数理解析研究所講究録
第 1700 巻 2010 年 132-145

超離散 Plücker 関係式を用いたソリトン解の証明について

早稲田大学理工学術院　長井 秀友　(Hidetomo Nagai)
早稲田大学理工学術院　髙橋 大輔　(Daisuke Takahashi)
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1　はじめに

1990 年代に発見された超離散化は離散化手法の一つであり，差分方程式の従属変数にパラメータを含む変数変換を行い，さらにそのパラメータの極限をとる一連の手続きを指す [1]．超離散化は元の代数構造を max-plus 代数にうつすため，初期値等を適当に定めることで従属変数をも離散変数とみなすことが可能になる．特に離散ソリトン方程式に超離散化を行うことで超離散ソリトン方程式が得られ，解も摂動形式解と呼ばれる形式の離散ソリトン解を超離散化することで得られる．さらに最近では超離散パーマネント形式とよばれる別表現のソリトン解がいくつかの超離散ソリトン方程式に存在することも発見されている [5, 6, 7]．超離散パーマネントとはパーマネント，すなわち行列式の定義から符号を取り除いたもの，を超離散化して定義される．このことから超離散パーマネント解は離散ソリトン方程式が持つ行列式解の超離散版とみなすことができる．一方，離散ソリトン系にはソリトン方程式と行列式解が Plücker 関係式等の恒等式で結ばれているという構造が潜んでおり [4]，解の証明もこれら恒等式を用いて示される．これに対して上述の超離散パーマネント解は，摂動形式解を経由して証明されており，恒等式等を用いた証明は与えられていない．その一つの理由として行列式が持つ恒等式に対応するものが超離散系ではまだ明らかになっていないことが挙げられる．行列式が負の問題によって超離散化できないことや，パーマネントが満たす関係式もあまり知られていないことからも，この問題を解決するためには超離散パーマネント独自の関係式を構築する必要がある．

以上を踏まえ本稿では超離散パーマネントが満たす関係式を与え，それを用いて超離散ソリトン方程式の証明を与える．具体的には，第 2 章において超離散パーマネントが満たす恒等式，および得られた恒等式に条件を課した条件付き超離散 Plücker 関係式を与える．第 3 章では条件付き超離散 Plücker 関係式を援用し超離散 2 次元戸田方程式の証明を与える．

2　条件付き超離散 Plücker 関係式

N 次正方行列 $(a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ に対して超離散パーマネント $\max[a_{ij}]$ は次で定義される．

$$\max[a_{ij}] \equiv \max_{\pi_i} \sum_{1\le i\le N} a_{i\pi_i} \tag{1}$$

ただし $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ は 1 から N までの順列をとるものとする．定義からわかるように超離散パーマネントとは行列式ではなくパーマネント

$$\mathrm{perm}[a_{ij}] \equiv \sum_{\pi_i} \prod_{1 \le i \le N} a_{i\pi_i} \tag{2}$$

を超離散化したものである．超離散パーマネントは次の恒等式を満たす．

命題 2.1　任意の N 次実ベクトル $\boldsymbol{a_i}$ $(1 \le i \le N-2)$, $\boldsymbol{b_j}$ $(1 \le j \le 3)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\max\Big(\max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_1}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_2}\ \boldsymbol{b_3}],\\
&\qquad \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_2}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_3}]\Big)\\
&= \max\Big(\max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_1}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_2}\ \boldsymbol{b_3}],\\
&\qquad \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_3}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_2}]\Big)\\
&= \max\Big(\max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_2}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_3}],\\
&\qquad \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_3}] + \max[\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_2}]\Big).
\end{aligned} \tag{3}$$

(証)
以下では (3) 内の N 次行列をそれぞれ

$$\begin{aligned}
A_j &= [\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-1}}\ \boldsymbol{b_j}] \quad (1 \le j \le 3),\\
A_{jj'} &= [\boldsymbol{a_1} \cdots \boldsymbol{a_{N-2}}\ \boldsymbol{b_j}\ \boldsymbol{b_{j'}}] \quad (1 \le j < j' \le 3)
\end{aligned} \tag{4}$$

と略記し，超離散パーマネントは $\max[A_j]$, $\max[A_{jj'}]$ のように表記する．また，N 次行列 A から k 行および l 列を除いた $N-1$ 次行列を $A\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ と表すことにする．対称性より

$$\max[A_1] + \max[A_{23}] \le \max\Big(\max[A_2] + \max[A_{13}],\ \max[A_3] + \max[A_{12}]\Big) \tag{5}$$

が示されれば題意が示される．今，$\max[A_1]$ を N 列で Laplace 展開すると，

$$\max[A_1] = \max_{1 \le k_1 \le N}\left(\max\left[A_1 \begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 1}\right) \tag{6}$$

と表記される．ただし $\boldsymbol{b_j} = (b_{ij})_{1 \le i \le N}$ とした．これに対して A_{23} を k_1 行で展開すると

$$\begin{aligned}
&\max[A_{23}]\\
&= \max\left(\max_{1 \le l_1 \le N-2}\left(\max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix}\right] + a_{k_1 l_1}\right),\ \max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ N-1 \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 2},\ \max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 3}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．したがって

$$\begin{aligned}
\max[A_1] + \max[A_{23}] = \max_{1 \le k_1 \le N}\Bigg(&\max\left[A_1\begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 1} + \max_{1 \le l_1 \le N-2}\left(\max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \end{bmatrix}\right] + a_{k_1 l_1}\right),\\
&\max\left[A_1\begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 1} + \max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ N-1 \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 2},\\
&\max\left[A_1\begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 1} + \max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_1 \\ N \end{bmatrix}\right] + b_{k_1 3}\Bigg)
\end{aligned} \tag{8}$$

を得る．ここで $1 \leq k \leq N$ に対し，

$$\begin{aligned} &\max\left[A_1\begin{bmatrix}k\\N\end{bmatrix}\right]=\max\left[A_2\begin{bmatrix}k\\N\end{bmatrix}\right]=\max\left[A_3\begin{bmatrix}k\\N\end{bmatrix}\right],\\ &\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k\\N-1\end{bmatrix}\right]=\max\left[A_{13}\begin{bmatrix}k\\N-1\end{bmatrix}\right] \end{aligned} \tag{9}$$

が成り立つことに注意すると，(8) の右辺第二項は

$$\begin{aligned} &\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]+b_{k_11}+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_1\\N-1\end{bmatrix}\right]+b_{k_12}\\ =&\max\left[A_2\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]+b_{k_12}+\max\left[A_{13}\begin{bmatrix}k_1\\N-1\end{bmatrix}\right]+b_{k_11}\leq\max[A_2]+\max[A_{13}] \end{aligned} \tag{10}$$

が成り立つ．同様にして第三項について

$$\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]+b_{k_11}+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]+b_{k_13}\leq\max[A_3]+\max[A_{12}] \tag{11}$$

が成り立つ．残った (8) 内の

$$\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]+b_{k_11}+\max_{1\leq l_1\leq N-2}\left(\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_1\\l_1\end{bmatrix}\right]+a_{k_1l_1}\right) \tag{12}$$

に対して再び Laplace 展開を行う．すなわち第一項を $l_1(\neq N)$ 行で展開して

$$\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_1\\N\end{bmatrix}\right]=\max_{\substack{1\leq k_2\leq N,\\k_2\neq k_1}}\left(\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_2&k_1\\l_1&N\end{bmatrix}\right]+a_{k_2l_1}\right) \tag{13}$$

と表される．同様にしてもう一方の超離散パーマネントを k_2 行で展開する．

$$\begin{aligned} &\max_{1\leq l_1\leq N-2}\left(\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_1\\l_1\end{bmatrix}\right]+a_{k_1l_1}\right)=\max_{1\leq l_1\leq N-2}\left(\left(\max_{\substack{1\leq l_2\leq N-2\\l_2\neq l_1}}\left(\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_2&k_1\\l_2&l_1\end{bmatrix}+a_{k_2l_2}\right]\right),\right.\right.\\ &\left.\left.\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_2&k_1\\N-1&l_1\end{bmatrix}\right]+b_{k_22},\ \max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_2&k_1\\N&l_1\end{bmatrix}\right]+b_{k_23}\right)+a_{k_1l_1}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

右辺の第 2, 3 項の超離散パーマネントはそれぞれ $\boldsymbol{b_2}$, $\boldsymbol{b_3}$ が除かれたものである．以下同様に行えば $1\leq n\leq N-1$ 回の展開で $\max[A_1]+\max[A_{23}]$ の項は必ず b_{k_n2} または b_{k_n3} が超離散パーマネントから外れた

$$\begin{aligned} &\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_n&\dots&k_2&k_1\\l_{n-1}&\dots&l_1&N\end{bmatrix}\right]+\sum_{1\leq i\leq n-1}a_{k_{i+1}l_i}+b_{k_11}\\ &+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_n&k_{n-1}&\dots&k_1\\N-1&l_{n-1}&\dots&l_1\end{bmatrix}\right]+\sum_{1\leq i\leq n-1}a_{k_il_i}+b_{k_n2} \end{aligned} \tag{15}$$

または

$$\begin{aligned} &\max\left[A_1\begin{bmatrix}k_n&\dots&k_2&k_1\\l_{n-1}&\dots&l_1&N\end{bmatrix}\right]+\sum_{1\leq i\leq n-1}a_{k_{i+1}l_i}+b_{k_11}\\ &+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix}k_n&k_{n-1}&\dots&k_1\\N&l_{n-1}&\dots&l_1\end{bmatrix}\right]+\sum_{1\leq i\leq n-1}a_{k_il_i}+b_{k_n3} \end{aligned} \tag{16}$$

のどちらかで表される．ここで小行列が

$$A\begin{bmatrix}k_n&\dots&k_2&k_1\\l_{n-1}&\dots&l_1&N\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}k_{n-1}&\dots&k_1&k_n\\l_{n-1}&\dots&l_1&N\end{bmatrix} \tag{17}$$

のように，除いた行，列が交換可能であることと (9) に注意すると，(15), (16) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&\max\left[A_1\begin{bmatrix} k_n & \ldots & k_2 & k_1 \\ l_{n-1} & \ldots & l_1 & N \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_{i+1}l_i} + b_{k_1 1} \\
&+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \ldots & k_1 \\ N-1 & l_{n-1} & \ldots & l_1 \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_i l_i} + b_{k_n 2} \\
=&\max\left[A_2\begin{bmatrix} k_{n-1} & \ldots & k_1 & k_n \\ l_{n-1} & \ldots & l_1 & N \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_i l_i} + b_{k_n 2} \\
&+\max\left[A_{13}\begin{bmatrix} k_1 & k_n & \ldots & k_2 \\ N-1 & l_{n-1} & \ldots & l_1 \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_{i+1}l_i} + b_{k_1 1} \\
\le&\max[A_2]+\max[A_{13}],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max\left[A_1\begin{bmatrix} k_n & \ldots & k_2 & k_1 \\ l_{n-1} & \ldots & l_1 & N \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_{i+1}l_i} + b_{k_1 1} \\
&+\max\left[A_{23}\begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \ldots & k_1 \\ N & l_{n-1} & \ldots & l_1 \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_i l_i} + b_{k_n 3} \\
=&\max\left[A_3\begin{bmatrix} k_{n-1} & \ldots & k_1 & k_n \\ l_{n-1} & \ldots & l_1 & N \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_i l_i} + b_{k_n 3} \\
&+\max\left[A_{12}\begin{bmatrix} k_1 & k_n & \ldots & k_2 \\ N & l_{n-1} & \ldots & l_1 \end{bmatrix}\right] + \sum_{1\le i\le n-1} a_{k_{i+1}l_i} + b_{k_1 1} \\
\le&\max[A_3]+\max[A_{12}]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

を得る．ゆえに (5) が成り立ち，題意が示された．□

続いて (3) に条件を加えた次の命題を示す．

命題 2.2 N 次実ベクトル $\boldsymbol{x_j}(0\le j\le N+1)$ を

$$
\boldsymbol{x_j} = (|y_1+jr_1|, |y_2+jr_2|, \ldots, |y_N+jr_N|)^T \qquad (y_i, r_i：\text{任意実数}) \tag{20}
$$

としたとき

$$
\begin{aligned}
&\max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_2}}}\ \ldots\ \boldsymbol{x_N}] + \max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_1}}}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_3}}} \ldots\ \boldsymbol{x_{N+1}}] \\
=\max\Big(&\max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_3}}}\ \ldots\ \boldsymbol{x_N}] + \max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_1}}}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_2}}}\ \ldots\ \boldsymbol{x_{N+1}}], \\
&\max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_2}}}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_3}}}\ \ldots\ \boldsymbol{x_{N+1}}] + \max[\boldsymbol{x_0}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{x_{k_1}}}\ \ldots\ \boldsymbol{x_N}]\Big)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

が成り立つ．ただし $0\le k_1<k_2<k_3<N+1$ とし，$\widehat{\boldsymbol{x_j}}$ は j 列を除くものとする．

本稿では (20) の条件のもとでの (21) を条件付き超離散 Plücker 関係式と呼ぶことにする．証明は数学的帰納法を用いるが，その際以下の事項を利用する．

- $\boldsymbol{x_j}$ の定義より y_i を適当に取ることで r_i は一般性を失わずに正にとることができる．ゆえに

$$
0\le r_1\le r_2\le\cdots\le r_N \tag{22}
$$

とする．特にこの仮定では $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_N\}$ $(j_1<j_2<\cdots<j_N)$ のとき

$$\begin{aligned}\max[\boldsymbol{x}_{j_1}\ \boldsymbol{x}_{j_2}\ \ldots\ \boldsymbol{x}_{j_N}] &= \max_{\rho_i=\pm1,\pi_l\in J}\sum_{1\le i\le N}\rho_i(y_i+\pi_l r_i)\\ &= \max_{\rho_i=\pm1}\Big(\sum_{1\le i\le N}\rho_i y_i+\max_{\pi_l\in J}\sum_{1\le i\le N}\rho_i\pi_l r_i\Big)\end{aligned} \tag{23}$$

と表されるので，$\rho_N=1$ のときは $\pi_N=j_N$，$\rho_N=-1$ のときは $\pi_N=j_1$ とする組み合わせが最大値になることが決定される [5]．すなわち

$$\begin{aligned}\max[\boldsymbol{x}_{j_1}\ \boldsymbol{x}_{j_2}\ \ldots\ \boldsymbol{x}_{j_N}] = \max\Big(&y_N+j_N r_N+\max[\boldsymbol{x}_{j_1}\ \boldsymbol{x}_{j_2}\ \ldots\ \boldsymbol{x}_{j_{N-1}}],\\ &-y_N-j_1 r_N+\max[\boldsymbol{x}_{j_2}\ \boldsymbol{x}_{j_3}\ \ldots\ \boldsymbol{x}_{j_N}]\Big)\end{aligned} \tag{24}$$

が成り立つ．

- 以下では

$$\boldsymbol{x}_j \equiv j \tag{25}$$

と略記する．これによって (21) は

$$\begin{aligned}&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\\ &=\max\Big(\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1],\\ &\qquad\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ N]\Big)\end{aligned} \tag{26}$$

と表記される．なお y_i, r_i を適当に取り直すことでそれぞれの数字が反転した

$$\begin{aligned}&\max[1\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\\ &=\max\Big(\max[1\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1],\\ &\qquad\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ N+1]\Big)\end{aligned} \tag{27}$$

も与えられる．ただしこの場合は $0<k_1<k_2<k_3\le N+1$.

- (26) は

$$--\equiv\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots N] \tag{28}$$

と表記すると

$$\begin{aligned}&\max[--\ \ k_1\ k_3]+\max[--\ \ k_2\ N+1]\\ &=\max\Big(\max[--\ \ k_1\ k_2]+\max[--\ \ k_3\ N+1],\ \max[--\ \ k_1\ N+1]+\max[--\ \ k_2\ k_3]\Big)\end{aligned} \tag{29}$$

で表される．したがって恒等式 (3) より

$$\max[--\ \ k_1\ k_3]+\max[--\ \ k_2\ N+1]\ge\max[--\ \ k_1\ k_2]+\max[--\ \ k_3\ N+1] \tag{30}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\\ &\ge\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\end{aligned} \tag{31}$$

が示されれば題意が満たされる．

（証） 数学的帰納法を用いて (31) を示す．$N=2$ のとき，$k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=2$ が決まるので，(31) は

$$\max[0\ 2]+\max[1\ 3]\geq\max[0\ 1]+\max[2\ 3] \tag{32}$$

となる．これは (24) の性質を利用すれば簡単に示される．次に $N(>2)$ のとき (31) が成り立つと仮定し，$N+1$ とした

$$\begin{aligned}&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+2]\\ \geq&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+2]\end{aligned} \tag{33}$$

$$0\leq k_1<k_2<k_3<N+2 \tag{34}$$

を示す．特に (24) の性質を利用し，両辺において $2y_{N+1}$, $-2y_{N+1}$ を持つ項および y_{N+1} を持たない項同士がそれぞれ等しいことを示す [3]．

$2y_{N+1}$ を持つ項

この場合，(24) より左辺で $2y_{N+1}$ を持つ項は

$$(2N+3)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1] \tag{35}$$

となる（$2y_{N+1}$ は省略した）．一方で右辺は k_3 で場合分けされ

$$\begin{cases}(2N+3)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1] & (k_3<N+1),\\ (2N+2)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ N-1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1] & (k_3=N+1)\end{cases} \tag{36}$$

で表される．ただし $k_3=N+1$ のとき

$$\max[0\ldots\ \widehat{k_3}\ldots N]\equiv -r_{N+1}+\max[0\ldots\widehat{k_3-1}\ldots N] \tag{37}$$

と定義すれば (36) は

$$(2N+3)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1] \tag{38}$$

にまとめられる（以後もこの定義を用いる）．これらを比較すると $k_3<N+1$ のときは仮定より

$$\begin{aligned}&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\\ \geq&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\end{aligned} \tag{39}$$

が成り立つから両辺は等しい．$k_3=N+1$ のとき，定義から

$$\max[0\ldots N-2\ N]\leq\max[0\ldots N-2\ N-1]+r_{N+1} \tag{40}$$

が成り立つので，これと仮定より

$$\begin{aligned}&\max[0\ \ldots\ N-1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\\ =&\max[0\ \ldots\ N-1\ \widehat{N}]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\\ \leq&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{N}\ \ N+1]\\ \leq&\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ldots\ N]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ N]+r_{N+1}\end{aligned} \tag{41}$$

を得る．

$-2y_{N+1}$ を持つ項

$k_1=0$ のとき

$$\max[1\ldots\ \widehat{k_1}\ldots N+2]\equiv -r_{N+1}+\max[1\ldots\widehat{k_1+1}\ldots N+2] \tag{42}$$

と定義すると左辺右辺で $-2y_{N+1}$ を持つ項はそれぞれ

$$\max[1\ \dots\ \widehat{k_2}\ \dots\ N+1] + \max[1\ \dots\ \widehat{k_1}\ \dots\ \widehat{k_3} \dots\ N+2] \tag{43}$$
$$\max[1\ \dots\ \widehat{k_3}\ \dots\ N+1] + \max[1\ \dots\ \widehat{k_1}\ \dots\ \widehat{k_2}\ \dots\ N+2] \tag{44}$$

で表される．$k_1 > 0$ のときは仮定より成り立つ．$k_1 = 0,\ k_2 > 1$ のときも

$$\begin{aligned} &-r_{N+1} + \max[1\ \dots\ \widehat{k_2}\ \dots\ N+1] + \max[2\ \dots\ \widehat{k_3} \dots\ N+2] \\ &-r_{N+1} + \max[1\ \dots\ \widehat{k_3}\ \dots\ N+1] + \max[2\ \dots\ \widehat{k_2}\ \dots\ N+2] \end{aligned} \tag{45}$$

であるから成り立つ．$k_1 = 0,\ k_2 = 1$ のときの

$$-r_{N+1} + \max[2\ \dots\ N+1] + \max[2\ \dots\ \widehat{k_3} \dots\ N+2] \tag{46}$$
$$-2r_{N+1} + \max[1\ \dots\ \widehat{k_3}\ \dots\ N+1] + \max[3\ \dots\ N+2] \quad (k_3 > 1) \tag{47}$$

は次の補題を与えることで示される [3].

補題 2.1　N を自然数としたとき

$$H_N^1 \equiv \max[0\ \dots\ \widehat{k_3}\ \dots\ N] + \max[2\ \dots\ N+1] - \max[1\ \dots\ N] - \max[1\ \dots\ \widehat{k_3} \dots\ N+1] \le r_N \tag{48}$$

すなわち

$$r_N + \max[1\ \dots\ N] + \max[1\ \dots\ \widehat{k_3} \dots\ N+1] \ge \max[0\ \dots\ \widehat{k_3}\ \dots\ N] + \max[2\ \dots\ N+1] \tag{49}$$

が成り立つ．ただし $0 < k_3 < N+1$ とする．

数学的帰納法で示される．$N = 1$ のとき，すなわち $k_3 = 1$ のとき成り立つのは自明．したがって $N-1$ のとき成り立つと仮定し，(48) を示す．各項は

$$\begin{aligned} \max[0 \dots \widehat{k_3} \dots N] = \max\Big(&y_N + Nr_N + \max[0 \dots\ \widehat{k_3}\ \dots N-1], \\ &-y_N + \max[1 \dots \widehat{k_3}\ \dots N]\Big) \end{aligned} \tag{50}$$

$$\max[2 \dots N+1] = \max\Big(y_N + (N+1)r_N + \max[2 \dots N],\ -y_N - 2r_N + [3 \dots N+1]\Big) \tag{51}$$

$$\max[1 \dots N] = \max\Big(y_N + Nr_N + \max[1 \dots N-1],\ -y_N - r_N + \max[2 \dots N]\Big) \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \max[1 \dots\ \widehat{k_3} \dots N+1] = \max\Big(&y_N + (N+1)r_N + \max[1 \dots\ \widehat{k_3} \dots N], \\ &-y_N - r_N + \max[2 \dots\ \widehat{k_3} \dots N+1]\Big) \end{aligned} \tag{53}$$

で与えられる．ここで公式 $\max(x,y) - \max(z,w) \le \max(x-z, y-w)$ を用いると

$$\begin{aligned} &\max[0 \dots \widehat{k_3}\ \dots N] - \max[1 \dots N] \\ &\le \max\Big(\max[0 \dots\ \widehat{k_3}\ \dots N-1] - \max[1 \dots N-1],\ r_N + \max[1 \dots \widehat{k_3}\ \dots N] - \max[2 \dots N]\Big) \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &\max[2 \dots N+1] - \max[1 \dots\ \widehat{k_3} \dots N+1] \\ &\le \max\Big(\max[2 \dots N] - \max[1 \dots\ \widehat{k_3} \dots N],\ -r_N + \max[3 \dots N+1] - \max[2 \dots\ \widehat{k_3} \dots N+1]\Big) \end{aligned} \tag{55}$$

が成り立つ．したがって両者を足して

$$
\begin{aligned}
&\max[0\ldots\widehat{k_3}\ \ldots N]-\max[1\ldots N]+\max[2\ldots N+1]-\max[1\ldots\ \widehat{k_3}\ldots N+1]\\
&\le\max\Big(\max[0\ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots N-1]-\max[1\ldots N-1]+\max[2\ldots N]-\max[1\ldots\ \widehat{k_3}\ldots N],\\
&\quad -r_N+\max[0\ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots N-1]-\max[1\ldots N-1]+\max[3\ldots N+1]-\max[2\ldots\ \widehat{k_3}\ldots N+1],\\
&\quad r_N,\ \max[1\ldots\widehat{k_3}\ \ldots N]-\max[2\ldots N]+\max[3\ldots N+1]-\max[2\ldots\ \widehat{k_3}\ldots N+1]\Big)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

を得る．ここで

$$
H_N^1\equiv\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[2\ \ldots\ N+1]-\max[1\ \ldots\ N]-\max[1\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1] \tag{57}
$$

であるから (56) は

$$
H_N^1=\max\Big(H_{N-1}^1,-r_N+H_{N-1}^1+H_{N-1}^2,r_N,H_{N-1}^2\Big)\le r_N \tag{58}
$$

となり，補題が示された．

<u>y_{N+1} を持たない項</u>

両辺の y_{N+1} を持たない項はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&\max\Big((N+1)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+2],\\
&\quad (N+2)r_{N+1}+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\Big),\\
&\max\Big((N+1)r_{N+1}+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+2],\\
&\quad (N+2)r_{N+1}+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\Big)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

で与えられる．それぞれ $(N+2)r_{N+1}$ の項を抜き出すと

$$
(N+2)r_{N+1}+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1] \tag{60}
$$

$$
(N+2)r_{N+1}+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1] \tag{61}
$$

を得る．$k_1>0$ のときは (27) であるから成り立つ．また $k_1=0$ のときは両者が一致する．したがってこれらの項が最大値になれば成り立つので

$$
\begin{aligned}
r_{N+1}+&\max[1\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+1]\\
&\ge\max[0\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N]+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_3}\ldots\ N+2],
\end{aligned}
\tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{N+1}+&\max[1\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N+1]+\max[0\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+1]\\
&\ge\max[0\ \ldots\ \widehat{k_3}\ \ldots\ N]+\max[1\ \ldots\ \widehat{k_1}\ \ldots\ \widehat{k_2}\ \ldots\ N+2]
\end{aligned}
\tag{63}
$$

が示されればよい．(62), (63) は先の補題と同様の方法で示される．以上から条件付き超離散 Plücker 関係式が示された．□

3 超離散２次元戸田方程式

超離散２次元戸田方程式は離散２次元戸田方程式

$$
\begin{aligned}
&\tau(l,m-1,n)\tau(l+1,m,n)\\
=&(1-\delta\varepsilon)\tau(l,m,n)\tau(l+1,m-1,n)+\delta\varepsilon\tau(l,m-1,n+1)\tau(l+1,m,n-1)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

を超離散化して得られる [2].

$$\tau(l,m-1,n)+\tau(l+1,m,n)=\max(\tau(l,m,n)+\tau(l+1,m-1,n),\\ \tau(l,m-1,n+1)+\tau(l+1,m,n-1)-\delta-\varepsilon)\qquad(\delta,\varepsilon>0) \tag{65}$$

本章では次で表される超離散パーマネント解が (65) を満たすことを前章の条件付き超離散 Plücker 関係式を用いて示す.

$$\tau(l,m,n)=\max[\phi_i(l,m,n+j-1)]_{1\leq i,j\leq N} \tag{66}$$

ただし各要素の $\phi_i(l,m,n)$ は任意実数 r_i, c_i, c'_i を用いて

$$\phi_i(l,m,n)=\max(\,\max(0,r_i-\delta)l-\max(0,\ -r_i-\varepsilon)m+r_in+c_i,\\ \max(0,\ -r_i-\delta)l-\max(0,\ r_i-\varepsilon)m-r_in+c'_i) \tag{67}$$

で定義する. 特に以下では η_i, η'_i を

$$\eta_i\equiv\max(0,r_i-\delta)l-\max(0,\ -r_i-\varepsilon)m+r_in+c_j\\ \eta'_i\equiv\max(0,-r_i-\delta)l-\max(0,\ r_i-\varepsilon)m-r_in+c'_i \tag{68}$$

として

$$\phi_i(l,m,n+j)=\max(\eta_i+jr_i,\ \eta'_i-jr_i) \tag{69}$$

で表す. 証明を行う前に次の補題を用意する.

補題 3.1 任意の $1\leq i\leq N$ で

$$\phi_i(l+1,m,n)=\max(\phi_i(l,m,n),\ \phi_i(l,m,n+1)-\delta)\\ \phi_i(l,m-1,n)=\max(\phi_i(l,m,n),\ \phi_i(l,m,n-1)-\varepsilon) \tag{70}$$

が成り立つ.

関係式 (70) を分散関係式と呼ぶことにする.

(証) 定義より

$$\phi_i(l+1,m,n)=\max(\eta_i+\max(0,r_i-\delta),\eta'_i+\max(0,-r_i-\delta)). \tag{71}$$

一方

$$\max(\phi_i(l,m,n),\ \phi_i(l,m,n+1)-\delta)\\ =\max(\eta_i,\eta'_i,\ \eta_i+r_i-\delta,\eta'_i-r_i-\delta)\\ =\max(\eta_i+\max(0,r_i-\delta),\eta'_i+\max(0,-r_i-\delta)) \tag{72}$$

より成り立つ. m についても同様. □

補題から

$$\tau(l+1,m,n)=\max[\phi_i(l+1,m,n+j-1)]_{1\leq i,j\leq N}\\ =\max[\max(\phi_i(l,m,n+j-1),\ \phi_i(l,m,n+j)-\delta)]_{1\leq i,j\leq N} \tag{73}$$

と表される. 以下 l,m は変わらないので

$$\phi_i(l,m,n+j)\equiv\phi_i(j)\equiv j \tag{74}$$

のように略記する. この表記より

$$\tau(l+1,m,n)=\max[\max(\phi_i(l,m,n+j-1),\ \phi_i(l,m,n+j)-\delta)]_{1\leq i,j\leq N}\\ =\max[\max(\phi_i(0),\ \phi_i(1)-\delta)\ \ldots\max(\phi_i(N-1),\ \phi_i(N)-\delta)]_{1\leq i\leq N} \tag{75}$$

ここで超離散パーマネントの性質

$$
\begin{aligned}
&\max \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \max(a_{21}, b_{21}) & a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{N1}, b_{N1}) & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \\
&= \max\left(\max \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}, \max \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ b_{21} & a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{76}
$$

を (75) の第一列に用いると

$$
\begin{aligned}
\max\Big(&\max[\phi_i(0)\ \max(\phi_i(1),\ \phi_i(2)-\delta)\dots\max(\phi_i(N-1),\ \phi_i(N)-\delta)], \\
&\max[\phi_i(1)\ \max(\phi_i(1),\ \phi_i(2)-\delta)\dots\max(\phi_i(N-1),\ \phi_i(N)-\delta)]-\delta\Big)
\end{aligned} \tag{77}
$$

を得る．さらに各列を同様の方法で分離すれば $\tau(l+1,m,n)$ は 2^N 個の項の最大値で表される．たとえば $-\delta$ を持つ項は

$$
\max[1\ 1\ 2\dots\ N-1],\ \max[0\ 2\ 2\ 3\dots\ N-1],\dots,\max[0\ 1\ 2\dots\ N-1\ N-1],\ \max[0\ 1\ 2\dots\ N-2\ N] \tag{78}
$$

の N 個で与えられる．これらは次の補題から大小関係が定まる．

補題 3.2 任意の $1 \le i_1, i_2, j \le N$ で

$$
\phi_{i_1}(j)+\phi_{i_2}(j) \le \max(\phi_{i_1}(j-1)+\phi_{i_2}(j+1),\ \phi_{i_2}(j-1)+\phi_{i_1}(j+1)) \tag{79}
$$

が成り立つ．特に任意の $N \times (N-2)$ 行列を $--$ と表記したとき

$$
\max[--\ \ j\ j] \le \max[--\ \ j-1\ j+1] \tag{80}
$$

が成り立つ．

(証) 定義より (79) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&\phi_{i_1}(j)+\phi_{i_2}(j) \\
&=\max(\eta_{i_1}+jr_{i_1},\ \eta'_{i_1}-jr_{i_1})+\max(\eta_{i_2}+jr_{i_2},\ \eta'_{i_2}-jr_{i_2}) \\
&=\max(\eta_{i_1}+\eta_{i_2}+(j-1)(r_{i_1}+r_{i_2})+r_{i_1}+r_{i_2},\ \eta_{i_1}+\eta'_{i_2}+(j-1)(r_{i_1}-r_{i_2})+r_{i_1}-r_{i_2}, \\
&\quad \eta'_{i_1}+\eta_{i_2}+(j-1)(-r_{i_1}+r_{i_2})-r_{i_1}+r_{i_2},\ \eta'_{i_1}+\eta'_{i_2}-(j-1)(r_{i_1}+r_{i_2})-r_{i_1}-r_{i_2})
\end{aligned} \tag{81}
$$

と表される．一方右辺は

$$
\begin{aligned}
&\max(\phi_{i_1}(j-1)+\phi_{i_2}(j+1),\ \phi_{i_2}(j-1)+\phi_{i_1}(j+1)) \\
&=\max(\eta_{i_1}+\eta_{i_2}+(j-1)(r_{i_1}+r_{i_2})+2\max(r_{i_2},\ r_{i_1}), \\
&\qquad \eta_{i_1}+\eta'_{i_2}+(j-1)(r_{i_1}-r_{i_2})+2\max(-r_{i_2},\ r_{i_1}), \\
&\qquad \eta'_{i_1}+\eta_{i_2}+(j-1)(-r_{i_1}+r_{i_2})+2\max(r_{i_2},\ -r_{i_1}), \\
&\qquad \eta'_{i_1}+\eta'_{i_2}-(j-1)(r_{i_1}+r_{i_2})+2\max(-r_{i_2},\ -r_{i_1}))
\end{aligned} \tag{82}
$$

となる．したがって各 η_i の項同士をくらべ公式

$$
x+y \le 2\max(x,y) \qquad (x,y: \text{任意実数}) \tag{83}
$$

を用いれば (79) が成り立つ. (80) は (79) および超離散パーマネントの定義から明らか. □

したがって (80) を用いると (78) の各項には

$$\begin{aligned}\max[1\ 1\ 2 \ldots\ N-1] &\le \max[0\ 2\ 2\ 3 \ldots\ N-1] \le \ldots \\ &\le \max[0\ 1\ 2 \ldots\ N-1\ N-1] \le \max[0\ 1\ 2 \ldots\ N-2\ N]\end{aligned} \tag{84}$$

なる大小関係が成り立つ. 同様の議論から各 $-k_1\delta$ $(0 \le k_1 \le N)$ を持つ項同士で大小関係が定まり

$$\tau(l+1,m,n) = \max_{0\le k_1\le N}(\tau_c(-1,N-k_1) - k_1\delta) \tag{85}$$

を得る. ここで $\tau_c(\alpha,\beta)$ $(\alpha<\beta)$ は $\phi_i(l,m,n-1)$ から $\phi_i(l,m,n+N)$ までの列を並べた $N\times(N+2)$ 行列から α, β 列を取り除いた超離散パーマネント, すなわち

$$\tau_c(\alpha,\beta) = \max[-1\ \ldots\ \widehat{\alpha}\ \ldots\ \widehat{\beta}\ \ldots\ N] \tag{86}$$

で定義する. 同様の方法で

$$\tau(l,m-1,n) = \max_{0\le k_2\le N}(\tau_c(k_2-1,N) - k_2\varepsilon) \tag{87}$$

$$\tau(l+1,m,n-1) = \max_{0\le k_1\le N}(\tau_c(N-k_1-1,N) - k_1\delta) \tag{88}$$

$$\tau(l,m-1,n+1) = \max_{0\le k_2\le N}(\tau_c(-1,k_2) - k_2\varepsilon) \tag{89}$$

$$\tau(l,m,n) = \tau_c(-1,N) \tag{90}$$

を得る. $\tau(l+1,m-1,n)$ は l, m の両方の分散関係式を用いることで求められる. このとき $-k_1\delta-k_2\varepsilon$ $(k_1,k_2=0,1,\ldots,N)$ の項をもつ項を $\Psi(k_1,k_2)$ と表記, すなわち

$$\tau(l+1,m-1,n) = \max_{0\le k_1,k_2\le N}(\Psi(k_1,k_2) - k_1\delta - k_2\varepsilon) \tag{91}$$

とすると $\Psi(k_1,k_2)$ は次の性質を持つことが示される.

$$\Psi(k_1,k_2) = \begin{cases} \max\limits_{0\le i\le k_2}(\tau_c(k_2-i-1,N-k_1+i)) & (k_1\ge k_2 \text{かつ } N-k_1\ge k_2 \text{のとき}) \\ \max\limits_{0\le i\le k_1}(\tau_c(k_2-i-1,N-k_1+i)) & (N-k_1\ge k_2\ge k_1 \text{のとき}) \\ \max\limits_{0\le i\le N-k_1}(\tau_c(i-1,N-k_1+k_2-i)) & (k_1\ge k_2\ge N-k_1 \text{のとき}) \\ \max\limits_{0\le i\le N-k_2}(\tau_c(N-k_1-i-1,k_2+i)) & (k_2\ge N-k_1 \text{かつ } k_2\ge k_1 \text{のとき}) \end{cases} \tag{92}$$

特に $1\le k_1,k_2\le N$ のとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Psi(k_1,k_2) &= \max(\Psi(k_1-1,k_2-1),\ \tau_c(k_2-1,N-k_1)) && (k_2-1<N-k_1 \text{のとき}) \\ \Psi(k_1-1,k_2-1) &= \max(\Psi(k_1,k_2),\ \tau_c(N-k_1,k_2-1)) && (k_2-1>N-k_1 \text{のとき}) \\ \Psi(k_1,k_2) &= \Psi(k_1-1,k_2-1) && (k_2-1=N-k_1 \text{のとき}) \end{aligned} \tag{93}$$

得られた (85), (87), (88), (89), (90), (91) を (65) に同値[*1]な方程式

$$\begin{aligned} &\max(\tau(l,m-1,n)+\tau(l+1,m,n),\ \tau(l,m,n)+\tau(l+1,m-1,n)-\delta-\varepsilon) \\ =&\max(\tau(l,m,n)+\tau(l+1,m-1,n),\ \tau(l,m-1,n+1)+\tau(l+1,m,n-1)-\delta-\varepsilon) \end{aligned} \tag{94}$$

[*1] もし $\tau(l,m,n)$ が (94) の解であるならば $\delta,\varepsilon>0$ より (94) の左辺の最大値は $\tau(l,m-1,n)+\tau(l+1,m,n)$ となり (65) の解であることが示される.

に代入する．各項を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\max\Big(\max_{0\le k_1,k_2\le N}(\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1)-k_1\delta-k_2\varepsilon),\\
&\qquad\max_{0\le k_1,k_2\le N}(\tau_c(-1,N)+\Psi(k_1,k_2)-(k_1+1)\delta-(k_2+1)\varepsilon)\Big)\\
=&\max\Big(\max_{0\le k_1,k_2\le N}(\tau_c(-1,N)+\Psi(k_1,k_2)-k_1\delta-k_2\varepsilon),\\
&\qquad\max_{0\le k_1,k_2\le N}(\tau_c(-1,k_2)+\tau_c(N-k_1-1,N)-(k_1+1)\delta-(k_2+1)\varepsilon)\Big)
\end{aligned}
\tag{95}
$$

で表される．もし両辺の $-k_1\delta-k_2\varepsilon$ を持つ項同士が等しければ方程式は成り立つ．そこで (95) から $-(N+1)\delta-k_2\varepsilon$ $(k_2=0,1,\ldots,N)$ を持つ項を比べる．左辺は

$$
\tau_c(-1,N)+\Psi(N,k_2)-(N+1)\delta-(k_2+1)\varepsilon \tag{96}
$$

であり，右辺は

$$
\tau_c(-1,k_2)+\tau_c(-1,N)-(N+1)\delta-(k_2+1)\varepsilon \tag{97}
$$

と表される．(92) より $\Psi(N,k_2)=\tau_c(-1,k_2)$ であるから両辺は等しいことが示される．同様に $-k_1\delta-(N+1)\varepsilon$, $-k_2\varepsilon$, $-k_1\delta$ を持つ項同士についても (92) から両辺が等しいことが示される．残った $-k_1\delta-k_2\varepsilon$ $(k_1,k_2=1,\ldots,N)$ を持つ項を比べると左辺右辺それぞれ

$$
\max(\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1),\quad \tau_c(-1,N)+\Psi(k_1-1,k_2-1)) \tag{98}
$$

$$
\max(\tau_c(-1,N)+\Psi(k_1,k_2),\quad \tau_c(-1,k_2-1)+\tau_c(N-k_1,N)) \tag{99}
$$

で与えられる．ここで (i) $k_2-1<N-k_1$, (ii) $k_2-1>N-k_1$, (iii) $k_2-1=N-k_1$ に場合わけして考える．

(i) $k_2-1<N-k_1$ のとき．(93) から (99) は

$$
\begin{aligned}
&\max(\tau_c(-1,N)+\max(\Psi(k_1-1,k_2-1),\tau_c(k_2-1,N-k_1)),\quad \tau_c(-1,k_2-1)+\tau_c(N-k_1,N))\\
=&\max(\tau_c(-1,N)+\Psi(k_1-1,k_2-1),\ \tau_c(-1,N)+\tau_c(k_1-1,N-k_1),\\
&\quad \tau_c(-1,k_2-1)+\tau_c(N-k_1,N))
\end{aligned}
\tag{100}
$$

したがって (98) と共通する項が存在するので，十分条件として次を得る．

$$
\begin{aligned}
&\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1)\\
=&\max\Big(\tau_c(-1,N)+\tau_c(k_2-1,N-k_1),\ \tau_c(-1,k_2-1)+\tau_c(N-k_1,N)\Big)\qquad (k_2-1<N-k_1)
\end{aligned}
\tag{101}
$$

(ii) $k_2-1>N-k_1$ のとき．このときも (93) を用いると (98) は

$$
\max(\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1),\quad \tau_c(-1,N)+\max(\Psi(k_1,k_2),\tau_c(N-k_1,k_2-1))) \tag{102}
$$

で与えられる．ゆえに (99) と比較し，十分条件として

$$
\begin{aligned}
&\max\Big(\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1),\ \tau_c(-1,N)+\tau_c(N-k_1,k_2-1)\Big)\\
=&\tau_c(-1,k_2-1)+\tau_c(N-k_1,N)\qquad (k_2-1>N-k_1)
\end{aligned}
\tag{103}
$$

を得る．

(iii) $k_2-1=N-k_1$ のとき．(93) より (98) は

$$
\begin{aligned}
&\max(\tau_c(k_2-1,N)+\tau_c(-1,N-k_1),\quad \tau_c(-1,N)+\Psi(k_1,k_2))\\
=&\max(\tau_c(N-k_1,N)+\tau_c(-1,N-k_2),\quad \tau_c(-1,N)+\Psi(k_1,k_2))
\end{aligned}
\tag{104}
$$

ゆえに両辺一致する．以上から示すべきことは (101), (103) となる．特に ϕ_i の定義より両者は次にまとめられる．

$$\begin{aligned}
&\max[\boldsymbol{\phi}(0)\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_1)}\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N)] + \max[\boldsymbol{\phi}(1)\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_2)}\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N+1)] \\
=\max\Big(&\max[\boldsymbol{\phi}(0)\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_2)}\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N)] + \max[\boldsymbol{\phi}(1)\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_1)}\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N+1)], \\
&\max[\boldsymbol{\phi}(0)\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_1)}\ \ldots\ \widehat{\boldsymbol{\phi}(k_2)}\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N+1)] + \max[\boldsymbol{\phi}(1)\ \ldots\ \boldsymbol{\phi}(N)]\Big)
\end{aligned} \tag{105}$$

ただし $1 \leq k_1 < k_2 \leq N$ とし，各 $\boldsymbol{\phi}(j)$ は任意実数 η_i, η'_i, r_i を用いて

$$\boldsymbol{\phi}(j) = \begin{pmatrix} \max(\eta_1 + jr_1,\ \eta'_1 - jr_1) \\ \max(\eta_2 + jr_2,\ \eta'_2 - jr_2) \\ \vdots \\ \max(\eta_N + jr_N,\ \eta'_N - jr_N) \end{pmatrix} \tag{106}$$

とする．今，(105) に $\sum_{1\leq i\leq N} \frac{-\eta_i-\eta'_i}{2}$ を加えると各行は

$$\begin{aligned}
&\max(\eta_i + jr_i,\ \eta'_i - jr_i) + \frac{-\eta_i - \eta'_i}{2} \\
=&\max(\frac{\eta_i - \eta'_i}{2} + jr_i,\ \frac{-\eta_i + \eta'_i}{2} - jr_i) \\
=&|\frac{\eta_i - \eta'_i}{2} + jr_i|
\end{aligned} \tag{107}$$

となる．したがって $\frac{\eta_i-\eta'_i}{2}$ を y_i としたとき (105) は条件付き超離散 Plücker 関係式 (21) そのものである．以上から題意が満たされた．

4 まとめ

本稿では条件付き超離散 Plücker 関係式を導き，さらにそれを用いることで超離散 2 次元戸田方程式の証明を与えた．また同様の方法で超離散 KP 方程式の証明も可能である．すなわち次が成り立つ．

命題 4.1 超離散パーマネント形式で表される超離散ソリトン解

$$\tau(l,m,n,s) = \max[\phi_i(l,m,n,s+j-1)]_{1\leq i,j\leq N} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
\phi_i(l,m,n,s) = \max\Big(&p_i s + \max(0,p_i - a_1)l + \max(0,p_i - a_2)m + \max(0,p_i - a_3)n + c_i, \\
&-p_i s + \max(0,-p_i - a_1)l + \max(0,-p_i - a_2)m + \max(0,-p_i - a_3)n + c'_i\Big)
\end{aligned} \tag{109}$$

は超離散 KP 方程式

$$\begin{aligned}
&\tau(l,m+1,n) + \tau(l+1,m,n+1) - a_2 \\
=\max(&\tau(l+1,m,n) + \tau(l,m+1,n+1) - a_1, \\
&\tau(l,m,n+1) + \tau(l+1,m+1,n) - a_2) \qquad (a_1 > a_2 > a_3)
\end{aligned} \tag{110}$$

を満たす．ただしここで s は補助変数とする．

なお現段階では超離散 2 次元戸田方程式，超離散 KP 方程式ともに ϕ_i にソリトン形式 (67) の条件を課しており，広い条件である (70) のみでの証明には至っていない．条件付き超離散 Plücker 関係式での $\boldsymbol{x}_j$ についても (67) に対応した条件となっている．これらの拡張は今後の課題となっている．

参考文献

[1] 広田良吾，高橋大輔：差分と超離散, 共立出版 (2003).

[2] R. Hirota, M. Ito and F. Kako: Two-Dimensional Toda Lattice Equations, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 42–58.

[3] Y. Nakata: Vertex operator for the ultradiscrete KdV equation, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 412001(6pp).

[4] 中村佳正編：可積分系の応用数理，裳華房 (2000).

[5] D. Takahashi, R. Hirota: Ultradiscrete Soliton Solution of Permanent Type, J. Phys. Soc. Japan, **76** (2007) 104007–104012.

[6] H. Nagai, A New Expression of Soliton Solution to the Ultradiscrete Toda Equation, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 235204(12pp).

[7] 長井秀友，高橋大輔，超離散ソリトン方程式の行列式解，研究集会「戸田格子 40 周年　非線形波動研究の歩みと展望」, (2008) 101–105.