

## 平行曲面の特異点 II (Singularities of parallel surfaces II)

埼玉大学大学院理工学研究科 長谷川 大 (Masaru Hasegawa)  
Department of Mathematics, Saitama University

### 0 はじめに

$\mathbb{R}^2$  の開部分集合  $U$  に対して,  $C^\infty$ -写像  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  を正則曲面とする. このとき, 実定数  $t_0$  に対して,

$$g^t(u, v) = g(u, v) + t_0 \mathbf{n}(u, v)$$

を初期曲面  $g$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面 (parallel surface of  $g$  at a distance  $t_0$ ) と呼ぶ. ただし,  $\mathbf{n}$  は曲面  $g$  の単位法ベクトルである.

$\kappa_i(u, v)$  ( $i = 1, 2$ ) を曲面  $g$  の主曲率とする.  $t_0 = 1/\kappa_i(u_0, v_0)$  のとき, 平行曲面  $g^t$  は  $(u_0, v_0)$  で特異点を持つ. このとき,  $(u_0, v_0)$  における  $g^t$  のヤコビ行列の階数は点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の臍点でないときは 1 で, 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の臍点であるときは 0 となり, 退化した特異点といえることができる. このように, 平行曲面の特異点は初期曲面の微分幾何学的な状況によって記述されることが期待される.

第 1 節では, 平行曲面の特異点の初期曲面の微分幾何学的な情報による分類を紹介する. 第 2 節では, 平行曲面の特異点集合である初期曲面の主曲率一定曲線について紹介する. また, 第 3 節では, 平行曲面の特異点を解析する過程で出会った興味深い研究対象として, 平行接平面関数について紹介する.

本研究は福井敏純氏との共同研究である.

### 1 平行曲面の特異点

まずは, 平行曲面の特異点の分類に必要な, 微分幾何学的な概念を紹介する.

曲面  $g$  上の点  $g(u_0, v_0)$  が臍点ではないとき,  $(u_0, v_0)$  における主曲率  $\kappa_i(u_0, v_0)$  に対応する主方向を  $\mathbf{v}_i$  とする.

**定義 1.1.** 点  $g(u_0, v_0)$  は曲面  $g$  の臍点ではないとする. 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の主方向  $\mathbf{v}_i$  に関する峰点 (ridge point) であるとは,  $\mathbf{v}_i \kappa_i(u_0, v_0) = 0$  を満たすときであり, 峰点の集合を主方向  $\mathbf{v}_i$  に関する峰線 (ridge line) という. さらに,  $\mathbf{v}_i^{(m)} \kappa_i(u_0, v_0) = 0$  ( $1 \leq m \leq k$ )

かつ  $v_i^{(k+1)} \kappa_i(u_0, v_0) \neq 0$  を満たすとき,  $g(u_0, v_0)$  は  $k$  次の峰点であるという. ここで,  $v_i \kappa_i$  は主方向  $v_i$  による主曲率関数  $\kappa_i$  の方向微分である.

主方向  $v_i$  に関する峰点は焦曲面  $g + n/\kappa_i$  の特異点に対応していることが知られている.

**定義 1.2.** 点  $g(u_0, v_0)$  は曲面  $g$  の臍点ではないとする. 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の主方向  $v_i$  に関する劣放物点 (sub-parabolic point) であるとは,  $v_i \kappa_j(u_0, v_0) = 0 (i \neq j)$  を満たすときである. 峰点と同様に劣放物線 (sub-parabolic line) や次数も定義できる.

主方向  $v_i$  に関する劣放物点は焦曲面  $g + n/\kappa_i$  の放物点に対応していることが知られている.

次のような距離 2 乗関数  $d$  を考える.

$$d: U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; d(u, v, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - g(u, v)\|^2.$$

点  $g(u_0, v_0)$  を曲面  $g$  の平坦点ではない臍点とすると,  $p_0 = (u_0, v_0)$  において, 距離 2 乗関数  $d$  が特異点を持ち, ヘッセ行列が零行列となる  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  が存在する. このとき, 次のような 3 次形式を

$$C(u, v) = d_{uuu}(p_0, \mathbf{x}_0)u^3 + 3d_{uuv}(p_0, \mathbf{x}_0)u^2v + 3d_{uvv}(p_0, \mathbf{x}_0)uv^2 + d_{vvv}(p_0, \mathbf{x}_0)v^3$$

を考える.

**定義 1.3.** 3 次形式  $C(u, v)$  が楕円的 (i.e. 異なる 3 つの実根を持つとき), 放物的 (i.e. 二重根を持つとき), 双曲的 (i.e. 実根を 1 つ持つとき), 完全立方 (i.e. 三重根を持つとき) であるとき, 点  $g(p_0)$  はそれぞれ楕円的臍点 (elliptic umbilic), 放物的臍点 (parabolic umbilic), 双曲的臍点 (hyperbolic umbilic), 完全臍点 (perfect umbilic) であるという. また,  $C(u, v)$  のヘッセ行列式で生成される 2 次形式の根方向が直交しているとき, 直角臍点 (right-angled umbilic) であるという.

楕円的臍点を通る峰線は 3 本, 双曲的臍点を通る峰線は 1 本であることが知られている. ただし, どちらの場合も峰線が臍点を通ると, もう一方の主方向に関する峰線へ移り変わる.

これら, 峰点, 劣放物点, 臍点については [4, 12, 14] にまとめられている.

次に, 平行曲面の特異点について得られた結果を紹介する.

曲面  $g$  に対して, 関数

$$\Phi : U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; \Phi(u, v, x, y, z, t) = -\frac{1}{2}(\|(x, y, z) - g(u, v)\|^2 - t^2)$$

と,  $t = t_0$  と固定して, 関数

$$\Phi^t : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \Phi^t(u, v, x, y, z) = \Phi(u, v, x, y, z, t_0)$$

を考える. これらを, 拡大距離 2 乗関数と呼ぶこととする.

$\Phi$  の判別集合は

$$\mathcal{D}(\Phi) = \{(x, y, z, t); \exists(u, v) \text{ s.t. } (x, y, z) = g(u, v) + t\mathbf{n}(u, v)\}$$

で与えられ,  $\mathcal{D}(\Phi)$  と  $t = t_0$  との切り口は曲面  $g$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面  $g^t$  と一致する.

$\Phi^t$  の判別集合は

$$\mathcal{D}(\Phi^t) = \{(x, y, z); \exists(u, v) \text{ s.t. } (x, y, z) = g(u, v) + t_0\mathbf{n}(u, v)\}$$

で与えられ, 曲面  $g$  に対する距離  $t_0$  の平行曲面  $g^t$  と一致する.

ここで,  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  を固定し,  $\varphi(u, v) = \Phi(u, v, x_0, y_0, z_0, t_0)$  または,  $\varphi(u, v) = \Phi^t(u, v, x_0, y_0, z_0)$  とおく.  $\Phi, \Phi^t$  が  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であるとき, 判別集合  $\mathcal{D}(\Phi), \mathcal{D}(\Phi^t)$  はカusp状曲面, ツバメの尾, 蝶々,  $D_4$  特異点のいずれかと局所微分同相である. したがって, 「いつ」拡大距離 2 乗関数  $\Phi, \Phi^t$  が  $\varphi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であるかを調べることで, 次の平行曲面の特異点の分類を得た.  $\mathcal{K}$  普遍開折性に関する証明の概略は前報 [8] を参照して頂きたい.

**定理 1.4.**  $t_0 = 1/\kappa_i(u_0, v_0)$  とする.

- (1) 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の峰点でも臍点でもないとき, 平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  でカusp状曲面 (cuspidaledge) と局所微分同相である.
- (2) 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の 1 次の峰点であるとき, もう一方の主方向に関する劣放物点でなければ, 平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  でツバメの尾 (swallowtail) と局所微分同相である.
- (3) 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の 2 次の峰点であるとき, 峰線が  $(u_0, v_0)$  で正則であれば, 平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  で蝶々 (butterfly) と局所微分同相な切り口である.
- (4) 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の楕円的臍点 (resp. 直角臍点ではない双曲的臍点) であるとき, 平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  で  $D_4^-$  (resp.  $D_4^+$ ) 特異点と局所微分同相な切り口である.

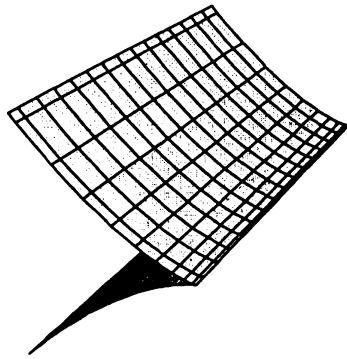


図1 カスパ状曲面

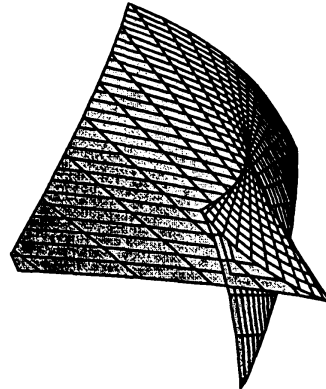


図2 ツバメの尾

$g(u_0, v_0)$  が峰点であり、もう一方の主方向に関する劣放物点であるときは、 $\Phi^t$  は  $\varphi$  の  $\kappa$  普遍開折とはならず、平行曲面の特異点は分類できない。

しかし、泉屋氏・佐治氏・高橋氏の [10] のフロントのカスパ状くちびる・くちばしの判定法を応用することで、平行曲面の特異点を分類することができる。

**系 1.5.**  $t_0 = 1/\kappa_i(u_0, v_0)$  とする。点  $g(u_0, v_0)$  が 1 次の主方向  $v_i$  に関する峰点であり、もう一方の主方向  $v_j$  に関する劣放物点であるとき、次が成り立つ。

- (1)  $(u_0, v_0)$  で主曲率  $\kappa_i$  のヘッセ行列式が正のとき、平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  でカスパ状くちびる (cuspidal lips) と局所微分同相である。
- (2)  $(u_0, v_0)$  で主曲率  $\kappa_i$  のヘッセ行列式が負のとき、平行曲面  $g^t$  は点  $g^t(u_0, v_0)$  でカスパ状くちばし (cuspidal beaks) と局所微分同相である。

主曲率のヘッセ行列式が 0 となるとき、平行曲面の特異点は判定できないが、そのときの初期曲面の幾何学的状況には興味がある。

**命題 1.6.**  $(u_0, v_0)$  で主曲率  $\kappa_i$  のヘッセ行列式が 0 であることは、主方向  $v_i$  に関する峰線ともう一方の主方向  $v_j$  に関する劣放物線が接することと同値である。

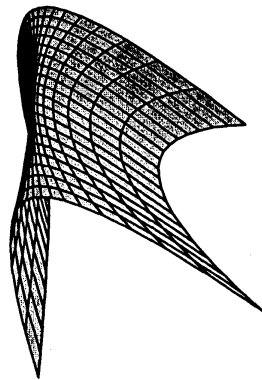


図3 カスプ状くちびる

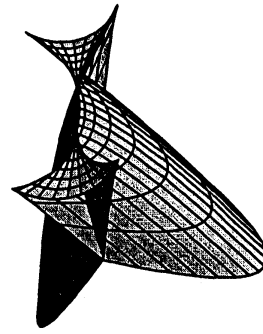


図4 カスプ状くちばし

## 2 主曲率一定曲線

主曲率一定曲線は平行曲面の特異点集合であり，主曲率の等高線，すなわち，主曲率一定曲線の推移を見ることは平行曲面の特異点の推移を見ることになる．したがって，主曲率一定曲線の特徴を調べておくことは，平行曲面の特異点を研究することにおいて重要である．

本節では，主曲率一定曲線について得られた結果を紹介する．

**命題 2.1.** 点  $g(u_0, v_0)$  を曲面  $g$  の主方向  $v_i$  に関する峰点とする．このとき，主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  が  $(u_0, v_0)$  で正則あることと，点  $g(u_0, v_0)$  がもう一方の主方向  $v_j$  に関する劣放物点でないことは同値である．また，

- (1) 峰点の次数が 1 であるための必要十分条件は，主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  は峰線と点  $(u_0, v_0)$  交わることである．
- (2) 峰点の次数が 2 以上であるための必要十分条件は，主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  と峰線は点  $(u_0, v_0)$  で接することである．

この命題と定理 1.4 より，距離  $t_0 = 1/\kappa_i(u_0, v_0)$  の平行曲面  $g^t$  は， $(u_0, v_0)$  で主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  と峰線が交わらないとき  $g^t(u_0, v_0)$  でカスプ状曲面，主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  と峰線が交わるとき  $g^t(u_0, v_0)$  でツバメの尾ということがわかる．

**命題 2.2.** 点  $g(u_0, v_0)$  を曲面  $g$  の主方向  $v_i$  に関する 1 次の峰点とする。点  $g(u_0, v_0)$  がもう一方の主方向  $v_j$  に関する劣放物点であるとき、次が成り立つ。

- (1)  $(u_0, v_0)$  で主曲率  $\kappa_i(u, v)$  のヘッセ行列式が正のとき、主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  は、局所的に孤立点である。
- (2)  $(u_0, v_0)$  で主曲率  $\kappa_i(u, v)$  のヘッセ行列式が負のとき、主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = \kappa_i(u_0, v_0)$  は、局所的に交わる 2 直線である。

**定理 2.3.** 点  $g(u_0, v_0)$  を曲面  $g$  の臍点とし、 $\kappa_1(u_0, v_0) = \kappa_2(u_0, v_0) = k$  とする。

- (1) 点  $g(u_0, v_0)$  が楕円の臍点であるとき、主曲率一定曲線  $\kappa_i(u, v) = k$  は孤立点となる。
- (2) 点  $g(u_0, v_0)$  が双曲的臍点であるとき、主曲率一定曲線は点  $(u_0, v_0)$  を通る 2 本の曲線となる。ただし、点  $(u_0, v_0)$  を通ると、もう一方の曲線へと移り変わる。

図 5 は臍点における主曲率一定曲線の推移を模式的にあらわしたものである。太実線は主方向  $v_1$  に関する峰線、太点線は主方向  $v_2$  に関する峰線、細実線は主曲率一定曲線  $\kappa_1(u, v) = k$ 、細点線は主曲率一定曲線  $\kappa_2(u, v) = k$  をあらわしている。

$\varepsilon$  を十分小さい正数とし、 $t_0 = 1/\kappa_i(u_0, v_0)$ 、 $t_1 = 1/(\kappa_i(u_0, v_0) \pm \varepsilon)$  とする。図 5 より、 $g(u_0, v_0)$  が楕円の臍点のとき、距離  $t_1$  の平行曲面  $g^{t_1}$  は  $g^{t_1}(u_0, v_0)$  の近くで 3 つのツバメの尾を持つことがわかり、 $g(u_0, v_0)$  が双曲的臍点のとき、距離  $t_1$  の平行曲面  $g^{t_1}$  は  $g^{t_1}(u_0, v_0)$  の近くでカスプ状曲面とツバメの尾を持つことがわかる。

### 3 平行接平面関数

平行曲面の特異点について、当初は國分氏・Rossman 氏・佐治氏・梅原氏・山田氏の [11] のフロントの特異点の判定定理の証明を参考にして、拡大距離 2 乗関数とは別の関数を用いて解析しようとしていた。

本節では、その関数（平行接平面関数）について得られた結果を紹介したい。

曲面  $g$  に対して、関数

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; \Psi(u, v, x, y, z, t) = \langle (x, y, z) - g(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle - t$$

と、 $t = t_0$  と固定して、関数

$$\Psi^t : U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; \Psi^t(u, v, x, y, z) = \langle (x, y, z) - g(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle - t_0$$

を考える。

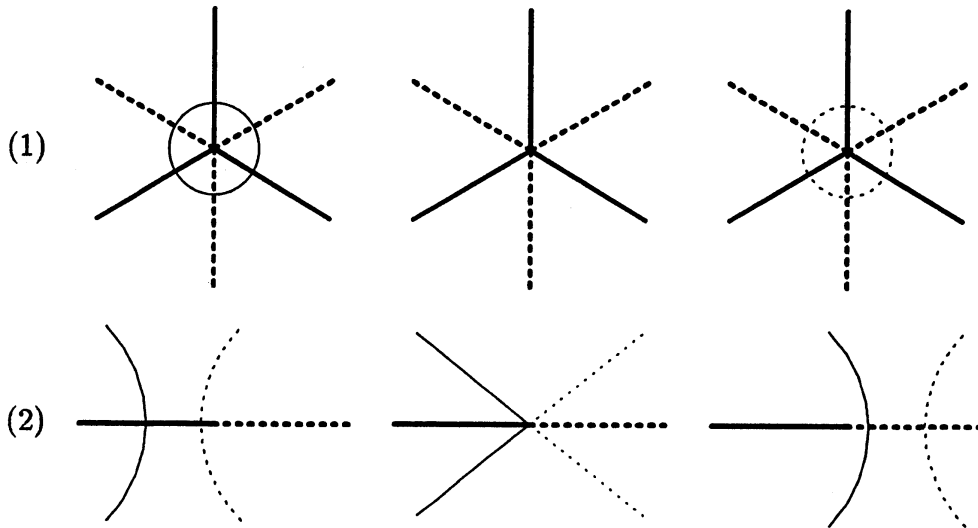


図5 臍点における主曲率一定曲線の推移 (1) 楕円的臍点 (2) 双曲的臍点

正則曲面  $g$  の距離  $t_0$  の平行曲面  $g^t$  上の点  $g^t(u_0, v_0)$  における接平面の方程式は  $\Psi^t(u_0, v_0, x, y, z) = 0$  で与えられる。このことから、関数  $\Psi, \Psi^t$  を平行接平面関数と呼ぶこととする。

平行曲面  $g^t$  は、それ自身の接平面族  $\Psi^t = 0$  の定める包絡面になっている、

$$\Psi^t(u, v, x, y, z) = \Psi_u^t(u, v, x, y, z) = \Psi_v^t(u, v, x, y, z) = 0$$

という形で書くことができる。これは、 $\Psi^t$  の判別集合  $\mathcal{D}(\Psi^t)$  と一致する。したがって、拡大距離 2 乗関数のときと同様に「いつ」平行接平面関数  $\Psi, \Psi^t$  が関数  $\psi(u, v) = \Psi(u, v, x_0, y_0, z_0, t_0)$  または、 $\psi(u, v) = \Psi^t(u, v, x_0, y_0, z_0)$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折であるかを調べることで、平行曲面  $g^t$  の特異点を分類できるはずである。

しかし、実際に  $\Psi^t$  の判別集合  $\mathcal{D}(\Psi^t)$  を求めると、 $g(u, v)$  が放物的点ではないときは、 $\mathcal{D}(\Psi^t)$  は平行曲面  $g^t$  と一致するが、 $g(u, v)$  が放物的点のときは、

$$\mathcal{D}(\Psi^t) = \{(x, y, z) = g(u, v) + \lambda(u, v)g_u(u, v) + \mu(u, v)g_v(u, v) + t_0\mathbf{n}(u, v), (\lambda, \mu) \text{ は漸近方向}\}$$

となり、 $g^t$  と一致しない。

一般に放物的点の集合は放物的曲線 (parabolic line) としてあらわれるため放物的点における  $\mathcal{D}(\Psi^t)$  は空間曲線となる。ここで、 $U$  上の曲線  $\alpha(s) = (u(s), v(s))$  を曲面  $g$  の放物的曲線とし、

$$ANC(s) = g(\alpha(s)) + \lambda(\alpha(s))g_u(\alpha(s)) + \mu(\alpha(s))g_v(\alpha(s)) + t_0\mathbf{n}(\alpha(s))$$

を曲面  $g$  の放物的点における漸近法曲線 (asymptotic-normal curve),

$$ANS(s, t) = g(\alpha(s)) + \lambda(\alpha(s))g_u(\alpha(s)) + \mu(\alpha(s))g_v(\alpha(s)) + tn(\alpha(s))$$

を曲面  $g$  の放物的点における漸近法曲面 (asymptotic-normal surface) と呼ぶこととする.

例 3.1. 曲面

$$g(u, v) = \left( u, v, \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}(u^3 - 3uv^2) \right)$$

を考える. 放物的曲線  $\alpha(s)$  は

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{2}(\cos s - 1), \frac{1}{2} \sin s \right)$$

で与えられる. 漸近方向  $(\lambda, \mu)$  は  $\lambda g_u + \mu g_v = 1$  となるようにとると,

$$(\lambda, \mu) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{138 - 15 \cos s + 6 \cos 2s - \cos 3s}} \left( \sin \frac{s}{2}, \cos \frac{s}{2} \right)$$

となる. したがって,  $g$  に対する漸近法曲線は

$$ANC(s) = \left( \frac{1}{2}(\cos s - 1) + \frac{8\sqrt{2} \sin \frac{s}{2}}{\sqrt{138 - 15 \cos s + 6 \cos 2s - \cos 3s}} + t_0 \frac{2\sqrt{2}(\cos s + 2) \sin^2 \frac{s}{2}}{\sqrt{39 - 6 \cos s - 3 \cos 2s + 2 \cos 3s}}, \right. \\ \left. \frac{\sin s}{2} + \frac{8\sqrt{2} \cos \frac{s}{2}}{\sqrt{138 - 15 \cos s + 6 \cos 2s - \cos 3s}} + t_0 \frac{\sqrt{2}(\cos s - 1) \sin s}{\sqrt{39 - 6 \cos s - 3 \cos 2s + 2 \cos 3s}}, \right. \\ \left. \frac{1}{3}(\cos s + 2) \sin^4 \frac{s}{2} - \frac{4\sqrt{2} \sin^3 \frac{s}{2}}{\sqrt{138 - 15 \cos s + 6 \cos 2s - \cos 3s}} + t_0 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{39 - 6 \cos s - 3 \cos 2s + 2 \cos 3s}} \right)$$

となり, 漸近法曲線の像は図 6 (点線:  $t_0 = 1$ , 実線:  $t_0 = 0$ , 太線:  $t_0 = -1$ ), 漸近法曲面の像は図 7 となる.

最後に, 平行接平面関数  $\Psi$ ,  $\Psi^t$  の  $\kappa$  普遍性についての結果を紹介する.

定理 3.2.  $\psi(u, v) = \Psi(u, v, x_0, y_0, z_0, t_0)$  または  $\psi(u, v) = \Psi^t(u, v, x_0, y_0, z_0)$  とする. 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の放物的点であるとき, 次が成り立つ.

- (1)  $\kappa_1(u_0, v_0) = 0$  (resp.  $\kappa_2(u_0, v_0) = 0$ ) とする.  $\psi$  が  $(u_0, v_0)$  で  $A_2$  特異点を持つとき, 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の主方向  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) に関する峰点でなければ,  $\Psi^t$  は  $\psi$  の  $\kappa$  普遍開折である.



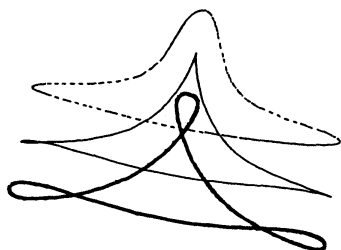


図6 漸近法曲線

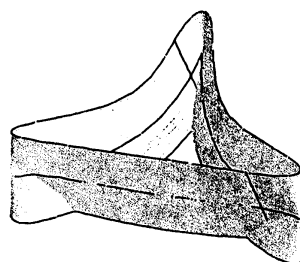


図7 漸近法曲面

- (2)  $\kappa_1(u_0, v_0) = 0$  (resp.  $\kappa_2(u_0, v_0) = 0$ ) とする.  $\psi$  が  $(u_0, v_0)$  で  $A_3$  特異点を持つとき, 点  $g(u_0, v_0)$  が曲面  $g$  の主方向  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) に関する峰点でなく,  $(u_0, v_0)$  において

$$(v_2\kappa_1)^2 - (v_1\kappa_1)(v_2\kappa_2) \neq 0 \quad (\text{resp. } (v_1\kappa_2)^2 - (v_2\kappa_2)(v_2\kappa_1) \neq 0)$$

であれば,  $\Psi^\pm$  は  $\psi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折である.

- (3)  $\psi$  が  $D_4$  特異点を持つとき,  $\Psi$  は  $\psi$  の  $\mathcal{K}$  普遍開折にはなり得ない.

## 参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, Singularities of differentiable maps I, Birkhäuser, 1986.
- [2] J. W. Bruce and D. L. Fidal, On binary differential equations and umbilics, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 111A, pp 147-168, 1989.
- [3] J. W. Bruce, and P. J. Giblin, Curves and Singularities, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [4] J. W. Bruce, P. J. Giblin, and F. Tari, Families of surface: focal sets, ridges and umbilics, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 125, pp 243-268, 1999.
- [5] J. W. Bruce, T. C. Wilkinson Folding maps and focal sets, Proceedings of Warwick Symposium on Singularities, Springer Lecture Notes in Math., vol 1462, pp 63-72, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1991.

- [6] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, IV, Note 7, Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [7] C. Gutierrez, J. Sotomayor, Structural stable configurations of lines of principal curvature, *Asterisque*, Vol. 98-99, pp 195-215, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [8] 長谷川大, 平行曲面の特異点, 微分方程式と微分幾何学への応用特異点論, 数理解析研究所講究録 1664, 京都大学数理解析研究所, pp 75-79, 2009.
- [9] 泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩, 幾何学と特異点, 共立出版, 2002.
- [10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, *Pacific J. of Math.* Vol. 221, pp 303-351, 2005.
- [12] R. J. Morris, The sub-parabolic lines of a surface, *The mathematics of surfaces*, VI (Uxbridge, 1994), pp. 79-102, *Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.*, 58, Oxford University Press, New York, 1996.
- [13] I. R. Porteous, The normal singularities of submanifold, *J. Diff. Geom.*, Vol. 5, pp 543-564, 1971.
- [14] I. R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.