数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 16-22

The joint universality for the Euler-Zagier double zeta and L-functions

東京理科大学理工学部数学科　中村隆

1 導入

このセクションでは，まず次にゼータ関数の普遍性について述べる．次に Euler-Zagier 2 重ゼータ関数を定義し，その性質を記述する．ゼータ関数の普遍性に関しては [7], 多重ゼータ関数の解析的性質については [4] を参照して頂きたい．

1.1 ゼータ関数の普遍性

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，$\sigma>1$ では

$$\zeta(\sigma)^{-1}\leq|\zeta(s)|\leq\zeta(\sigma)$$

となる．しかし $\sigma\leq 1$ ではこのような簡単な評価はできず，実は次の定理が成り立つ．

Theorem A (Bohr and Courant). 任意に固定した $1/2<\sigma<1$ に対し，$\{\zeta(\sigma+it):t\in\mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

この結果の関数空間への拡張が，ゼータ関数の普遍性と呼ばれるものである．普遍性定理の歴史，証明，一般化等については [1], [3], [7] を参照して頂きたい．

meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T\{\ldots\}:=T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau\in[0,T]:\ldots\}$, $\ldots$ の部分には τ が満たす条件が書かれる．K と $K_1,\ldots,K_m$ を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem B (Voronin). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\Big\}>0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，おおまかに言えば，零点を持たない任意の正則関数はゼータ関数の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．

次の定理は同時普遍性定理（joint universality theorem）と呼ばれるものである．

Theorem C (Bagchi, Voronin, Gonek). $f_l(s)$ を K_l 上で連続で零点を持たず，K_l の内部で正則な関数とする．$\chi_1,\ldots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{1\leq l\leq m}\sup_{s\in K_l}\big|L(s+i\tau\,;\chi_l)-f_l(s)\big|<\varepsilon\Big\}>0.$$

この定理は，零点を持たない任意の正則関数の組は，非同値な Dirichlet L 関数 $L(s;\chi)$ の平行移動により一様に近似でき，近似できる τ の密度は正であることを意味する.

Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理については次のものがある．Hurwitz ゼータ関数はオイラー積を持たないこと，近似される関数に零点を持たないという仮定が必要ないことを注意しておく.

Theorem D (Bagchi, Gonek). α を超越数とする．$f(s)$ を K 上で連続で K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau\,;\alpha)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

現在では数多くのゼータ関数が普遍性を持つことが証明されている.

1.2 Euler-Zagier 2重ゼータ関数

Euler-Zagier 2 重 L 関数を以下の式で定義する.

$$L_2(s_1,s_2\,;\chi_1,\chi_2):=\sum_{n_1>n_2\geq 0}\frac{\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}},$$

この級数は領域 $\Re(s_1)>1$ かつ $\Re(s_2)\geq 1$ で絶対収束し，全 $\mathbb{C}^r$ 平面に有理型に解析接続される．$\chi_1\equiv\chi_2\equiv 1$ であるとき上の関数を Euler-Zagier 2 重ゼータ関数と呼び，さらに s_1,s_2 が整数であるときは 2 重ゼータ値と呼ばれるものであり，多くの数学者によって研究されている.

Euler-Zagier 2 重 L 関数の類似である Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数を以下のように定義する.

$$\zeta_2(s_1,s_2\,;\alpha_1,\alpha_2):=\sum_{n_1>n_2\geq 0}\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}(n_2+\alpha_2)^{s_2}},$$

多重ゼータ関数の解析接続についても，数多くの研究者, 例えば秋山氏，荒川氏，江上氏、石川氏，金子氏，松本氏，谷川氏，Zhao 氏らによって研究された．ここでは Hurwitz 型 Euler-Zagier 2 重ゼータ関数の解析接続として次の定理を挙げておく.

Lemma A (Akiyama and Ishikawa). $\zeta_r(s_1,s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1,\alpha_{(2,\ldots,r)})$ は $s_1=1$, $s_1+s_2\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ 上に限り，*possible singularities* を持つ.

Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数も以下のような普遍性を持つことが知られている．ここでは 2 重ゼータの場合を述べておく．$\zeta(s\,;\alpha)$ は $\sigma\geq 1+\alpha$ であるとき零点を持たないことを注意しておく ([2, Theorem 8.1.1]).

Theorem E (Nakamura). $0<\alpha_2\leq 1$ と $\Re(s_2)>3/2$ を固定する．$0<\alpha_1<1$ を超越数とし，$f(s_1)$ は K の内部で正則で K で連続とする．$\zeta(s_2\,;\alpha_2)\neq 0$ であれば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\left\{\sup_{s_1\in K}\bigl|\zeta_2(s_1+i\tau,s_2\,;\alpha_1)-f(s_1)\bigr|<\varepsilon\right\}>0.$$

2 主結果

ここでは主結果について述べる．$L_2(s,s;\chi,\chi)$ と $\zeta_2(s,s;\alpha,\alpha)$ が普遍性を持つというのが主定理である．ただし $L_2(s,s;\chi,\chi)$ の普遍性については近似される関数の最小値に条件が付くことに注意する．にも関わらず，$L_2(s,s;\chi,\chi)$ は任意の複素数を近似できる．

2.1 普遍性

$\mathcal{D}$ を帯領域 D に含まれる単連結な領域とする．

Theorem 2.1. $\chi_1,\dots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標，$\mathcal{K}_l$ を $\mathcal{D}$ に含まれるコンパクト集合，$f_l(s)$ を $\mathcal{D}$ で正則で $\inf_{s\in\mathcal{D}}|2f_l(s)|>\sup_{s\in\mathcal{D}}|\zeta(\Re(2s))|$ を充たす関数とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{1\le l\le m}\sup_{s\in\mathcal{K}_l}\big|L_2(s+i\tau,s+i\tau;\chi_l,\chi_l)-f_l(s)\big|<\varepsilon\Big\}>0. \tag{2.1}$$

Theorem 2.2. $\alpha=1,1/2$, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{D}$ に含まれるコンパクト集合，$f(s)$ を $\mathcal{D}$ で正則で $\inf_{s\in\mathcal{D}}|2f(s)|>\sup_{s\in\mathcal{D}}|\zeta(\Re(2s);\alpha)|$ を充たすとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{s\in\mathcal{K}}\big|\zeta_2(s+i\tau,s+i\tau;\alpha,\alpha)-f(s)\big|<\varepsilon\Big\}>0. \tag{2.2}$$

Theorem 2.3. $\alpha\neq 1,1/2$ を有理数又は超越数，$f(s)$ を K の内部で正則で K で連続とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{s\in\mathcal{K}}\big|\zeta_2(s+i\tau,s+i\tau;\alpha,\alpha)-f(s)\big|<\varepsilon\Big\}>0. \tag{2.3}$$

上の $L_2(s,s;\chi,\chi)$ の普遍性定理で，例えば $\mathcal{D}:=\{s:1/2<\Re(s)<1,\ 0<\Im(s)<1\}$ であるときは $\sup_{s\in\mathcal{D}}|\zeta(\Re(2s))|=\infty$ である．この場合は近似される関数の存在は保障されないと解釈する．このような解釈が良くないと感じられるのならば，$\mathcal{D}$ は単連結な領域で，その閉包が臨界領域 D に含まれるなど仮定を強くしてやればよい．

$\mathcal{D}$ の単連結性は外せないと考えられる．穴が開いていて，そこで近似される関数が極を持っていたりする場合が危険である．$\inf_{s\in\mathcal{D}}|2f_l(s)|>\sup_{s\in\mathcal{D}}|\zeta(\Re(2s))|$ の条件は色々変えたりできる．そのことを利用して次セクションで述べる値近似が証明できる．

2.2 普遍性からの帰結

次の命題は普遍性定理から従う．

Proposition 2.4. $\chi_1,\ldots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標．$1/2<\sigma_*<1$，$C_{ln}\in\mathbb{C}$ とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{1\le l\le m}\sup_{0\le n\le N}\Big|L_2^{(n)}(\sigma_*+i\tau,\sigma_*+i\tau\,;\chi_l,\chi_l)-C_{ln}\Big|<\varepsilon\Big\}>0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.5. α を有理数又は超越数，$1/2<\sigma_*<1$，$C_n\in\mathbb{C}$ とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\Big\{\sup_{0\le n\le N}\Big|\zeta_2^{(n)}(\sigma_*+i\tau,\sigma_*+i\tau\,;\alpha,\alpha)-C_n\Big|<\varepsilon\Big\}>0. \tag{2.5}$$

従って $L_2(s,s\,;\chi,\chi)$ は普遍性に関しては条件が付くことになるが，値近似についてはそうではない．この現象は [6] でも見られる．$L_2(s,s\,;\chi,\chi)$ の普遍性において近似される関数の仮定が外されることが期待されるが，それは困難と考えられる．その理由の説明として，次の方程式を考える．

$$0=2\zeta_2(s,s\,;1,1)+\zeta(2s),\qquad 1/2<\Re(s)<1$$

この等式の右辺は調和積公式により $\zeta^2(s)$ の零点を求めることになる．従って Euler-Zagier 2重ゼータ関数の値分布は Riemann 予想と深く関わり，これが仮定を外すこと困難にしている原因と思われる．

上記の命題から，次の2重ゼータの独立性が得られる．

Proposition 2.6. $\chi_1,\ldots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標，F_n，$0\le n\le k$ を任意の s に対して次の等式を充たすとする

$$\sum_{n=0}^{k}s^nF_n\Big(L_2(s,s\,;\chi_1,\chi_1),\ldots,L_2(s,s\,;\chi_m,\chi_m),\\ \ldots,L_2^{(N)}(s,s\,;\chi_1,\chi_1),\ldots,L_2^{(N)}(s,s\,;\chi_m,\chi_m)\Big)=0.$$

このとき $F_n\equiv0$，$0\le n\le k$.

Proposition 2.7. α を有理数又は超越数，F_n，$0\le n\le k$ を任意の s に対して次の等式を充たすとする

$$\sum_{n=0}^{k}s^nF_n\Big(\zeta_2(s,s\,;\alpha,\alpha),\ldots,\zeta_2^{(N)}(s,s\,;\alpha,\alpha)\Big)=0.$$

このとき $F_n\equiv0$，$0\le n\le k$.

3 主結果の証明の概略

ここで述べるのは証明のスケッチであるので，詳しい証明は [5] を参照して頂きたい．

3.1 普遍性定理の証明

普遍性定理の証明は，1 極限定理，2 稠密性，の 2 つに分けられる．いずれのの証明にも調和積公式

$$L(s\,;\chi)L(s\,;\chi)=L_2(s,s\,;\chi,\chi)+L(2s\,;\chi^2)$$

が重要な役割を果たす．

種々の記号の準備が必要になるため，ここでは極限定理の証明については触れない．稠密性の証明について簡単に述べる．分母のパラメーター α による場合分けをする．

$\alpha=1,1/2$ である場合は

$$\exp(\text{稠密な級数全体})-\exp(\text{絶対収束する級数全体})$$

の形になる．後ろの項の振る舞いがわからないため，この部分の評価は切り捨てざる得ない．よって近似される関数に仮定が必要となってしまう．

α が超越数である場合は

$$\text{稠密な級数全体}-\text{絶対収束する級数全体}$$

の形になる．この場合は上の式は稠密な級数全体と同様に扱えるので，Hurwitz ゼータ関数の α が超越数である場合に帰着され，最も簡単な場合になる．

$\alpha\neq 1/2$ が有理数である場合は

$$\sum_{l=1}^{m}\exp(\{\,\text{稠密な級数全体}\,\}_l)-\sum_{l=1}^{m}\exp(\{\,\text{絶対収束する級数全体}\,\}_l)$$

の形になる．ただし上記の各 $\{$ 稠密な級数全体 $\}_l$ には，ある種の独立性がある．これは Dirichlet 指標が互いに非同値であることから導かれる．この事実と正則関数空間における近似定理により，上の式は

$$\text{稠密な級数全体}-\text{絶対収束する級数全体}$$

に帰着できる．よって Hurwitz ゼータ関数の α が超越数である場合と同様な議論ができ，普遍性定理が証明される．

3.2 値近似の証明

このサブセクションでは命題2.6の証明のスケッチをする．命題2.7の証明は一般的な方法で示されるので省略する．$\mathcal{D}^0$ を $\mathcal{D}$ に含まれる領域とする．$\mathcal{D}^0$ の単連結性は仮定しなくてよい．まず次の補題を示す．近似される関数の仮定に注意する．

Lemma 3.1. $\chi_1, \ldots, \chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標，$\mathcal{K}_l$ を $\mathcal{D}$ に含まれるコンパクト集合，$f_l(s)$ を $\mathcal{D}$ で正則で $\inf_{s\in\mathcal{D}_0}|2f_l(s)| > \sup_{s\in\mathcal{D}_0}|\zeta(\Re(2s))|$ を充たす関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\sup_{1\le l\le m}\sup_{s\in\mathcal{K}_l}\big|L_2(s+i\tau, s+i\tau\,;\chi_l,\chi_l) - f_l(s)\big| < \varepsilon\Big\} > 0. \tag{3.1}$$

定理2.1では $\inf_{s\in\mathcal{D}}|2f_l(s)| > \sup_{s\in\mathcal{D}}|\zeta(\Re(2s))|$ であった．異なるのはこの点だけである．$\mathcal{D}^0$ の単連結性は仮定されてないことが非常に重要になる．ここで $\mathcal{D}^0$ を

$$A^r_{\sigma_*} := \{s\in\mathbb{C} : r/2 < |s-\sigma_*| < r\}, \qquad 1/2 < \sigma_* < 1, \quad 0 < r < 1/4. \tag{3.2}$$

とおく．$C_0, \ldots, C_K \in \mathbb{C}$ とし，多項式 $g(s)$ は

$$g(s) := \sum_{k=0}^{K+1}\frac{C_k}{k!}s^k, \quad \text{where } (r/2)^{K+1}|C_{K+1}| > \sup_{s\in A^r_{\sigma_*}}|\zeta(\Re(2s))| + \sum_{k=1}^{K}\frac{|C_k|}{k!}.$$

とする．ここで $\mathcal{D}^0$ の単連結性は仮定されてないことが使われている．円環ではなく普通の円盤であると上式の $(r/2)^{K+1}|C_{K+1}|$ において穴が開いていないため $r\to 0$ になってしまい，条件を充たす C_{K+1} が存在しないことになる．

簡単な計算から，$\inf_{s\in A^r_{\sigma_*}}|2g(s-\sigma_*)| > \sup_{s\in A^r_{\sigma_*}}|\zeta(\Re(2s))|$ である（そうなるように C_{K+1} をとった）．$K^r_{\sigma_*} := \{s\in\mathbb{C} : 5r/8 \le |s-\sigma_*| \le 7r/8\} \subset A^r_{\sigma_*}$ とすれば，補題3.1から

$$\sup_{s\in K^r_{\sigma_*}}\big|L_2(s+i\tau, s+i\tau\,;\chi_1,\chi_1) - g(s-\sigma_*)\big| < 2\pi\frac{\varepsilon(3r)^J}{4^J J!},$$

を充たす τ は正の密度で存在する．一方，コーシーの積分公式により

$$L_2^{(j)}(\sigma_*+i\tau, \sigma_*+i\tau\,;\chi_1,\chi_1) - C_j =$$
$$\frac{j!}{2\pi i}\int_{|s-\sigma_*|=3r/4}\frac{L_2(s+i\tau, s+i\tau\,;\chi_1,\chi_1) - g(s-\sigma_*)}{(s-\sigma_*)^{j+1}}ds,$$

であるので，命題2.6が得られる．

参考文献

[1] Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions,' *Sugaku* 53 (2001), 279-296 (in Japanese); English Transl.: *Sugaku Expositions* 17 (2004), 51–71.

[4] K. Matsumoto, Analytic theory of multiple zeta-functions and its applications. (in Japanese) *Sūgaku* 59 (2007), no. 1, 24-45.

[5] T. Nakamura, "The joint universality for the Euler-Zagier double zeta and L-functions," *preprint.*

[6] T. NAKAMURA, Value distribution of zeta functions associated to symmetric matrices, *preprint.*

[7] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.