数理解析研究所講究録
第 1700 巻 2010 年 48-64

3 次元双曲空間の平均曲率一定曲面*

山形大学理学部・井ノ口順一 (Jun-ichi Inoguchi)
Department of Mathematical Sciences,
Yamagata University

はじめに

この講演では 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率 H が一定で $0 \leq H^2 < 1$ をみたす曲面の構成について Josef Dorfmeister 氏・小林真平氏との共同研究で得られた成果を報告する.

1　平均曲率一定曲面と可積分系

M を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし, 位置ベクトル場を f, 単位法ベクトル場を n で表す.

定義 1.1

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}f, \quad \mathrm{II} = -\mathrm{d}f \cdot \mathrm{d}n$$

をそれぞれ M の第一基本形式, 第二基本形式とよぶ.

M の各点 p の周りで

$$\mathrm{I} = e^u(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

と表示できる座標系 (x, y) が必ずとれる. この座標系を**等温座標系**(isothermal coordinates) とよぶ. $z = x + yi$ を (x, y) に同伴した**複素座標**とよぶ. z を用いると M の平均曲率 H は次式で計算できる.

$$H = 2e^{-u}(f_{z\bar{z}} \cdot n).$$

ここで $\cdot$ はベクトルの内積を表す.

定義 1.2 H が一定値である曲面 M を**平均曲率一定曲面**とよぶ. とくに $H = 0$ である曲面を**極小曲面**とよぶ.

*We dedicate this work to the memory of Hongyou Wu.

M の大域的不変量である **Hopf 微分**を

$$Q\mathrm{d}z^2, \quad Q = f_{zz} \cdot n$$

で定義する．曲面は 3 つのデータ, 第一基本形式, 平均曲率, Hopf 微分で決定される．

「体積を保つ変形下での表面積の変分問題」から平均曲率が零でなく一定である曲面の微分方程式が導かれることを注意しておく．この事実から閉じた平均曲率一定曲面はしゃぼん玉の数学的モデルとみなされる．一方, 極小曲面は石鹸幕の数学的モデルとみなされる ([15] 参照).

曲面の積分可能条件は以下の連立偏微分方程式で与えられる．

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^u - 2|Q|^2e^{-u} = 0 \text{ (Gauss 方程式)},$$
$$Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^u \quad \text{(Codazzi 方程式)}.$$

Codazzi 方程式から M が平均曲率一定であることと Q が正則であることが同値であることがわかる．

$\mathrm{I}^{-1}\,\mathrm{II}$ の固有値を M の主曲率とよぶ．ふたつの主曲率の値が一致する点を臍点とよぶ．臍点は Q の零点と一致する．

定理 1.1 M のすべての点が臍点であるならば M は平面か球面である．

定理 1.2 (Hopf 1951) 種数が 0 の閉曲面, すなわち位相的に球面である曲面の平均曲率が一定ならば M は球面である．

(証明) M 上の正則 2 次微分は恒等的に 0 なので (Riemann-Roch の定理), M の点はすべて臍点． □

以下, 球面でも平面でもない平均曲率一定曲面 ($H \neq 0$) を考察する．この仮定の下では臍点は孤立点であることを注意しておく．

臍点以外の点のまわりでは $Q = H/2$ となるように複素座標 z を取り直すことができる．この座標 $z = x + yi$ では Gauss-Codazzi 方程式は sinh-Laplace 方程式 ($A_1^{(1)}$ 型戸田場方程式)

$$u_{z\bar{z}} + H^2 \sinh u = 0$$

になる．極小曲面の場合は Liouville 方程式

$$u_{z\bar{z}} - 2e^{-u} = 0$$

になるような z をとることができる．

Liouville 方程式は一般解を与える公式が存在する．その事実の反映として極小曲面の積分表示式が得られる．

定理 1.3 (Weierstrass-Enneper の公式) 極小曲面 $f : M \to \mathbb{R}^3$ は単連結領域 $\mathbb{D} \subset M$ 上で

$$f(z,\bar{z}) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\varphi}{2}(1-g^2), i\frac{\varphi}{2}(1+g^2), \varphi g\right)\mathrm{d}z \tag{1.1}$$

と表示できる．ここで φ は正則函数, g は有理型函数である．

この表現公式は, **複素解析的なデータ** g と φ から極小曲面が構成できることを示している．この公式を用いて得られる極小曲面については [7] を参照されたい．

註 1.1 (Gauss 写像) 曲面 (M,f) の単位法ベクトル場 n は $n : M \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ という写像とみなせる．これを M の **Gauss 写像**とよぶ．Weierstrass-Enneper の公式における有理型函数 g は f の Gauss 写像を立体射影で写したものとなる．

2 順問題・逆問題

平均曲率一定曲面は第一基本形式と平均曲率を保ったまま連続的に変形できる．実際, Q を $\lambda^{-1}Q$ $(\lambda \in \mathbb{S}^1)$ と変形しても Gauss-Codazzi 方程式が変わらないので単連結領域 $\mathbb{D}$ で定義され

$$\mathrm{I}_\lambda = \mathrm{I}, \quad H_\lambda = H, \quad Q_\lambda = \lambda^{-1}Q$$

を第一基本形式, 平均曲率, Hopf 微分にもつ平均曲率一定曲面 f_λ が存在する．連続変形の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{S}^1}$ を f の同伴族とよぶ．変形のパラメータ λ は逆散乱法における固有値 (**スペクトル径数**) と一致していることを注意しておこう．各 f_λ に対し正規直交枠

$$F_\lambda = (e^{-u/2}(f_\lambda)_x, e^{-u/2}(f_\lambda)_y, n_\lambda) : \mathbb{D} \subset M \to \mathrm{SO}(3)$$

をとる．さらに F_λ の SU(2) へのリフトをとり, それを $\Phi = \Phi_\lambda$ と書く．すると次の Lax 表示を得る[1]．

$$\Phi_z = \Phi U, \quad \Phi_{\bar{z}} = \Phi V,$$

$$U = \begin{pmatrix} u_z/4 & -\lambda^{-1}He^{u/2}/2 \\ \lambda^{-1}Qe^{-u/2} & -u_z/4 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}}/4 & -\lambda\bar{Q}e^{-u/2} \\ \lambda He^{u/2}/2 & u_{\bar{z}}/4 \end{pmatrix}.$$

[1]正確には Φ_λ に適当なゲージ変換を施す必要がある．[8], [12] を参照．

行列値波動函数 Φ は $\Phi:\mathbb{D}\times\mathbb{S}^1\to\mathrm{SU}(2)$ という写像であるが，これを $\Phi:\mathbb{D}\to\Lambda\mathrm{SU}(2)_\sigma$ と見ることができる．ここで

$$\Lambda\mathrm{SU}(2)_\sigma=\{g(\lambda):\mathbb{S}^1\to\mathrm{SU}(2)\mid\sigma(g(\lambda))=g(-\lambda)\},$$

$$\sigma(X)=\sigma_3X\sigma_3^{-1}$$

は SU(2) の twisted loop group とよばれている (σ_3 は Pauli のスピン行列).

σ は 2 次元球面のリーマン対称空間表示 $\mathbb{S}^2=\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ を定めることを注意しておく．Lax 表示と σ との関係を説明しよう．

平均曲率一定という性質は Gauss 写像の調和性で特徴づけられる．

定理 2.1 (Ruh-Vilms [21]) 曲面 $f:M\to\mathbb{R}^3$ に対し H が定数であることと Gauss 写像 $n:M\to\mathbb{S}^2$ が調和写像であることは同値である．とくに (M,f) が極小曲面であることと n が正則写像，すなわち有理型函数であることは同値.

2 次元球面 $\mathbb{S}^2$ はコンパクト・リーマン対称空間の典型例である.

Dorfmeister, Pedit, Wu [5] は単連結リーマン面からコンパクト・リーマン対称空間に値をもつ調和写像の構成方法を与えた．この方法は無限次元リー環（loop algebra）に値をもつ**複素解析的データ**(**ポテンシャル**とよばれる) から，ループ群の分解定理（リーマン・ヒルベルト問題を解くこと）を用いて調和写像を得るというものである．彼らの得た方法は generalised Weierstrass-type representation, あるいは DPW **法**とよばれている．DPW 法を $\mathbb{S}^2$ 値の調和写像に適用することで，与えられたポテンシャルから平均曲率一定曲面を構成することができる． この操作を「平均曲率一定曲面に対する DPW 法」とよぶ．DPW 法は次のように述べられる.

ポテンシャル $\xi=\sum_{j=-\infty}^{-1}\xi_j(z)\lambda^j$ を選ぶ．ξ は $\mathbb{D}$ から loop algebra $\Lambda\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\sigma$ に値をもつ正則函数である.

(1) 常微分方程式 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z}=C\xi$ を解く.

(2) twisted loop group

$$\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma=\{g(\lambda):\mathbb{S}^1\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mid\sigma(g(\lambda))=g(-\lambda)\}$$

の Riemann-Hilbert 分解 (岩澤分解)

$$\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma=\Lambda\mathrm{SU}(2)_\sigma\cdot\Lambda_*^+\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma,$$

$$\Lambda_*^+ \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma = \left\{ g(\lambda) = \mathrm{Id} + \sum_{j\geq 1} g_j \lambda^j \in \Lambda \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma \right\}$$

に沿って $C = \Phi V_+$ と分解すると Φ は Lax 方程式の解である.

一般の場合の DPW 法を 6 節で改めて紹介する. 平均曲率一定曲面に対する DPW 法については [8], [12], [18] を参照されたい.

3 空間形の場合

曲率が c の 3 次元実空間形を $\mathcal{M}^3(c) = (\mathcal{M}^3(c), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ で表す. $\mathcal{M}^3(c)$ 内の曲面 (M,f) の単位法ベクトル場を n とする. $\mathbb{R}^3$ のときと同様に第一基本形式 I, 第二基本形式 II, 平均曲率 H, ホップ微分 $Q\mathrm{d}z^2$ を定義する. Gauss-Codazzi 方程式は

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2 + c)e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0, \quad Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^u.$$

で与えられる.

平均曲率一定曲面の場合に次の事実が得られる.

命題 3.1 平均曲率一定曲面 $f : M \to \mathcal{M}^3(c)$ に対し, $(\mathbb{D}, z)$ を単連結領域とする. $\mathbb{D}$ 上で定義された曲面 $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathcal{M}^3(\tilde{c})$ で

$$\tilde{\mathrm{I}} = \mathrm{I} = e^u \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}, \quad \tilde{H}^2 + \tilde{c} = H^2 + c, \quad \tilde{Q} = Q$$

をみたすものが存在する. この $\tilde{f}$ を f の **Lawson 対応面**(Lawson correspondent) とよぶ [20].

例 3.1 f が $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面であれば双曲空間 $\mathcal{M}^3(-1) = \mathbb{H}^3$ に平均曲率 ± 1 の Lawson 対応面が存在する.

この対応を援用して 3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ および双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率一定曲面に対し DPW 法を移植することができる ([22]). ただし $\mathbb{H}^3$ においては $H^2 > 1$ という条件が課される. 実際, 平均曲率一定曲面 $f : M \to \mathbb{H}^3$ に対し Lawson 対応面が $\mathbb{R}^3$ に存在するならば $H^2 - 1 = \tilde{H}^2 \geq 0$ である. また $\mathbb{S}^3$ に対応面があれば $H^2 - 1 = \tilde{H}^2 + 1 \geq 1$ であることに注意しよう.

したがって $\mathbb{H}^3$ において平均曲率が $0 \leq H^2 < 1$ をみたす定数である曲面は $\mathbb{R}^3$ や $\mathbb{S}^3$ に類似物をもたない, **真に双曲幾何学的な対象**であるといえる.

4 cosh-Laplace 方程式

M を 3 次元双曲空間 $\mathcal{M}^3(-1) = \mathbb{H}^3$ 内の平均曲率一定曲面とする. 臍点でない点のまわりでは以下のような複素座標 z をとることができる.

- $u_{z\bar{z}} + (H^2 - 1)\sinh u = 0$ if $H^2 > 1$.
- $u_{z\bar{z}} - 2e^{-u} = 0$ if $H^2 = 1$.
- $u_{z\bar{z}} + (H^2 - 1)\cosh u = 0$ if $H^2 < 1$.

cosh-Laplace 方程式 $u_{z\bar{z}} + \cosh u = 0$ は**双曲幾何特有の方程式**であることがわかった.

5 Ruh-Vilm 型定理

双曲空間の曲面に対して Ruh-Vilms 型の定理がまず必要になる. まず Gauss 写像を定義しよう.

定義 5.1 リーマン多様体 (N^n, h) に対し

$$\mathrm{Gr}_k(TN^n) = \bigcup_{q \in N} \mathrm{Gr}_k(T_qN)$$

で定まるファイバー束を Grassmann **束**という. ここで $\mathrm{Gr}_k(T_qN)$ は N の点 q における接空間 T_qN 内の向きのついた k 次元線型部分空間のなす Grassmann 多様体を表す.

Grassmann 束には h からリーマン計量を誘導することができる (**佐々木リフト計量**). 佐々木リフト計量に関し $\mathrm{Gr}_k(TN^n)$ から N への射影はリーマン沈めこみである.

定義 5.2 等長はめ込み $f : (M^m, g) \to (N,^n, h)$ に対し

$$\psi(p) := \mathrm{d}f_p(T_pM) \in \mathrm{Gr}_m(T_{f(p)}N)$$

で定まる写像 ψ を f の **Gauss 写像**とよぶ.

この Gauss 写像に関し次が成立する.

命題 5.1 (Jensen-Rigoli [14]) 曲面 $f : M \to \mathbb{S}^3$ が平均曲率一定であることと ψ が調和であることは同値. $f : M \to \mathbb{H}^3$ が極小であることと ψ が調和であることは同値.

$\mathrm{Gr}_2(T\mathbb{S}^3)$ 及び $\mathrm{Gr}_2(T\mathbb{H}^3)$ はリーマン対称空間ではない．このままでは DPW 法を $\mathbb{H}^3$ 内の極小でない平均曲率一定曲面 ($0 < H^2 < 1$) に対し新たに構成することができない．そこでこの命題を見直すことから始める．

まず $\mathrm{Gr}_{n-1}(TN^n)$ は (N^n, h) の単位接ベクトル束 $\mathrm{U}N$ と同一視できることに着目する．すると次のように Gauss 写像の定義を書き直すことができる．

定義 5.3 曲面 $f : (M^2, g) \to (N^3, h)$ を単位法ベクトル場 n をもつ等長はめ込みとする．n は $\mathrm{U}N^3$ への写像 $F := (f; n) : M \to \mathrm{U}N^3$ を定めている．この F を f の Gauss 写像とよぶ.

N の接束 (tangent bundle) TN の正準形式から $\mathrm{U}N^3$ に接触形式が誘導される．この接触形式を ω とする．Gauss 写像は $F^*\omega = 0$ をみたしている．

定義 5.4 $F : M^2 \to \mathrm{U}N^3$ が $F^*\omega = 0$ をみたすとき F を **Legendre 写像**とよぶ.

$N^3 = \mathbb{H}^3 = \mathrm{SO}^+(3,1)/\mathrm{SO}(3)$ と選ぶ．このとき $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は Stiefel 多様体

$$\{(x, v) \in \mathbb{E}^4_1 \times \mathbb{E}^4_1 \mid \langle x, x\rangle = -1,\ x_0 > 0, \langle x, v\rangle = 0, \langle v, v\rangle = 1, \}$$

と同一できることに着目する．この同一視から $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は等質空間表示

$$\mathrm{U}\mathbb{H}^3 = \mathrm{SO}^+(3,1)/\mathrm{SO}(2)$$

をもつことがわかる．そこで $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ に佐々木リフト計量でなく $\mathrm{SO}^+(3,1)$ の両側不変計量から定まる擬リーマン計量を与える．この計量に関し $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は正規等質空間 (normal homogeneous space) である．とくに標準簡約空間 (naturally reducive homogeneous space) である．ただし**対称空間ではない**．この計量は不定値であるが次の利点をもつことが確かめられる．

定理 5.1 平均曲率一定曲面の Gauss 写像 $F : M \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は上述の擬リーマン計量に関し調和である．

この事実は本質的に石原徹 [13] によって得られていた．

以上のことから $\mathbb{H}^3$ の平均曲率一定曲面の構成については, 正規等質空間 $\mathrm{SO}^+(3,1)/\mathrm{SO}(3)$ への Legendre 調和写像の構成を考えればよいということまで到達できた．

註 5.1 (双曲的ガウス写像) $\mathrm{Geo}(\mathbb{H}^3)$ を $\mathbb{H}^3$ 内の向きづけられた測地線全体とする．この空間は $\mathbb{E}^4_1$ 内の時間的に向き付けられた時間的平面のなす Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_{1,1}(\mathbb{H}^3) = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \setminus \text{diagonal set}$ と同一視できる．

射影 $\pi_1 : \mathrm{U}\mathbb{H}^3 \to \mathrm{Geo}(\mathbb{H}^3)$ は等質空間の射影 $\pi_1 : \mathrm{SO}^+(3,1)/\mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}^+(3,1)/\mathrm{SO}(1,1) \times \mathrm{SO}(2)$ と同一視できる． 写像 $F : M \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3$ が Legendre であるというのは F が π_1 に関し水平的ということである．

また, 曲面 $f : M \to \mathbb{H}^3$ の Gauss 写像 $F : M \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3$ の射影 $\pi_1 \circ F = (g_1, g_2)$ は双曲的 Gauss 写像 (hyperbolic Gauss map [6]) の組を与える．

6 等質空間への調和写像

G/H を正規等質空間とし, 原点における接空間を G のリー環 $\mathfrak{g}$ の線型部分空間 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ と同一視する． $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ と $\mathfrak{g}$ を分解する．

単連結リーマン面 $\mathbb{D}$ から G/H への写像 $\psi : \mathbb{D} \to G/H$ に対し G へのリフト Ψ をとる (framing とよぶ)． α は次をみたす (**Maurer-Cartan 方程式**):

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0.$$

リー環の分解に沿って $\alpha = \alpha_{\mathfrak{h}} + \alpha_{\mathfrak{p}}$ と分解すると, ψ の調和性は次のように言い換えられる (**調和写像方程式**).

$$d(*\alpha_{\mathfrak{p}}) + [\alpha \wedge \alpha_{\mathfrak{p}}] = 0.$$

ここで $*$ は $\mathbb{D}$ の Hodge star 作用素を表す． $\alpha_{\mathfrak{p}}$ を $\mathbb{D}$ の共形構造に関して

$$\alpha_{\mathfrak{p}} = \alpha'_{\mathfrak{p}} + \alpha''_{\mathfrak{p}}$$

と分解する．

$$\alpha_\lambda := \alpha_{\mathfrak{h}} + \lambda^{-1}\alpha'_{\mathfrak{p}} + \lambda\alpha''_{\mathfrak{p}}, \quad \lambda \in \mathbb{S}^1 \tag{6.1}$$

と定めよう． $d + \alpha_\lambda$ は $\mathbb{D}$ 上の主束 Ψ^*G の接続を定めることに注意する．

命題 6.1 (Burstall-Pedit [1]) $\psi : \mathbb{D} \to G/H$ に対し (1)

$$[\alpha'_{\mathfrak{p}} \wedge \alpha''_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} = 0 \tag{6.2}$$

ならば, Maurer-Cartan 方程式と調和写像方程式の組は, 接続 $d + \alpha_\lambda$ がすべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対し平坦, すなわち

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0, \quad \forall\lambda \in \mathbb{S}^1. \tag{6.3}$$

(2) 単連結領域 $\mathbb{D}$ で定義された (6.1) の形をした $\mathfrak{g}$ 値の 1 次微分形式の族 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{S}^1}$ を考える． この族が (6.2) と (6.3) をみたすならば $\Psi_\lambda^{-1}d\Psi_\lambda = \alpha_\lambda$ をみたす $\Psi_\lambda : D \times \mathbb{S}^1 \to G$ が存在し, $\psi_\lambda := \Psi_\lambda H : \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \to G/H$ は調和写像の 1 径数族を与える．

条件 (6.2) はいつみたされるかが問題となる. G/H が擬リーマン対称空間のときは $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h}$ であるから, 任意の G/H 値調和写像は (6.2) をみたす.

これまでに知られていた (6.2) をみたす調和写像は次の 2 種類である.

- G/H をリーマン一般対称空間 (k-symmetric space) とする. G/H を定める G の次数 $k > 2$ の自己同型写像を τ とし $\mathrm{d}\tau$ による $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の固有空間分解を
$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$
と表す. $\psi : M \to G/H$ が条件 $\mathrm{d}\psi(T'M) \subset \mathfrak{g}_{-1}$ をみたすとき ψ を**原始写像**(primitive map) とよぶ. 原始写像は (6.2) をみたす.

- G/H をリーマン対称空間 G/K 上のツイスター空間とする. **水平的正則曲線**(horizontal holomorphic curve)$\psi : M \to G/H$ は (6.2) をみたす.

どちらのクラスも 1 階の PDE によって定義される系であることに注意されたい (調和写像の方程式は 2 階楕円型 PDE). 1 階の PDE に帰着する系以外には (6.2) をみたす調和写像の例は知られていなかった.

7 DPW 法

単位接ベクトル束 $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ への調和写像を再び考察する.

命題 7.1 Legendre 写像 $F : M \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は (6.2) をみたす.

この事実から Legendre 調和写像は零曲率表示をみたすことがわかる. しかしながら零曲率表示をみたすということと, generalised Weierstrass-type representaion を許容することとの間には大きな開きがある. 調和写像からポテンシャルを導くこと (順問題) はできるが, 逆問題, すなわちポテンシャルから調和写像を復元・構成することは一般にはできない. 擬リーマン対称空間に値をもつ調和写像の場合は, 逆問題が解ける. まずこの事実を簡略に説明する [5].

リーマン対称空間 G/H に値をもつ調和写像 $\psi : \mathbb{D} \to G/H$ に対し既に説明したように $\Psi_\lambda : \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \to G$ で
$$\Psi_\lambda^{-1}\mathrm{d}\Psi_\lambda = \alpha_{\mathfrak{h}} + \lambda^{-1}\alpha'_{\mathfrak{p}} + \lambda\alpha''_{\mathfrak{p}}$$
をみたす Ψ_λ が存在する. この Ψ_λ は extended framing とよばれている.

Ψ_λ は twisted loop group
$$\Lambda G_\sigma = \{g : \mathbb{S}^1 \to G \mid \sigma(g(\lambda)) = g(-\lambda)\}$$

に値をもつ．ここで σ は G/H の定める G の対合である．**DPW 順問題**とは以下の操作をいう．

(1) G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ の twisted loop group

$$\Lambda G_{\sigma}^{\mathbb{C}} = \{g : \mathbb{S}^1 \to G^{\mathbb{C}} \mid \sigma(g(\lambda)) = g(-\lambda)\}$$

の Birkhoff 分解

$$\begin{aligned}
&\Lambda_*^- G_\sigma^{\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}} \subset \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}},\\
&\Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}} = \left\{ g(s) = \sum_{j>0} g_j \lambda^j \in \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}} \right\},\\
&\Lambda_*^- G_\sigma^{\mathbb{C}} = \left\{ g(s) = \mathrm{Id} + \sum_{j\le -1} g_j \lambda^j \in \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}} \right\}
\end{aligned}$$

を用いて $\Psi_\lambda = \Psi_\lambda^- \Psi_\lambda^+$ と分解する．

(2) $\xi := (\Psi_\lambda^-)^{-1} \mathrm{d}\Psi_\lambda^-$ とおくと ξ は twisted loop algebra

$$\Lambda \mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}} = \{g(\lambda) : \mathbb{S}^1 \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid \mathrm{d}\sigma(g(\lambda)) = g(-\lambda)\}$$

に値をもつ正則 1 次微分形式で

$$\xi = \lambda^{-1} \xi_{-1}$$

という形をしている．この ξ を**正規ポテンシャル**(normalised potential) とよぶ．

DPW 逆問題, すなわち DPW 法とは

(1) 与えられた正則ポテンシャル (holomorphic potential) $\xi = \sum_{j=-\infty}^{-1} \xi_j \lambda^j$ に対し $\mathrm{d}C = C\xi$ を解く．

(2) C を twisted loop group $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ の **Riemann-Hilbert 分解**(**岩澤分解**)

$$\begin{aligned}
&\Lambda G_\sigma \times \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}} \subset \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}},\\
&\Lambda_*^+ G_\sigma^{\mathbb{C}} = \left\{ g(s) = \mathrm{Id} + \sum_{j\ge 1} g_j \lambda^j \in \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}} \right\}
\end{aligned}$$

を使って $C = \Psi_\lambda V^+$ と分解する (G がコンパクトのときは Riemann-Hilbert 分解は等号成立である)．

(3) $\psi_\lambda := \Psi_\lambda H$ は $\mathbb{D}$ から G/H への調和写像の 1 径数族を与える．

正則ポテンシャル ξ は対合 σ に関する同変性条件をみたしていることに注意する．また σ に関する同変性条件から ψ が G/H への調和写像であることが導かれることを注意しておく．

問題の Legendre 調和写像の場合, $\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ が対称空間でないために, 対合を用いてポテンシャルの特徴づけができないのである.

8 新しいDPW法

1+3次元Minkowski時空 $\mathbb{R}^{1,3}$ を2次複素エルミート行列の全体 $\mathrm{Her}(2,\mathbb{C})$ と同一する．このとき $\mathbb{H}^3$ は

$$\mathbb{H}^3 = \{X \in \mathrm{Her}(2,\mathbb{C}) \mid \det X = 1, \quad \mathrm{tr}\, X > 0\}$$

で与えられる．また $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3;\ (A, X) \longmapsto AX\bar{A}^t$$

で推移的かつ等長的に作用する．とくに $\mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ と対称空間表示できる．$\mathrm{U}\mathbb{H}^3$ は $\mathrm{U}\mathbb{H}^3 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{U}(1)$ と正規等質空間表示される.

以下, 平均曲率が $H^2 < 1$ の場合のみ考察する．$H = \tanh q$ と表す．すると $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^3$ に対し

$$\Phi_\lambda : \mathbb{D} \times C_r \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad C_r = \{\lambda = e^{-q/2}\nu \mid \nu \in \mathbb{S}^1\}$$

で

$$\sigma(\Phi_\lambda) = \Phi_{-\lambda}, \quad \tau_4(\Phi_\lambda) = \Phi_\lambda$$

をみたす extended framing Φ_λ がとれる．ここで τ_4 は twisted loop group

$$\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma = \{g(\lambda) : C_r \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mid \sigma(g(\lambda)) = g(-\lambda)\}$$

の自己同型写像で「第4種概コンパクト型」とよばれるものである (Kac-Moody 代数の研究 [19] で見つけられたものである．[16] 参照).

$$\tau_4(g(\lambda)) = \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{i} & 0 \\ 0 & \sqrt{i} \end{pmatrix} \left[\overline{g(i/\bar{\lambda})}^t\right]^{-1}.$$

実際, f の同伴族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{S}^1}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平均曲率一定のときと同じやり方で定め正規直交枠

$$(f_\lambda, e^{-u/2}(f_\lambda)_x, e^{-u/2}(f_\lambda)_y, n_\lambda) : \mathbb{D} \to \mathrm{SO}^+(1,3)$$

をとる．正規直交枠は Lorentz 群に値をもつ．この正規直交枠の SL$(2,\mathbb{C})$ へのリフトを $\tilde{\Phi}_\lambda$ とする．適当なゲージ変換を $\tilde{\Phi}_\lambda$ に施すと Lax 方程式

$$\Phi_z = \Phi U, \quad \Phi_{\bar{z}} = \Phi V,$$
$$U = \begin{pmatrix} u_z/4 & -\nu^{-1}\mathcal{H}e^{u/2} \\ \nu^{-1}\mathcal{Q}e^{-u/2} & -u_z/4 \end{pmatrix},$$
$$V = \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}}/4 & -\nu\bar{\mathcal{Q}}e^{-u/2} \\ \nu\mathcal{H}e^{u/2} & u_{\bar{z}}/4 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{H} = ie^{-q}(H+1), \quad \mathcal{Q} = -iQ, \quad \nu = e^{-q/2}\lambda \in C_r$$

をみたす $\Phi = \Phi_\lambda : \mathbb{D} \times C_r \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が得られる．これが求めたかった Φ_λ である．

自己同型写像 τ_4 を用いて次の分解定理が得られる．

定理 8.1 (岩澤型分解定理 [2]) ω_0 を

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．twisted loop group $\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_{\sigma,\tau}$ を

$$\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_{\sigma,\tau} = \{g \in \Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mid \tau(g(\lambda)) = g(\lambda)\}$$

で定めると

$$\Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_{\sigma,\tau} \times \{\mathrm{Id},\ \omega_0\} \times \Lambda^+\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \Lambda\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})_\sigma$$

は稠密開集合上への微分同相写像.

この分解定理を用いることにより $H^2 < 1$ の平均曲率一定曲面を構成できる.

定理 8.2 ($H^2 < 1$ の場合の DPW 法 [2]) (1) 与えられた正則ポテンシャル ξ に対し $dC = C\xi$, $C(0) = \mathrm{Id}$ を解く．

(2) C を定理 8.1 を用いて $C = \Psi_\lambda V^+$ と分解する．

(3)
$$f_\lambda = \Psi_\lambda \begin{pmatrix} e^{-q/2} & 0 \\ 0 & e^{q/2} \end{pmatrix} \overline{\Psi_\lambda}^t \Big|_{\lambda = e^{-q/2}}$$

は平均曲率が一定値 $H = \tanh q$ の平均曲率一定曲面の 1 径数族を与える．

f_λ のガウス写像は

$$F_\lambda = (f_\lambda, n_\lambda), \quad n_\lambda = \Psi_\lambda \begin{pmatrix} e^{-q/2} & 0 \\ 0 & -e^{q/2} \end{pmatrix} \overline{\Psi_\lambda}^t \Big|_{\lambda = e^{-q/2}}$$

で与えられる.

以上より $\mathbb{H}^3$ の $H^2 < 1$ をみたす平均曲率一定曲面および cosh-Laplace 方程式に対する初期値問題の解法を与えることができた. 新しい DPW 法を用いて得られた曲面については [2], [17] を参照されたい.

9 sinh-Laplace VS cosh-Laplace

本稿では cosh-Laplace 方程式の Lax 表示・初期値問題の解法を双曲幾何における平均曲率一定曲面を介して求めてきたが, sinh-Laplace 方程式の場合に比べて複雑な様相を呈していた. この "複雑さ" について解説を試みよう.

sinh-Laplace 方程式と cosh-Laplace 方程式のラックス表示に付随する twisted loop group を比較してみよう.

sinh-Laplace 方程式の場合はリーマン対称空間 $\mathbb{S}^2 = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ に対応する対合 $\sigma : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SU}(2)$ を自然に loop group $\Lambda\mathrm{SU}(2)$ に拡張して得られる自己同型写像を用いて twisted loop group が定められた.

一方, cosh-Laplace 方程式の場合, τ_4 は $A_1^{(1)}$ 型アフィン・リー代数の有限次数の自己同型写像の分類で見つかったものである. とくに注意すべきことは, τ_4 は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限次数自己同型写像を loop group $\Lambda\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に**拡張したものではない**ということにある.

すなわち, この loop group は cosh-Laplace 方程式の "スペクトル径数込みの Lax 表示" が得られてはじめて, その姿を現すのである. 本稿ではそのような Lax 表示を $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率一定曲面の微分幾何を用いて導いたことを改めて強調しておこう.

別の観点から cosh-Laplace 方程式を捉えておこう. sinh-Laplace 方程式・Liouville 方程式・cosh-Laplace 方程式を双曲型に変えて得られる非線型波動方程式は $1+2$ 次元 Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の時間的平均曲率一定曲面の積分可能条件に現れる ([3], [9]). また sine-Gordon 方程式は $\mathbb{R}^3$ 内の Gauss 曲率が -1 の曲面の積分可能条件である. これらの "可積分曲面 (integrable surface)" を綜合的に捉えるために Dorfmeister, 小林, Pedit

[4] は平均曲率一定曲面の Gauss-Codazzi 方程式の複素化

$$
\begin{aligned}
u_{zw} + \frac{1}{2}H^2 e^u - 2QRe^{-u} &= 0, \\
Q_w &= \frac{1}{2}H_z e^u, \\
R_z &= \frac{1}{2}H_w e^u
\end{aligned}
$$

を考え, "complex surface of constant mean curvature"の概念を導入した. complex Gauss-Codazzi 方程式の実形 (real form) としてどのような曲面が得られるのだろうか. twisted loop algebra $\Lambda\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\sigma$ の実形の分類をもとに小林は complex surface of constant mean curvature の実形を定めその分類を与えた.

定理 9.1 (小林 [16]) 実形として得られる曲面は以下のとおり.

(1) Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の空間的・Gauss 曲率が負で一定の曲面 (空間的・平均曲率が零でない一定値の曲面). 積分可能条件は

$$u_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}H^2 \sinh u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}^2.$$

(2) Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の時間的・Gauss 曲率が負で一定の曲面.

$$u_{z\bar{z}} - \sin u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^{1,1}.$$

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の Gauss 曲率が正で一定の曲面 (平均曲率が零でない一定値の曲面). 積分可能条件は

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2 \sinh u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2.$$

(4) $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率が一定で $0 \leq H^2 < 1$ をみたす曲面. 積分可能条件は

$$u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}(H^2 - 1)\cosh u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{U}\mathbb{H}^3.$$

(5) Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の空間的・Gauss 曲率が正で一定の曲面. 積分可能条件は

$$u_{st} + \sin u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{H}^2.$$

(6) Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,2}$ 内の時間的・Gauss 曲率が正で一定の曲面. (時間的・平均曲率が零でない一定値の曲面). 積分可能条件は

$$u_{st} + \frac{1}{2}H^2 \sinh u = 0, \quad u_{st} + \frac{1}{2}H^2 e^u = 0, \quad u_{st} + \frac{1}{2}H^2 \cosh u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{S}^{1,1}.$$

(7) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の Gauss 曲率が負で一定の曲面. 積分可能条件は

$$u_{st} + \sin u = 0.$$

同伴する調和写像は

$$n : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathbb{S}^2.$$

(4) 以外はすべて平坦な時空・空間内の曲面であり, 対応する調和写像 (Gauss 写像) も 2 次元空間または $1+1$ 次元時空に値をもっている. この分類から見ても cosh-Laplace 方程式は他の可積分方程式とは異質であることが伺えるだろう.

謝辞

講演の機会をくださった礒島伸先生・原稿の不備をご指摘くださった小林真平先生に御礼申し上げます.

参考文献

[1] F. E. Burstall and F. Pedit, Harmonic maps via Adler-Kostant-Symes theory, in: *Harmonic Maps and Integrable Systems*, Aspects Math., E23, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 221–272.

[2] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, and S.-P. Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups, 投稿中.

[3] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, and M. Toda, Weierstarß-type representation of timelike surfaces with constant mean curvature, in: *Differential Geometry and Integrable Sytems* (Tokyo 2000), Contemp. Math. 308 (2002), 77–99.

[4] J. Dorfmeister, S.-P. Kobayashi and F. Pedit, Complex surfaces of constant mean curvature fibered by minimal surfaces, Hokkaido Math. J., to appear.

[5] J. Dorfmeister, F. Pedit, and H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. Comm. Anal. Geom. 6 (1998), no. 4, 633–668.

[6] C. L. Epstein, The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections, J. Reine Angew. Math. 372 (1986) 96–135.

[7] 藤森祥一, 極小曲面を視る, 数学セミナー, 2010 年 1 月号.

[8] 藤森祥一, 小林真平, ウェイン・ラスマン, Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces, Rokko Lectures in Math. 17, 神戸大学理学部数学教室, 2005.

[9] C. H. Gu, H. S. Hu and J. Inoguchi, On time-like surfaces of positive constant Gaussian curvature and imaginary principal curvatures, J. Geom. Phys. 41 (2002) 296–311.

[10] 井ノ口順一, 非線型ダランベール公式について, 第 48 回幾何学シンポジウム講演要旨 I pp .1–23. (2001 年 8 月 茨城大学).

[11] 井ノ口順一, 数学的しゃぼん玉, 数学セミナー, 2010 年 1 月号.

[12] 井ノ口順一・小林真平・松浦望, 曲面の微分幾何学とソリトン方程式, 立教 SFR 講究録 No. 8, 2005 年 2 月刊.

[13] T. Ishihara, The harmonic Gauss maps in a generalized sense, J. London Math. Soc. (2) 26 (1982), no. 1, 104–112.

[14] G. R. Jensen and M. Rigoli, Harmonic Gauss maps, Pacific J. Math. 136 (1989), no. 2, 261–282.

[15] 小磯憲史, 変分問題, 共立出版, 1998.

[16] S.-P. Kobayashi, Real forms of complex surfaces of constant mean curvature, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[17] S.-P. Kobayashi, Totally symmetric surfaces of constant mean curvature in hyperbolic 3-space, 投稿中.

[18] 小林真平, 平均曲率一定曲面を視る, 数学セミナー, 2010 年 1 月号.

[19] Z. Kobayashi, Automorphisms of finite order of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Tsukuba J. Math. 10 (1986), no. 2, 269–283.

[20] H. B. Lawson, Complete minimal surfaces in S^3, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 335–374.

[21] E. A. Ruh and J. Vilms, The tension field of the Gauss map, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 569–573.

[22] N. Schmitt, M. Kilian, S.-P. Kobayashi and W. Rossman, Unitarization of monodromy representations and constant mean curvature trinoids in 3-dimensional space forms, J. London Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 2, 563–581.

inoguchi@sci.kj.yamagata-u.ac.jp