

[1] M. Enomoto, M. Fujii and Y. Watatani, *KMS states for gauge action on O_A,* Math. Japon. 29(1984), 607–619

[2] H. A. Dye, *On group of measure preserving transformations I,* Amer. J. 81(1959), 119–159.

[3] D. Heicklen and C. Hoffman, *Rational maps are d-adic Bernoulli*, Ann. of Math. **156** (2002), 103–114.

[4] M. Izumi, T. Kajiwara and Y. Watatani, *KMS states and branched points,* Ergodic Theory Dynam. Systems 27(2007), 1887–1918.

[5] T. Kajiwara, *Countable bases for Hilbert C^*-modules and classification of KMS states,* Operator Structures and Dynamical Systems, Contemporary Mathematics, 503(2009), 73–91.

[6] T. Kajiwara and Y. Watatani, *C^*-algebras associated with complex dynamical systems,* Indiana Math. J., 54(2005), 755–778.

[7] T. Kajiwara and Y. Watatani, *A construction of C^*-algebras from C^*-correspondences,* J. Operator Theory, to appear

[8] T. Kajiwara and Y. Watatani, *KMS state on graph C^*-algebras,* in preparation,

[9] T. Kajiwara and Y. Watatani, *Maximal abelian subalgebras of the C^*-algebras associated with complex dynamical systems,* in preparation,

[10] T. Katsura *A construction of C^*-algebras from C^*-correspondences,* Advances in quantum dynamics, Contemp. Math. 335(2005), 173–182.

[11] T. Katsura, *On C^*-algebras associated with C^*-correspondences,* J. Funct. Anal. 217(2004), 366–401.

[12] W. Krieger, *On dimension functions and topological Markov chains,* Invent. Math. 56(1980), 239–250

[13] M. Laca and S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras,* J. Funct. Anal. 211(2004) 457–482

[14] K. Matsumoto, *Dimension groups for subshifts and simplicity of the associated C^*-algebras,* J. Math. Soc. Japan 51(1999), 679–698

[15] K. Matsumoto, *Orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras,* arXiv:0707.2114

[16] M. Pimsner, *A class of C^*-algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed product by $\mathbb{Z}$,* Free probability theory, AMS, (1997), 189–212.

[17] J. Tomiyama, *Topological full groups and structures of normalizers in transformation group C^*-algebras,* Pacific J. Math. 173(1996), 571–583