数理解析研究所講究録
第1700巻 2010年 85-91

超離散 KdV 方程式における頂点作用素

東京大学数理科学研究科
中田 庸一

2009年11月30日

概要

ソリトン方程式の N-ソリトン解から $N+1$-ソリトン解を生成する “頂点作用素” の超離散 KdV 方程式における対応物を提出し、それが通常のソリトン解だけではなく負の値を取るソリトンにも適用可能であることを示す。

1 イントロダクション

超離散 KdV 方程式は

$$F_j^t + F_{j+1}^{t+2} = \max(F_j^{t+2} + F_{j+1}^t - 2R, F_j^{t+1} + F_{j+1}^{t+1}) \quad (R \geq 0) \tag{1}$$

で与えられる方程式であり、変数変換

$$B_j^t = \frac{1}{2}\left(F_j^{t+1} + F_{j+1}^t - F_{j+1}^{t+1} - F_j^t\right) \tag{2}$$

とし、$|j|$ が十分大きいとき $B_j^t = 0$ となるよう境界条件を課すことによって、一つの箱に最大 R 個入る箱玉系 [1] の時間発展表現

$$B_j^{t+1} = \min\left(R - B_j^t, \sum_{n=-\infty}^{j-1} (B_j^t - B_j^{t+1})\right) \tag{3}$$

に変換される。

(1) において、その N-ソリトン解については [2] において離散 KdV 方程式の解を超離散化するという方法によって既に得られており、また [3] では $R=1$ における箱玉系の初期値問題が解決されている。

超離散系だけで閉じた可積分方程式における代数的構造を持つ解の構成としては高橋、広田らによる Casorati 行列の超離散対応物であるパーマネント型の解を用いた表現 [4] が

ある。可積分方程式では解の本質的構造を記述したのは Plücker 関係式であったが、そのパーマネント型の解における対応物については長井によって提出された (詳しくは [5] または本講究録に収録されている氏による説明を参照のこと)。我々が提出した方法によって生成された解とパーマネント型の解は最終的に同じ形 (前述の [2] による解) にまとめられるのだが、その構成は異なっていることに注意されたい。

ここでは我々は [6] にあるように頂点作用素の超離散対応物と考えられる超離散 KdV 方程式 (1) の $N-1$-ソリトン解を N-ソリトン解に写す作用素を紹介し、実際に生成された関数が超離散 KdV 方程式 (1) を満たすことを示す。さらに我々の提出した頂点作用素が negative soliton と呼ばれる 0 と 1 以外の値を取る場合についても適用可能であることを示す。

2 再帰的表現と頂点作用素

まずは頂点作用素の対象となる関数について考える。超離散 KdV 方程式の N-ソリトン解 F_j^t を t, j を独立変数とし、N 個のソリトンパラメータ $\Omega_1, \ldots, \Omega_N \geq 0$、および N 個の位相パラメータ $C_1, \ldots, C_N$ を持つ関数として定義する。頂点作用素について議論する上でパラメータ Ω_i, C_i が重要な役割を果たし、一方独立変数 t, j は本質ではないため F_j^t を

$$F_j^t = F(\Omega_1, \ldots, \Omega_N; C_1, \ldots, C_N) \tag{4}$$

のようにパラメータのみを表記した形で表し、省略のため $F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C})$ と表す

このとき N-ソリトン解 $(N \geq 1)$ は以下のように $N-1$-ソリトン解を用いて定義されるものとする。

$$F(\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{C}) := \max\left(F(\boldsymbol{\Omega}'; \boldsymbol{C}'), 2\eta_N + F(\boldsymbol{\Omega}'; \boldsymbol{C}' - \boldsymbol{A}'_N)\right) \tag{5}$$

ただし $\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{A}'_N$ は以下で表される。

$$\boldsymbol{\Omega}' = \Omega_1, \ldots, \Omega_{N-1} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}' = {}^t(C_1, \ldots, C_{N-1}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}'_N = {}^t(A_{1,N}, \ldots, A_{N-1,N}) \tag{8}$$

ただし η_i と $A_{i,j}$ は

$$\eta_i = C_i + t\Omega_i - jK_i \tag{9}$$

$$A_{i,j} = 2\min(\Omega_i, \Omega_j) \tag{10}$$

で与えられる。

また $N=1$ のとき、$F(\boldsymbol{\Omega}';\boldsymbol{C}')$ は一切パラメータを持たない (真空解)

$$F(;)=0 \tag{11}$$

であるとする。

ここで (5) における右辺は、$N-1$-ソリトン解 $F(\boldsymbol{\Omega}';\boldsymbol{C}')$ がパラメータ Ω_N, C_N を持つ作用素 $X(\Omega_N, C_N)$ によって $F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C})$ に写った結果であると考える。すなわち

$$X(\Omega_N, C_N)F(\boldsymbol{\Omega}';\boldsymbol{C}') := F(\boldsymbol{\Omega};\boldsymbol{C}) \tag{12}$$

この作用素 X が超離散系における頂点作用素の類似物であると考えられる。また定義に基づく簡単な計算によりパラメータの組 (Ω_i, C_i) についての並べ替えについて不変であることが分かるが、これは頂点作用素 X が互いに交換可能であることを意味する。

連続系における頂点作用素は、例えば連続系の KdV 方程式の場合

$$\Big(1+\exp\big(c+2\sum_{j=0}^{\infty}p^{2j+1}x_{2j+1}\big)\exp\big(-2\sum_{j=0}^{\infty}p^{-2j-1}\frac{\partial}{\partial x_{2j+1}}\big)\Big) \tag{13}$$

のように無限個の独立変数 x_i のシフトによって相互作用項が現れるが、超離散系の場合はこの方法を直接用いることは出来ないため、(5) は本来シフト作用素が受け持っていた相互作用項分の位相のずれを直接差し引いていると考えることが出来る。

なお、ソリトンパラメータ Ω_i に対し、順番を

$$\Omega_N \geq \Omega_{N-1} \geq \ldots \geq \Omega_1 \geq 1 \tag{14}$$

と固定した場合、位相のずれは $A_{i,j}=2\Omega_j\ (i\geq j)$ と簡単になり、このずれは独立変数 t のずれに組み入れることが出来る。即ち再帰的表現 (5) は、独立変数 t のずれと $\max, \pm$ のみを用いて

$$F_j^{(N),t}=\begin{cases}\max(F_j^{(N-1),t}, 2(C_N-j+t\Omega_N)+F_j^{(N-1),t-2}) & (N\geq 1)\\ 0 & (N=0)\end{cases} \tag{15}$$

と表される。解であることを証明はこの表現を用いて行われる (詳細な証明は [6] 参照のこと)。

3 解になることの証明の概略

数学的帰納法を用いて証明する。まず $N=0$ のとき、$R\geq 0$ であることから $F_j^{(0),t}=0$ は解である。次に $N-1$ のとき (15) は解であることを仮定する。"N-ソリトン解" $F_j^{(N),t}$

を超離散 KdV 方程式 (1) の左辺 $F_j^t + F_{j+1}^{t+2}$ に代入すると、四つの候補を持つ max が現れる。

$$F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t+2} \tag{16}$$

$$2(2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t} \tag{17}$$

$$2(C_N - jK_N + t\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2} + F_{j+1}^{(N-1),t+2} \tag{18}$$

$$2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t} \tag{19}$$

ここで $l \geq 0, l+m \geq 0$ について

$$F_j^{(N-1),t+m+2} - F_{j+l}^{(N-1),t+2} - F_j^{(N-1),t+m} + F_{j+l}^{(N-1),t} \leq 2(lK_{N-1} + m\Omega_{N-1}) \tag{20}$$

が成り立つことが示されるので、max の三番目の候補は二番目の候補より小さいことが分かる。つまり三番目の候補は max に寄与しないことが分かる。右辺についても同様に代入すると max に寄与しない候補が現れ、それを落としたものをまとめると以下の 3 つの候補が残る。

$$\max\left(F_j^{(N-1),t+2} + F_{j+1}^{(N-1),t} - 2R, F_j^{(N-1),t+1} + F_{j+1}^{(N-1),t+1}\right), \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&2(2C_N - (2j+1)K_N + (2t+2)\Omega_N) + \\ &\quad \max\left(F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t-2} - 2R, F_j^{(N-1),t-1} + F_{j+1}^{(N-1),t-1}\right),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&2(C_N - (j+1)K_N + (t+2)\Omega_N) + \\ &\max\left(2(K_N - R) + F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t}, 2(K_N - \Omega_N) + F_j^{(N-1),t-1} + F_{j+1}^{(N-1),t+1}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

ここで (16) と (21)、および (17) と (22) は $N-1$ において超離散 KdV 方程式 (1) が成り立つことからそれぞれ同じ値であることが分かる。また (19) と (23) は

$$0 \leq F_j^{(N-1),t} + F_{j+1}^{(N-1),t+2} - F_j^{(N-1),t+1} - F_{j+1}^{(N-1),t+1} \leq 2(\Omega_{N-1} - K_{N-1}) \tag{24}$$

となることが示されるので、やはり同じ値を示すことが分かる。よって max の中身が両辺ともに全く同じになるため等式が示され、N のときも解であることが示された。

今までの議論では $F_j^{(0),t}$ は恒等的に 0 である場合を扱ってきたが、以下の節ではこれを一般の整数値に拡張できることを紹介する。

.2..................
.$\underline{1}$111...............
..$\underline{1}$..111............
...$\underline{1}$....111.........
....$\underline{1}$......111......

図 1　初期値に 2 をおいたもの

.4$\underline{3}$4$\underline{12}$2.............
.$\underline{3}$4$\underline{3}$23$\underline{1}$11...........
..$\underline{3}$4$\underline{32}$2..111111.....
...$\underline{3}$4$\underline{32}$11......11111
....$\underline{3}$4$\underline{32}$.11.........
.....$\underline{3}$4$\underline{32}$..11.......

図 2　適当な初期値を与えたもの

4　負値を取る箱玉系への拡張

容量 1 の箱玉系の時間発展は以下で与えられる。

$$B_j^{t+1} = \min\left(1 - B_j^t, \sum_{n=-\infty}^{j-1} (B_n^t - B_n^{t+1})\right) \tag{25}$$

このとき全ての j について $B_j^t \in \{0,1\}$ であるならば $B_j^{t+1} \in \{0,1\}$ であることが知られている。

しかし例えばある場所に 2 を置き、(25) に従って時間発展させたものは図 4 のようになり -1 という量が現れる (下線を引いた部分は負の値を意味する) ことが観測される。また適当な整数値を並べたものに対して同様に十分な時間を発展させると、1 の塊 (ソリトン) と正負が入り交じった速さ 1 で動く波の二つに分離されることが知られている。後者は negative soliton として知られるものであり、negative soliton のみで構成される解については時刻 0、場所 j における初期値を $B_0(j)$ としたとき以下によって定義される

$F_0(x)$ を用いて $F_j^{(0),t} = F_0(t-j)$ が解になることが知られている [7]。

$$F_0(x) = \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}} B_0(x_0) L(x, x_0) \tag{26}$$

ただし $B_0(x)$ は関係

$$B_0(x) + B_0(x) \leq 1 \tag{27}$$

を満たし、$L(x, x_0)$ は

$$L(x, x_0) = \max(0, 2(x + x_0)) \tag{28}$$

とする。

実はこの negative soliton に対して我々の頂点作用素を作用させることが出来る。

定理 4.1 以下で表される $F_j^{(N),t}$ は超離散 KdV 方程式 (1) の解となる。

$$F_j^{(N),t} = \begin{cases} \max(F_j^{(N-1),t}, 2(C_N - j + t\Omega_N) + F_j^{(N-1),t-2}) & (N \geq 1) \\ F_0(t-j) & (N = 0) \end{cases} \tag{29}$$

ただし $F_0(x)$ は (26) によって定義される。

証明 前節の $F_0(x) = 0$ だったときの証明を見ると、証明において $N = 0$ で $F_j^{(0),t}$ が超離散 KdV 方程式 (1) 及び (20), (24) が成立していれば、後は帰納法によって一般の N でも証明出来ることが分かる。超離散 KdV 方程式を満たすことは先ほど示した。(24) については $F_j^{(0),t}$ が $t-j$ にのみよるので、常に 0 になり成立。よって、残りは (20) であるが

$$\begin{aligned} & F_0(x+l+2) - F_0(x+l) - F_0(x-m+2) + F_0(x-m) \\ = & \sum_{x_0=-l-1}^{m-2} 2(B_0(x_0) + B_0(x_0+1)) \leq 2(m-2-(-l-1)+1) = 2(l+m) \end{aligned} \tag{30}$$

となることから成立。 □

この議論より、任意の整数値を初期値とした箱玉系の問題について F_j^t および B_j^t を明示的に与えられることが予想される。

5 まとめ

超離散 KdV 方程式の N-ソリトン解から $N+1$-ソリトン解を生成する頂点作用素を提出し、それが従来知られていた 0, 1 の値のみをとる箱玉系だけではなく任意の整数値を取る箱玉系の状態についても同様にソリトンを追加出来ることを紹介した。

実は、ある程度決まったソリトン解の形を取ってさえいれば個々の項やその関係に関わらず頂点作用素自体は容易に求めることが出来る。この結果を逆に使って頂点作用素の (15) のようなシフト作用素と max, + からのみなる作用素を用いて生成された関数が解であることを証明することもまた出来るだろう。その場合、前述のようにソリトン解以外の解を取り上げている可能性があり超離散系でなければ現れないような解とその構造について議論できる可能性がある。

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 59:3514–3519, 1990.

[2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma. From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3247–3250, 1996.

[3] J. Mada, M. Idzumi, and T. Tokihiro. The box-ball system and N-soliton solution of the ultradiscrete KdV equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:no. 17, 1757207, 23pp., 2008.

[4] D. Takahashi and R. Hirota. Ultradiscrete soliton solution of permanent type. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 76:104007, 2007.

[5] H. Nagai. A new expression of soliton solution to the ultradiscrete Toda equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:235204 (12pp), 2008.

[6] Y. Nakata. Vertex operator for the ultradiscrete KdV equation. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:412001 (6pp), 2009.

[7] R. Hirota. New Solutions to the Ultradiscrete Soliton Equations. *STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS*, 122:361–376, 2009.