数理解析研究所講究録
第1702巻 2010年 119-129

ある非線形熱方程式の爆発解について
On blowup solutions to a nonlinear heat equation

九州工業大学・工学研究院　仙葉 隆 (Takasi Senba)
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1. 序

以下の方程式系の解の挙動について述べる。

$$(PE)\begin{cases} u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla H(u)) & \text{in } \mathbf{R}^2\times[0,\infty), \\ u(\cdot,0)=u_0\geq 0 & \text{in } \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

ここで u_0 は $\mathbf{R}^2$ 上の滑らかな非負関数とし、$\mathbf{R}^2$ 上の関数 w に対して $H(w)$ を以下の様に定義する。

$$H(w)(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}w(y)dx \\ \qquad (\ (1+|\log(1+|x|))w\in L^1(\mathbf{R}^2)\cap L^\infty(\mathbf{R}^2)\ \text{の場合}), \\ \displaystyle -\int_0^{|x|}\frac{1}{2\pi\tilde{r}}\int_{|\tilde{x}|<\tilde{r}}v(\tilde{x})d\tilde{x} \quad (\ w\ \text{が球対称の場合}). \end{cases}$$

このとき $H(u)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の楕円型方程式 $-\Delta H(v)=v$ の解となる。u_0 に適当な条件を付けると (PE) は一意的に時間局所的な古典解を持つ。T はその最大存在時刻とする。従って $T\in(0,\infty)$、または $T=\infty$ である。

(PE) は Keller-Segel 方程式を単純化した方程式として知られている。Keller-Segel 方程式は細胞性粘菌の集中現象を記述するモデル方程式であり、そのモデルにおいて u は粘菌の密度を表している。また、次節で述べる様に u_0 が無限遠方で十分速く 0 に減衰しているとき (PE) の解の L^1 は時刻 t に対して不変であり、その L^1 が十分に大きいとき解が爆発する事が知られている。つまり、解 u の積分量が集中する形で爆発する事がわかる。この事と粘菌の集中現象とが対応すると考えられる。

本稿では解の爆発と時間大域的存在、そして詳しい解の挙動について述べる。

2. 解の定義と基本的な性質

本稿では (PE) の古典解について述べるが、特に以下の性質を持つ解を対象とする。

$$u(x,t) \geq 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2 \times (0,T). \tag{1}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}^2} |u(x,t)| < \infty \quad \text{for } t \in (0,T). \tag{2}$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} u(x,t)dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x)dx \quad \text{for } t \in (0,T). \tag{3}$$

$\mathbf{R}^2$ 上の非負関数 u_0 が適当な条件を満たせば、対応する解が性質 (1)、(2)、(3) を満たす。たとえば、u_0 が

$$(1+|x|^2)u_0(x) \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2) \tag{4}$$

を満たせば対応する解は性質 (1)、(2)、(3) を満たす。本稿では性質 (1)、(2)、(3) を満たす古典解解を対象とし単に解と呼ぶ。従って、T はその意味での解の最大存在時刻とする。また、

$$\lambda = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x)dx$$

とおく。

初期関数 u_0 が (4) を満たすとき対応する解は以下を満たす。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} u(x,t)|x|^2dx &= \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x)|x|^2dx + 4\lambda\left(1-\frac{\lambda}{8\pi}\right)t \quad (t \in [0,T)). \\ \int_{\mathbf{R}^2} xu(x,t)dx &= \int_{\mathbf{R}^2} xu_0(x)dx \quad (t \in [0,T)). \end{aligned} \tag{5}$$

上の性質から任意の $\mathbf{R}^2$ 上の点 x_0 に対して以下が成り立つ事がわかる。

$$\int_{\mathbf{R}^2} u(x,t)|x-x_0|^2dx = \int_{\mathbf{R}^2} u_0(x)|x-x_0|^2dx + 4\lambda\left(1-\frac{\lambda}{8\pi}\right)t \quad (t \in [0,T)).$$

u_0 がさらに $u_0 \log u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ を満たすとき対応する解 u が以下を満たす。

$$F(u(\cdot,t)) = \int_{\mathbf{R}^2} (u(x,t)\log u(x,t) - \frac{1}{2}|\nabla H(u)|^2)dx \leq F(u_0) \quad (t \in [0,T)).$$

全ての $a>0$ に対して以下で定義される関数 u_a は (PE) の定常解となる。

$$u_a(x) = \frac{8a}{(a+|x|^2)^2}.$$

そして u_a は以下を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^2} u_a(x)dx = 8\pi \quad \text{for } a>0.$$

3. 先行結果

この節では先行結果について紹介する。そのために以下の様に解の爆発を定義する。

定義 1 定数 $T \in (0,\infty)$ に対して *(PE)* の解 u が

$$\limsup_{t\to T} \sup_{x\in\mathbf{R}^2} |u(x,t)| = \infty$$

を満たすとき、解 u が有限時刻爆発すると言う。

(PE) の解 u が

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}^2} |u(x,t)| = \infty$$

を満たすとき、解 u が無限時刻爆発すると言う。

(PE) の解は解の L^1 ノルム λ の大きさによってその挙動が異なる。その閾値は 8π である。

<u>$\lambda > 8\pi$ の場合。</u>

この場合、解 u は有限時刻爆発する。簡単な考察によりわかるのでその概略を以下で述べる。

解が時間大域的に存在し得ない事は (5) よりわかる。つまり 解の時間大域的に存在したとすると $\lambda > 8\pi$ と (5) より

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbf{R}^2} |x|^2 u(x,t)dx = -\infty$$

が成り立つが、この事は (1) と矛盾する。従って、解の最大存在時刻 T は有限である事がわかる。このときもし

$$\sup_{(x,t)\in\mathbf{R}^2\times[0,T)} |u(x,t)| < \infty$$

が成り立っていたら、放物型方程式の基本的な手法 (parabolic regularity argument) を用いて解が時刻 T を超えて延長できる事がわかる。これは解の最大存在時刻を T とした事に矛盾する。従って解は有限時刻 T で爆発する事がわかる。

$\lambda < 8\pi$ の場合。

• u_0 が球対称の場合は無限遠方に関する仮定 (4) が無くても時間大域的に唯一の解が存在し有界となる。([2])

• u_0 が球対称とは限らない場合は u_0 が (4) と

$$u_0|\log u_0| \in L^1(\mathbf{R}^2) \tag{1}$$

を満たせば時間大域的に存在する解がある。([5])

$\lambda = 8\pi$ の場合。

• u_0 が球対称な場合は時間大域的に唯一の解が存在する。([2])

• u_0 が球対称とは限らない場合は (4), (1)) を満たせば無限時刻爆発する解が存在する。([4])

• 有界な円板 D 上における方程式 (1) に対して L^1 ノルムを保存する境界条件を課したとき

$$\sup_{x\in D}|u(x,t)| = O(e^{\sqrt{2t}}) \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

を満たす様な無限時刻爆発解が存在する。([8])

3. 主結果

([8]) は有界な円板上で爆発のオーダーが確定できる形で無限時刻爆発解を構成した。ここでは、$\mathbf{R}^2$ における (1) の球対称な無限時刻爆発を爆発のオーダーを含めて構成した結果を述べる。

定理 1 正の定数 C と K に対して以下を満たす時間大域的な *(PE)*

の球対称解が存在する。

(i) $u(x,t)>0 \quad ((x,t)\in \mathbf{R}^2\times(0,\infty)).$

(ii) $x\cdot\nabla u(x,t)\le 0 \quad ((x,t)\in \mathbf{R}^2\times(0,\infty)).$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} u(x,t)dx = 8\pi \quad (t\in[0,\infty)).$

(vi) $\displaystyle u(x,t)\le \frac{C}{t|x|^2}\exp\left(-\frac{|x|^2}{8t}\right) \quad (|x|\le 1/\sqrt{t},\ t\gg 0).$

(v)
$$\left|u(x,t)-\frac{8(\log t)^2}{K}\left\{1+\left(\frac{(\log t)^2|x|}{K}\right)^2\right\}^{-2}\right|$$
$$\le C(\log t)\left\{1+\left(\frac{(\log t)^2|x|}{K}\right)^2\right\}^{-2} \quad (|x|\le 1/\sqrt{t},\ t\gg 0).$$

定理 1 で述べた解は無限時刻爆発解となっており、爆発のオーダーは

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^2} u(x,t) = u(0,t) = \frac{8(\log t)^2}{K}(1+o(1)) \quad (t\to\infty)$$

となっている。

これに対して、高次元の場合には以下の様に無限種類の爆発のオーダーが見つかっている。

定理 2 N を 11 以上の自然数、J を 1 以上の自然数とし、μ と a_J を以下の様に定める。

$$\nu = \frac{-(N+2)+\sqrt{(N-10)(N-2)}}{4}, \quad a_J = \frac{N+2J+6\nu+4}{-2\nu-2} > 0.$$

このとき、以下を満たす $\mathbf{R}^N$ 上の *(1)* の球対称な無限時刻爆発解が存在する。

$$\sup_{|x|\ge 1,\ t\in[0,\infty)} (1+|x|^2)u(x,t) < \infty.$$

$$ct^{a_J} \le \sup_{x\in\mathbf{R}^N} u(x,t) \le Ct^{a_J} \quad (t\gg 1)$$

ただし、c と C は正定数である。

4. 定理 1 の証明の概略

この節では定理 1 の証明の概略を述べる。

変数変換

解を構成するために以下の新たな変数と関数を導入する。

$$m(y,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{|x|<r}u(x,t)dx,\quad \psi(y,s)=\int_0^y e^{\tilde{y}^2/4}(m(\tilde{y},s)-4)\tilde{y}d\tilde{y}.$$

$$y=\frac{r}{\sqrt{t+1}},\quad s=\log(t+1).$$

u が (1) 解であるとき、関数 m と ψ は以下を満たす。

$$\begin{aligned}\psi_s &= \left[\psi_{yy}+\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{2}\right)\psi_y-\psi\right]+\frac{1}{2}e^{-y^2/4}\left(\frac{\psi_y}{y}\right)^2=\mathcal{A}\psi+F.\\ F(y,s) &= \frac{1}{2}e^{-y^2/4}\left(\frac{\psi_y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}e^{-y^2/4}\left(e^{y^2/4}(m(y,s)-4)\right)^2.\end{aligned}$$

接合漸近展開法

u が我々が期待する解となる様に上記の関数 ψ を構成する。解を構成するために接合漸近展開法と呼ばれる方法を用いる。その概略は以下の通りである。

$\lim_{s\to\infty}\varepsilon(s)=0$, $\varepsilon(s)>0$ $(s>0)$ を満たす s の正値関数 $\varepsilon(s)$ を導入する。$\varepsilon(s)$ を用いて領域 $0<y<\infty$ を内部領域 $(0<y<\sqrt{\varepsilon(s)})$ と外部領域 $(\varepsilon(s)\geq\sqrt{\varepsilon(s)})$ に分ける。以下で述べる要領で内部領域、外部領域における関数 ψ を構成し、さらに境界 $y=\sqrt{\varepsilon(s)}$ でそれらが一致する様に決める事で ψ と $\varepsilon(s)$ を定める。

内部領域における解

内部領域における解を定常解を用いて構成する。定常解は

$$\overline{u}_a(x)=\frac{8a^2}{(|x|^2+a^2)^2}\quad(\,a>0\,)$$

で与えられ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|x|<r}u_a(x)dx=\frac{4r^2}{r^2+a^2}\to 4\quad(\,r\to\infty\,)$$

を満たす。そこで関数 m を

$$m(y,s)=\frac{4y^2}{y^2+\varepsilon(s)^2}(1+o(1))\quad(\ 0<y\le\varepsilon(s)^{1/2}\ )$$

と定める。このとき対応する関数 ψ は

$$\begin{aligned}\psi(y,s) &= \int_0^y e^{\tilde{y}^2/4}(m-4)\tilde{y}d\tilde{y}=\int_0^y\frac{2\varepsilon(s)^2\tilde{y}d\tilde{y}}{y^2+\varepsilon(s)^2}(1+o(1))\\ &= -2\varepsilon(s)^2\log\left(1+\frac{y^2}{\varepsilon(s)^2}\right)(1+o(1))\quad(\ 0<y<\sqrt{\varepsilon(s)}\ )\end{aligned}$$

を満たす。

<u>外部領域における解</u>

外部領域において関数 m が

$$m(y,s)-4=O(1)\frac{\varepsilon(s)^2}{y^2+\varepsilon(s)^2}e^{-y^2/4}$$

である様に定める。以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}F(y,s) &= \frac{1}{2}e^{-y^2/4}\left(\frac{\psi_y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}e^{-y^2/4}\left\{e^{y^2/4}(m(y,s)-4)\right\}^2\\ &= \begin{cases}(1+o(1))\dfrac{8\varepsilon(s)^4}{(y^2+\varepsilon(s)^2)^2} & (\ \text{内部領域}\ ),\\ O(1)\dfrac{8\varepsilon(s)^4}{(y^2+\varepsilon(s)^2)^2}e^{-y^2/4} & (\ \text{外部領域}\ ).\end{cases}\end{aligned}$$

この事と $\lim_{s\to\infty}\varepsilon(s)=0$ より、任意の関数 $\rho\in C([0,\infty))\cap L^\infty((0,\infty))$ に対して

$$\int_0^\infty F(y,s)\rho(y)ydy=4\varepsilon(s)^2(1+o(1))\rho(0)\quad(\ s\to\infty\ )$$

が成り立つ。従って、関数 ψ はほとんど

$$\psi_s-\mathcal{A}\psi=4\varepsilon(s)^2\mathcal{D}_0(y)\quad(\ y\ge\sqrt{\varepsilon(s)},\ s\gg1\ )$$

を満たす。ここで $\mathcal{D}_0$ は任意の関数 $\rho\in C([0,\infty))\cap L^\infty((0,\infty))$ に対して

$$\int_0^\infty\rho(y)\mathcal{D}_0(y)ydy=\rho(0)$$

を満たす $[0,\infty)$ 上の測度であり $\mathbf{R}^2$ の原点にサポートを持つ重さ 2π のデルタ関数 $2\pi\delta_0$ に対応する。

さらに作用素 **A** のヒルベルト空間

$$H=\left\{f\in L^2_{loc}((0,\infty))\ :\ \|f\|^2=\int_0^\infty |f(y)|^2 ye^{-y^2/4}dy<\infty\right\}.$$

における第一固有値は -1 でありヒルベルト空間 H のノルムで正規化された固有関数は $\varphi_0(y)\equiv 1/\sqrt{2}$ である事から ψ の主要部 $a_0\varphi$ である事が期待され、a_0 と $Q=\psi-a_0\varphi_0$ はおおよそ以下を満たす事が期待される。

$$\begin{aligned}|Q(y,s)| &\ll |a_0(s)\varphi_0(y)| \quad (s\to\infty).\\ a_0(s)' &= -a_0(s)+4\varepsilon(s)^2\langle\varphi_0,\mathcal{D}_0\rangle.\\ Q_s &= \mathcal{A}Q+4\varepsilon(s)^2\left(\mathcal{D}_0-\langle\varphi_0,\mathcal{D}_0\rangle\varphi_0\right).\\ \langle Q(\cdot,s),\varphi_0\rangle &= 0.\end{aligned}$$

ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はヒルベルト空間 H の内積である。さらに、関数 Q に対して $Q_s=o(1)$ を期待すと関数 Q は

$$\mathcal{A}G+(\mathcal{D}_0-\langle\varphi_0,\mathcal{D}_0\rangle\varphi_0)=0,$$

を満たす関数 G をもちいて

$$Q(y,s)=4\varepsilon(s)^2G(y)$$

と表される。このとき関数 G は以下の様に表される。

$$\begin{aligned}G(y) &= e^{y^2/4}\int_y^\infty \frac{1}{\tilde{y}}\exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{4}\right)d\tilde{y}-\frac{1}{2}\\ &\sim -\log y+B+O(y^2\log y) \quad (\sqrt{\varepsilon(s)}\le y\ll 1).\end{aligned}$$

ここで B は定数である。 さらに a_0 に対して

$$\lim_{s\to\infty}e^s a_0(s)=0,\quad \int_0^\infty \varepsilon(s)^2e^s ds<\infty$$

を期待すれば

$$a_0(s)=-4(1+o(1))\varphi_0(0)\int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2e^{-s+\tilde{s}}d\tilde{s} \quad (s\to\infty).$$

を得る。以上より外部領域、特に $\sqrt{\varepsilon(s)} \le y \ll 1$ において ψ は以下を満たす事が期待される。

$$\begin{aligned}\psi(y,s) &= a_0(s)(1+o(1))\varphi_0(y) + 4\varepsilon(s)^2(1+o(1))G(y)\\ &= -4(1+o(1))\varphi_0(0)\varphi_0(y)\int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}}d\tilde{s}\\ &\qquad +4\varepsilon(s)^2(1+o(1))\left(-\log y + B + O(y^2\log y)\right).\end{aligned}$$

<u>内部領域と外部領域の接合</u>

内部領域と外部領域で構成した解はその境界 $y=\sqrt{\varepsilon(s)}$ で一致する必要がある。

内部領域において構成した関数 ψ に $y=\sqrt{\varepsilon(s)}$ を代入した値は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\psi(\sqrt{\varepsilon(s)},s) &= \int_0^{\sqrt{\varepsilon(s)}}(m(\tilde{y},s)-4)\exp\left(\frac{\tilde{y}^2}{4}\right)\tilde{y}d\tilde{y}\\ &= -4(1+o(1))\int_0^{\sqrt{\varepsilon(s)}}\frac{1}{1+(\tilde{y}/\varepsilon(s))^2}\tilde{y}d\tilde{y}\\ &= -2(1+o(1))\varepsilon(s)^2\log\left(1+\frac{(\sqrt{\varepsilon(s)})^2}{\varepsilon(s)^2}\right).\end{aligned}$$

一方、外部領域において構成した関数 ψ に $y=\sqrt{\varepsilon(s)}$ を代入した値は以下の様になる。

$$\begin{aligned}\psi(\sqrt{\varepsilon(s)},s) &= a_0(s)\varphi_0(\sqrt{\varepsilon(s)})(1+o(1)) + 4\varepsilon(s)^2(1+o(1))G(\sqrt{\varepsilon(s)})\\ &= -4\varphi_0(0)\varphi_0(y)(1+o(1))\int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}}d\tilde{s}\\ &\qquad +4\varepsilon(s)^2\left(-\log\sqrt{\varepsilon(s)} + B + O((\sqrt{\varepsilon(s)})^2\log\sqrt{\varepsilon(s)})\right).\end{aligned}$$

両方の値が一致するためには以下の等式が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned}&-2(1+o(1))\varepsilon(s)^2\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon(s)}\right)\\ &= -2(1+o(1))\int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2 e^{-s+\tilde{s}}d\tilde{s}\\ &\qquad +4(1+o(1))\varepsilon(s)^2\log\frac{1}{\varepsilon(s)^{1/2}} + 4\varepsilon(s)^2 B + O(\varepsilon(s)^3\log\varepsilon(s)).\end{aligned}$$

この等式の主要部は

$$-4\varepsilon(s)^2\log\left(\frac{1}{\varepsilon(s)}\right)=-2\int_s^\infty \varepsilon(\tilde{s})^2e^{-s+\tilde{s}}d\tilde{s}$$

を満たすのでこれを解いて

$$\varepsilon(s)^2=\frac{K}{s^2}e^{-s}(1+o(1))$$

を得る。ここで、K は正定数であり、主要部以外の項の解析から得られる定数である。

<u>得られた解</u>

以上の考察より $\varepsilon(s)$ と ψ が得られた。この事と parabolic regularity argument から以下の事を得る。

$$\begin{aligned}
\varepsilon(s)^2 &= \frac{K}{s^2}e^{-s}(1+o(1)).\\
m(y,s) &= \begin{cases} \dfrac{4y^2}{\varepsilon(s)^2+y^2}(1+o(1)) & \text{(内部領域)},\\ 4+\dfrac{4\varepsilon(s)^2}{y}G'(y)e^{-y^2/4}(1+o(1)) & \text{(外部領域)}. \end{cases}\\
G'(y) &= -\frac{1+o(1)}{y} \quad (\ \sqrt{\varepsilon(s)}<y\ ).
\end{aligned}$$

さらに m の満たす放物型方程式に対して parabolic regularity argument を用いると以下を得る。

$$\begin{aligned}
u(x,t)=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_{|\tilde{x}|<r}u(\tilde{x},t)d\tilde{x} &= \frac{1}{(t+1)}\frac{m_y(y,s)}{y}\\
&= e^{-s}\frac{8\varepsilon(s)^2}{(y^2+\varepsilon(s)^2)^2}=\frac{8K/s^2}{(|x|^2+K/s^2)^2}\sim 8\pi\delta_0 \quad (\ |x|\ll 1,\quad s\gg 1\ ).
\end{aligned}$$

従って、我々が期待する解が得られた。

参考文献

[1] W. W. Bell, "Special functions for scientists and engineers", Van Nostrand, London, 1968.

[2] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot and T. Nadzieja, The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 27 (2006), 133-147.

[3] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot and T. Nadzieja, The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. Math. Methods Appl. Sci., Vol. 29 (2006), 1563-1583.

[4] A. Blanchet, J. Carrillo and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 61 (2008), 1449-1481.

[5] A. Blanchet, J. Dolbeault and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electron. J. Differential Equations, Vol. 44 (2006), 1-32 (electronic).

[6] J. Dolbeault and B. Perthame, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbf{R}^2$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Vol. 339 (2004), 611-616.

[7] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, Singularity patterns in a chemotaxis model. Math. Ann., Vol. 306 (1996), 583-623.

[8] N. I. Kavallaris and P. Souplet, Grow-up and refined asymptotics for a two-dimensional Patlak-Keller-Segel model in a disk. SIAM J. Math. Ana. Vol. 40, (2009), 1852-1881.

[9] N. Mizoguchi, Growup of solutions for a semilinear heat equation with supercritical nonlinearity, J. Differential Equations, Vol. 227 (2006), 652-669.