

波動乱流における成分波のエネルギーゆらぎの統計的性質

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)
 Faculty of Engineering, Gifu University
 同志社大学 理工学部 横山直人 (YOKOYAMA Naoto)
 Faculty of Science and Engineering, Doshisha University

1 動機と目的

以前筆者らは水面重力波を対象として、波動乱流理論が与えるスペクトル変化率の妥当性を検証することを目的として、大規模な直接数値シミュレーションを行った [1],[2]. 波動乱流理論によると、スペクトルの時間発展は運動論的方程式

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4\pi \int |T_{0123}|^2 \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_0 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \times [n(\mathbf{k}_2)n(\mathbf{k}_3)(n(\mathbf{k}_0) + n(\mathbf{k}_1)) - n(\mathbf{k}_0)n(\mathbf{k}_1)(n(\mathbf{k}_2) + n(\mathbf{k}_3))] d\mathbf{k}_{123} \quad (1)$$

によって支配されることが知られている. [3],[4] ここで $n(\mathbf{k})$ はエネルギースペクトル $E(\mathbf{k})$ から $n(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k})/\omega$ によって与えられ, wave action スペクトルと呼ばれる. また T_{0123} は $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ の複雑な関数である. 海洋波の典型的なスペクトルである JONSWAP スペクトルを有する初期場を線形自由波の重ねあわせにより構築し, その短時間発展を基礎方程式に基づいて数値的に追跡し, それから検出されたスペクトル変化率と, (1) が同スペクトルに対して与えるスペクトル変化率とを比較した. 図1はそのようにして得られた周波数スペクトルの時間変化率であるが, 理論と数値計算結果が大変よく一致していることを見ることができる.

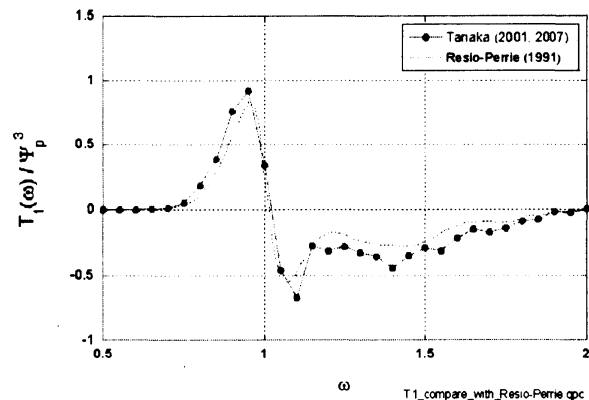


図 1: スペクトル変化率に関する数値計算と理論の比較例

しかし, 波動乱流理論と数値計算の間にはそのスペクトルの定義において, 以下のような大きな相違がある. すなわち, 理論では無限に多くの統計的に同等な実現の存在が想定されており, スペクトル $E(\mathbf{k})$ はこれら無限個の実現にわたるアンサンブル平均によって定義される. また物理空間は一様な無限領域であり, 対応する \mathbf{k} 平面は連続的であり, $E(\mathbf{k})$ の独立変数 \mathbf{k} は \mathbf{k} 平面の δ 関数的な一点を示している. 一方, 数値計算において

は物理空間上で周期境界条件が課され、それに対応して \mathbf{k} 平面は離散化されている。またスペクトル $E(\mathbf{k})$ は近傍モード間の平均操作によって定義されている。この推定法においてはアンサンブル平均は必須ではなく（もとより実行不可能でもあるが）、極論すれば \mathbf{k} 平面におけるモードの密度が非常に高い実現がただ一つあれば十分である。またこのように $E(\mathbf{k})$ が \mathbf{k} 平面の粗視化によって定義されるため、スペクトルの独立変数 \mathbf{k} は真にある一点を示すものではなく、むしろ周囲の微小領域の代表波数（モード）という意味合いを持つ。

このような、理論における「アンサンブル平均」と数値計算における「近傍モード間の平均」というスペクトルの算出方法の相違の問題は、波動乱流に限らずさまざまな分野で観測データや数値実験結果と理論との比較の際には頻繁に生じる問題であるが、多くの場合両者は同等であろうとの暗黙の了解とも言うべきものがあり、取り立てて議論されることは少ないように思われる。上記のスペクトル変化率に関する解析例を見ても、そのような想定は結果的には妥当なのであろうとも思われる。しかし両者を直接比較し、その同等性を確認したという話はあまり聞かない。そこで本研究では、ある4波相互作用系を対象として、 \mathbf{k} 平面の微小領域内に、近傍モードにわたる平均を云々するに十分な数のモードが存在するような、高密度のモード分布を有する数値計算を、アンサンブル平均が議論できる程度の多数個実施することにより、アンサンブル平均と近傍モード間での平均操作の同等性について、直接比較により検証を試みる。

2 対象とするモデル

本研究では4波相互作用系のモデルとして以下のハミルトン系を採用する：

$$H = H_2 + H_4, \quad H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2)$$

$$H_4 = (2\pi)^2 \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}_3} W_{0,1,2,3} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta_{0+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}, \quad (3)$$

$$\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = -i \frac{\partial H}{\partial a_{\mathbf{k}}^*} = -i \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \frac{i}{2} (2\pi)^2 \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} \sum_{\mathbf{k}_3} W_{0,1,2,3} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_3} \delta_{0+\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}, \quad (4)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = k^\alpha, \quad W_{0,1,2,3} = (k_0 k_1 k_2 k_3)^\gamma \quad \alpha = 1/2, \quad \beta = \gamma = 1/4 \quad (5)$$

水面重力波を含め、3波共鳴を許さないような分散関係を持つ系 ($\alpha < 1$) において、物理空間での支配方程式から、成分波の複素振幅に対する支配方程式を導出すると、多くの場合最終的に(4)のような形の方程式が得られる。[4] 水面重力波系とここで採用するモデルの主な違いは、非線形相互作用の係数 $W_{0,1,2,3}$ にある。水面重力波においては $W_{0,1,2,3}$ は非常に複雑な関数形をしているが、本研究の目的は水面重力波に限定したものではないので、非線形項の畳み込み和の計算がFFTを用いて高速にできるように、 $W_{0,1,2,3}$ に対しては上記のような変数分離形を想定した。

なおこのモデルは、MMT モデル [5] と呼ばれる 1 次元非線形分散性波動モデルを 2 次元化したものである。MMT モデルは、直接数値計算によって得られる波動場の統計的性質を弱乱流理論と比較するために用いられてきた。

3 数値計算の設定

初期の方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ には以下を採用した。なお周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ の形は海洋波の標準スペクトルのひとつであり、Pierson-Moskowitz(P-M) スペクトルと呼ばれている。

$$\Phi(\omega, \theta) = \Psi(\omega)G(\theta), \quad (6)$$

$$\Psi(\omega) = A\omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4}\omega^{-4}\right), \text{ Pierson-Moskowitz スペクトル} \quad (7)$$

$$G(\theta) = \cos^2 \theta \text{ for } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ and } 0 \text{ otherwise.} \quad (8)$$

この $\Phi(\omega, \theta)$ を線形分散関係によって \mathbf{k} -スペクトルに換算した。各波動モードの初期位相は $[0, 2\pi]$ の一様乱数によって与えた。なお時間、空間はスペクトルピークが $\omega = 1$, $\mathbf{k} = (1, 0)$ となるように規格化している。

その他のパラメタなどは以下のように設定した：

- エネルギー密度 $H_2 = 2 \times 10^{-4}$ at $t = 0$.
- $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $-8 \leq k_x, k_y \leq 8$
- $n_x = n_y = 2^{12} = 4096$, alias-free なモードの番号は $-1024 \leq (k, l) \leq 1024$
- 実現の数は 256 (run 1~run 256)
- 時間発展の追跡は $t = 30T_p$ まで。 (T_p はピークモードの周期で 2π).
- 時間発展は 4 次精度 Runge-Kutta 法。時間刻み $\Delta t = T_p/50$.

4 数値計算結果

4.1 近傍モードの独立性

本研究の主要な目的は、同一実現内の近傍モードにわたる平均操作が、多数の実現にわたるアンサンブル平均と同等の役割を果たすことができるかどうかを検討することにある。近傍モード平均がアンサンブル平均と同等の役割を果たすことができるためには、まずは近傍モード間の独立性が前提となる。ある波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ に対し、それを中心とする正方形領域 $k_{x0} - \frac{1}{10} < k_x < k_{x0} + \frac{1}{10}$, $k_{y0} - \frac{1}{10} < k_y < k_{y0} + \frac{1}{10}$ の内部に含まれる波数

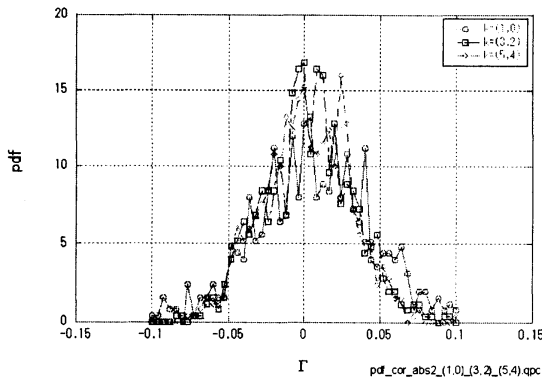


図 2: 中心波数とその近傍波数における $|a|^2$ の相関係数の pdf

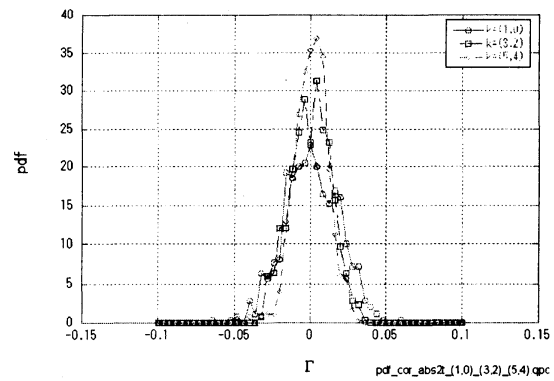


図 3: 中心波数とその近傍波数における $d|a|^2/dt$ の相関係数の pdf

をその近傍波数と呼ぶ。本計算のパラメタ設定では、 $\Delta k_x = \Delta k_y = 1/128$ であり、したがってひとつの中心波数に対し 624 個の近傍モードが存在する。

図 2 は、中心波数 $\mathbf{k} = (1, 0), (3, 2), (5, 4)$ について、同一実現に属する中心波数と近傍波数におけるモードエネルギー $|a|^2$ 間の相関係数の確率密度関数 (pdf) を示したものである。どの中心波数においても、相関係数が 0 近傍に集中しており、同一実現内で同時に時間発展している近傍モードにおける $|a|^2$ の独立性の高さが伺われる。図 3 は同様の pdf を $|a|^2$ の時間変化率について示したものであるが、 $|a|^2$ 自身を上回る近傍モード間の相関の低さを見ることができる。なおここでは示さないが、同一の \mathbf{k} を持つ異なる実現に属するモード間について同様の解析を行っても、やはり図 2 および図 3 で見るのと同程度の広がりを持った pdf を得る。本来完全に独立であるはずの、異なる実現に属するモード間にもこの程度の「見かけの」相関係数が現れるのは、 $30T_p$ という計算継続時間が不十分なのと実現数が有限 (256 個) であるためであろうが、何にしても同一実現内の近傍モード間の独立性が、異なる実現に属するモード間のそれに比べても遜色がないレベルであることが確認されたと言えるであろう。

4.2 $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の分布

図 4 および 5 はそれぞれ、 $\mathbf{k} = (1, 0)$ 、 $\mathbf{k} = (5, 4)$ において 256 個の実現から得られる $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の pdf を $5T_p$ ごとに示したものである。本計算のように、各モードの振幅は初期スペクトルで確定、位相は一様乱数で与えるという人工的な初期条件から出発した場合、各モードの $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ のゆらぎが、所定のスペクトルに見合う準定常的な分布を持つに至るにはある程度の時間が必要である。これらの図が示すように、この遷移は $|a|^2$ に比べ $d|a|^2/dt$ の方が速く、またスペクトルピークに近いエネルギー保有領域よりは、スペクトルの周辺にあたる高波数部の方が速いようであるが、20 周期程度以降はどの波数においてもある程度準定常な分布に落ち着いていると言えよう。

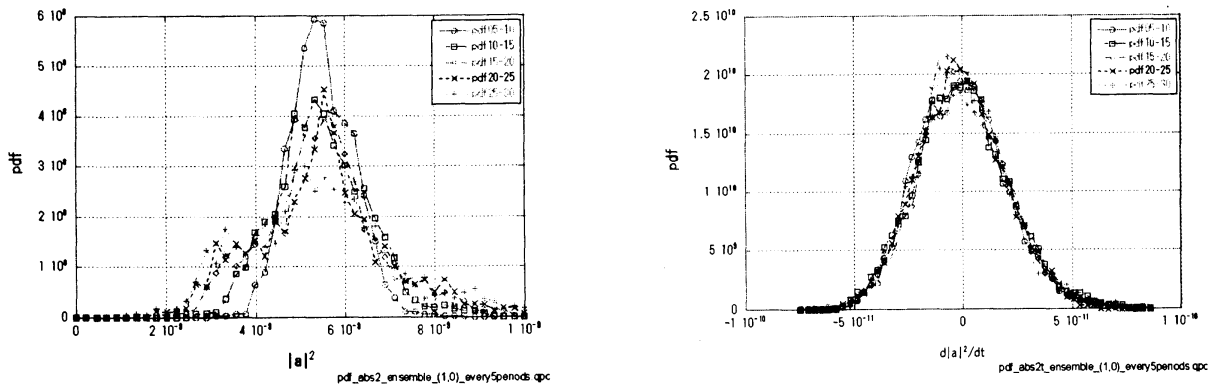


図 4: $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の $5T_p$ ごとのアンサンブル分布の変化 ($\mathbf{k} = (1, 0)$)

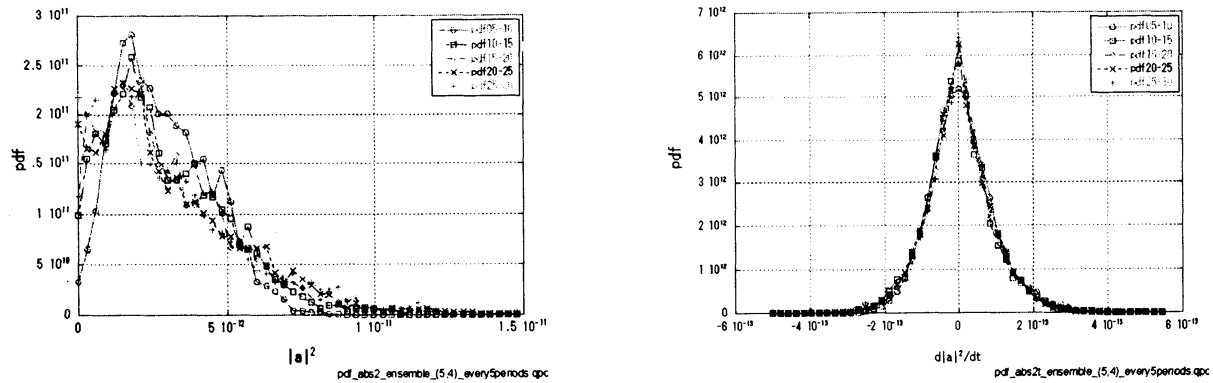


図 5: $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の $5T_p$ ごとのアンサンブル分布の変化 ($\mathbf{k} = (5, 4)$)

4.3 近傍分布とアンサンブル分布の比較

次にただ一つの実現 (Run2) の結果だけを用いて、ある中心波数 \mathbf{k} の 624 個の近傍波数における $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の pdf (=近傍分布) を求め、これを前節に示した、中心波数のみに着目し 256 実現を用いて得た pdf (=アンサンブル分布) と比較した。中心波数 $\mathbf{k} = (1, 0)$ および $\mathbf{k} = (5, 4)$ において、最後の 10 周期 ($t = 20 \sim 30T_p$) から得られたこれらアンサンブル分布と近傍分布をそれぞれ図 6 と 7 に示す。どちらの中心波数においても $|a|^2$, $d|a|^2/dt$ 共に、アンサンブル分布と近傍分布はほぼ同一の分布を示すことを確認できる。 $\mathbf{k} = (1, 0)$ における $|a|^2$ の分布にやや相違が見られるが、近傍モードの条件を厳しくし、より中心波数に近いモードのみを対象とすることによりこの相違は減ずることができる。

4.4 分布形について

これまでの結果を見ると、エネルギー保存領域にある $\mathbf{k} = (1, 0)$ においては $d|a|^2/dt$ の分布が、また高波数領域にある $\mathbf{k} = (5, 4)$ では $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ の分布が、与えられたスペクトル形状 (P-M スペクトル) の詳細によらない、何らかの明瞭な特徴を持つ分布を示しているように見える。この点についてより詳細に検討するために、最終時刻 $t = 30T_p$

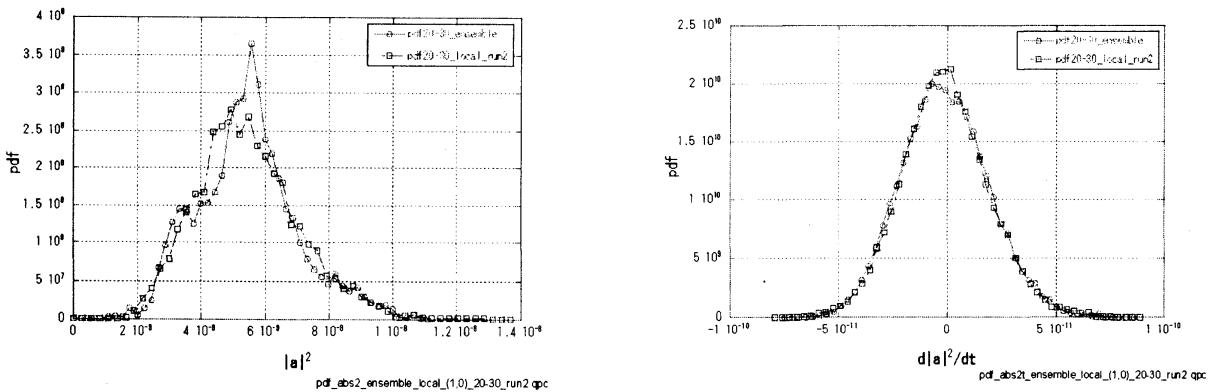


図 6: $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ のアンサンブル分布と近傍分布の比較 ($t = 20-30T_p$, $\mathbf{k} = (1, 0)$)

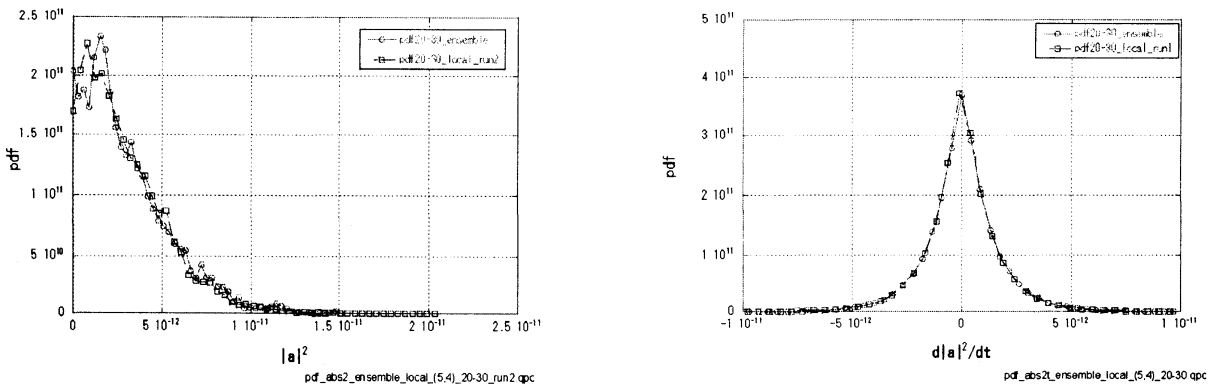


図 7: $|a|^2$ および $d|a|^2/dt$ のアンサンブル分布と近傍分布の比較 ($t = 20-30T_p$, $\mathbf{k} = (5, 4)$)

における $|a|^2$ の pdf を $\mathbf{k} = (1, 0), (3, 2), (5, 4)$ に対して示したものが図 8 である。横軸は平均=0, 分散=1 となるように規格化した変数 ξ であり, $\xi = (|a|^2 - E(|a|^2))/\sqrt{\text{Var}(|a|^2)}$. これまででアンサンブル方向の分布と近傍モードについての分布は, 初期の遷移状態を除きほぼ等しいことが確認されているので, 図 8 の pdf を求めるにあたっては, サンプル数を増やすためにアンサンブル (256 点) についても, 近傍モード (625 点) についても pdf 算出の対象としており, したがって総サンプル数は $256 \times 625 = 160,000$ 点である。図 9 はこれらのうち $\mathbf{k} = (5, 4)$ における pdf を片対数で示したものであるが, 2 自由度の χ^2 分布に非常に近い分布をしていることが分かる。

図 10 は $t = 30T_p$ において Run 100 から得られた $\mathbf{k} = (5, 4)$ の近傍モード (625 点) における $\text{Re}(a)$ と $\text{Im}(a)$ の散布図を示したものである。 $\mathbf{k} = (5, 4)$ においてはスペクトル形から規定される強度が弱く, 相対的に他の無数のモードとの非線形相互作用による振幅ゆらぎが強いため, 非常に乱雑な散布図を示す。各モードの a の実部と虚部との相関係数も非常に小さく, 両者はほぼ独立とみなすことができる。また a の実部と虚部はともに, 他のモードとの相互作用から生じる無数のゆらぎの重ねあわせとなっており, したがって図 11 に示すようにほぼ正規分布に従う。これらのことから, 正規分布に従う 2 つの独立な確率変数 $\text{Re}(a)$, $\text{Im}(a)$ の 2 乗和である $|a|^2$ は 2 自由度の χ^2 分布に従うことが期待されるが, 図 9 の結果はそのような解釈の正当性を裏付けるものとなっている。

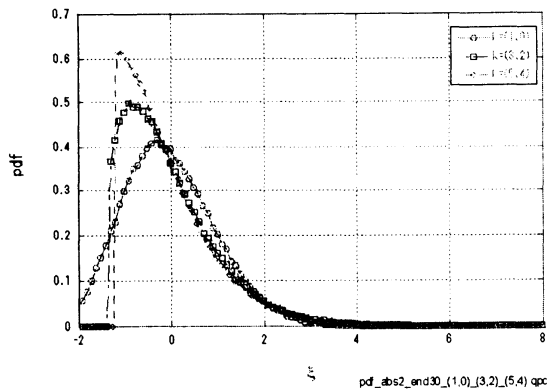


図 8: $\mathbf{k} = (1, 0), (3, 2), (5, 4)$ における $|a|^2$ の分布 ($t = 30T_p$)

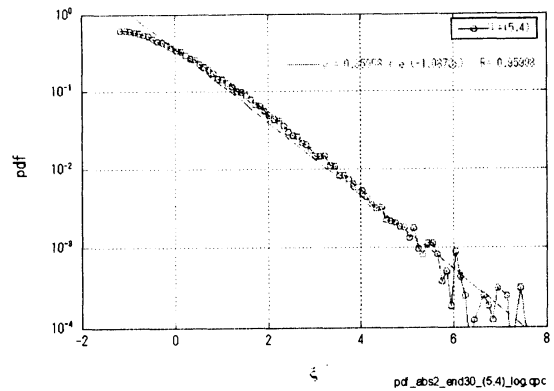


図 9: $\mathbf{k} = (5, 4)$ における $|a|^2$ の分布 ($t = 30T_p$)

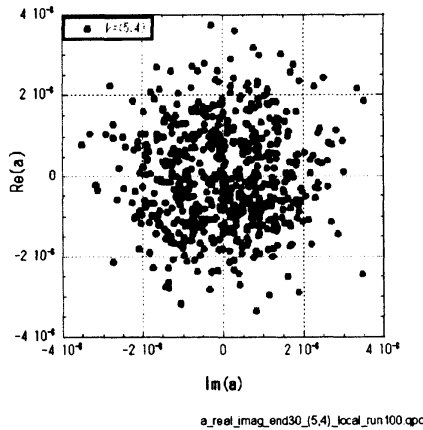


図 10: $\text{Re}(a)$ と $\text{Im}(a)$ の散布図 ($t = 30T_p$, Run100, $\mathbf{k} = (5, 4)$ 近傍)

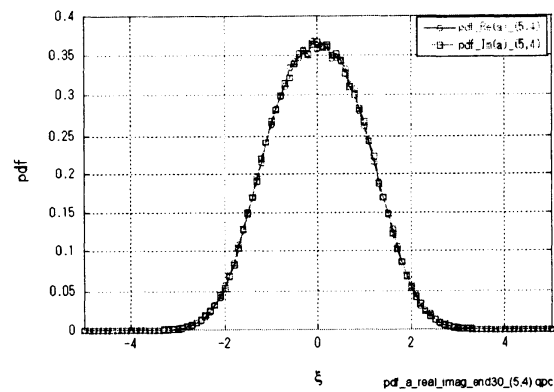


図 11: $\text{Re}(a)$ と $\text{Im}(a)$ の pdf ($t = 30T_p$, $\mathbf{k} = (5, 4)$)

一方エネルギー保有領域である $\mathbf{k} = (1, 0)$ においては、他のモードとの相互作用によって生じる非線形ゆらぎに対して、スペクトル形から規定される自身の強度が勝っており、このあたりの a は、図 12 の散布図や図 13 の pdf が示すように、最低次の近似では、そのスペクトル強度から決まる半径を持つ複素平面上の円に沿って線形角振動数で回転運動をしており、非線形相互作用によるゆらぎは、その半径と回転速度に多少の幅を持たせる程度の効果になっている。この結果、このようなエネルギー保有領域における a の実部と虚部は円周上の位置を示す回転角というただ一つの確率変数でほぼ支配されているために両者の独立性は低く、したがって $|a|^2$ の分布は図 8 に見るように χ^2 分布からは程遠いものとなる。

[9] は、非平衡定常状態にある波動場の $|a|^2$ の分布が、 $|a|^2 < n(\mathbf{k})$ では 2 自由度の χ^2 分布にしたがうことを示した。これは、本研究で見た高波数領域における $|a|^2$ の分布と一致するように思われる。ただし本研究で与えた P-M スペクトルは対象とする系の定常スペ

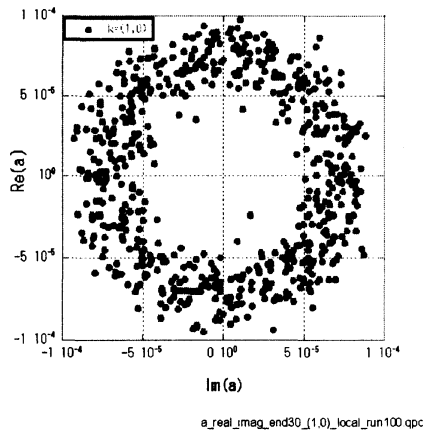


図 12: $\text{Re}(a)$ と $\text{Im}(a)$ の散布図 ($t = 30T_p$, Run100, $\mathbf{k} = (1, 0)$ 近傍)

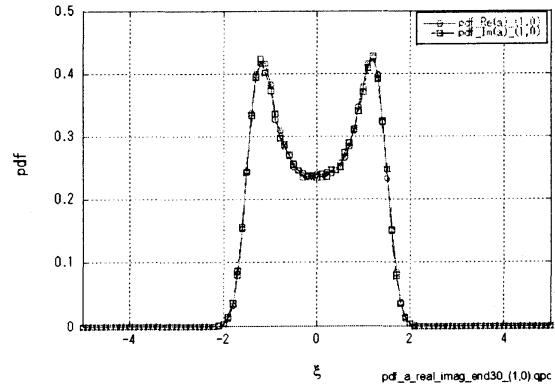


図 13: $\text{Re}(a)$ と $\text{Im}(a)$ の pdf ($t = 30T_p$, $\mathbf{k} = (1, 0)$)

クトルではないため、両者の一致にはまだ検討の余地が残されている。

FFT など直接法で得られた変動の激しい生のスペクトルから、母集団における本来のスペクトルを推定するにあたっては、平滑ペリオドグラム法など近傍モードにわたっての平均操作が観測データのスペクトル解析などでしばしば用いられるが、その際の等価自由度の算出にあたっては、スペクトル強度 $|a|^2$ のゆらぎは 2 自由度の χ^2 分布に従うことが想定されている。[6],[7] しかし、本研究の結果は、波動乱流に対しては、特にエネルギー保有領域におけるスペクトル推定においては、そのような想定が正しくないことを示唆している。

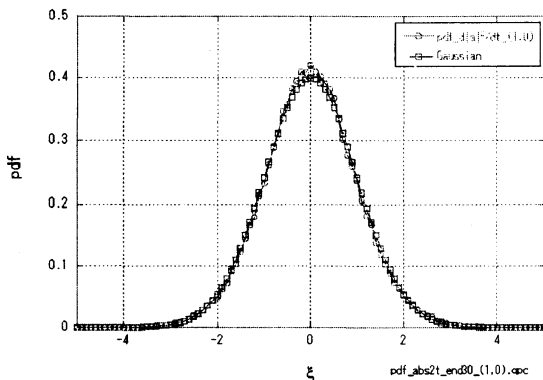


図 14: $\mathbf{k} = (1, 0)$ における $d|a|^2/dt$ の分布 ($t = 30T_p$)

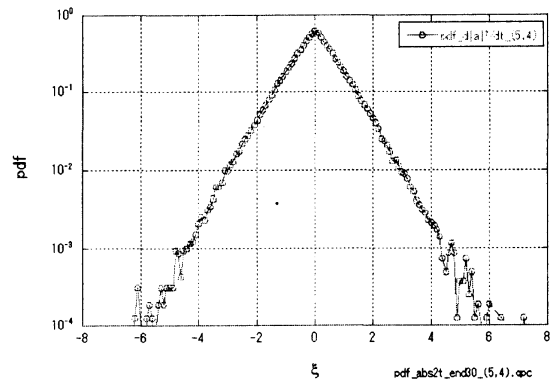


図 15: $\mathbf{k} = (5, 4)$ における $d|a|^2/dt$ の分布 ($t = 30T_p$)

最後に $d|a|^2/dt$ の分布について述べる。図 14 と 15 はそれぞれ $\mathbf{k} = (1, 0)$ および $\mathbf{k} = (5, 4)$ で求めた $d|a|^2/dt$ の pdf を示す。ともに時刻は $t = 30T_p$ である。これらの図は $d|a|^2/dt$ が、エネルギー保有領域 $\mathbf{k} = (1, 0)$ においては正規分布に、一方高波数領域

$k = (5, 4)$ においては強い間欠性を示す指数分布に従っていることを明瞭に示しているが、これらの領域においてこのような分布が現れるメカニズムについては現時点では必ずしも明らかではない。Navier-Stokes 乱流でも、渦度のような速度の微分量の確率分布が指数分布に近いことが知られている。高波数領域の $d|a|^2/dt$ が指数分布にしたがうことは、強非線形現象の性質のひとつであると考えられる。

$|a|^2$ や $d|a|^2/dt$ の平均値であるスペクトルやその変化率については、古くより大きな関心が寄せられ、さまざまな研究がなされてきている。一方これらの量の平均値周りのゆらぎの分布についての研究はまだ緒に就いたばかりであり、今後さらなる研究の進展が望まれる。

参考文献

- [1] Tanaka, M., 2001 Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *J. Fluid Mech.* **444**, 199–221.
- [2] Tanaka, M., 2007 On the role of resonant interactions in the short-term evolution of deep-water ocean spectra. *J. Phys. Oceanogr.* **37**, 1022–1036.
- [3] Hasselmann, K., 1962 On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500.
- [4] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G., 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.
- [5] Majda, A. J., McLaughlin, D. W., & Tabak, E. G., 1997 A one dimensional model for dispersive wave turbulence. *J. Nonlinear Sci.* **7**, 9–44.
- [6] Newland, D.E., 1993 *An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis*, Longman.
- [7] 合田良実, 1997, 港湾構造物の耐波設計, 鹿島出版会
- [8] Lvov, Y.V. & Nazarenko, S., 2004 Noisy spectra, long correlations, and intermittency in wave turbulence. *Phys. Rev.* **E69**, 066608.
- [9] Choi, Y., Lvov, Y.V., Nazarenko, S. & Pokorni, B., 2005 Anomalous probability of large amplitudes in wave turbulence. *Phys. Lett. A* **339**, 361369.