数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 42-52

On relative congruence zeta functions for cyclotomic function fields

名古屋大学・多元数理科学研究科　塩見　大輔 (Daisuke Shiomi) [1]
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

奇素数 p に対し, $G_p := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ とおく. 元 $a \in G_p$ に対し, $R_p(a)$ を次の条件

$$R_p(a) \equiv a \mod p,\ 0 \leq R_m(a) < p$$

を満たす整数とする. 1950 年代に, Carlitz-Olson [C-O] は p-分体の相対類数 h_p^- に対して次の行列式表示を与えた.

$$\det(R_p(ab^{-1}))_{a,b=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}} = (-p)^{\frac{p-3}{2}} h_p^-.$$

この公式は, 多くの研究者によって一般化が試みられ, 1990 年代に Girstmair [Gi] によって任意の虚アーベル体まで拡張が与えられている.

一方, 関数体の類数においても同様の公式が知られている. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の一変数有理関数体 $k = \mathbb{F}_q(T)$ とモニック多項式 $m \in \mathbb{F}_q[T]$ を考える. 有理関数体 k に Carlitz-加群の m-等分点を添加して得られる体を m-円分関数体と呼ぶ.

1990 年代後半に, Rosen [Ro] は Carlitz-Olson の公式のアナロジーとして, 多項式 P が既約のケースで, P-円分関数体の相対類数に対する行列式表示を与えた. 現在までに, Rosen の公式は, Bae-Kang [B-K], Ahn-Choi-Jung [A-C-J] らによって, より一般のアーベル体の場合に拡張されている.

もう一方の拡張として, ゼータ関数の行列式公式がある. 円分関数体の相対合同ゼータ関数の $s = 0$ での特殊値はちょうど相対類数と一致することから, 相対合同ゼータ関数は相対類数の一般化と見なすことができる.

本稿では, 円分関数体の相対合同ゼータ関数の行列式公式について述べる. セクション 1, 2 では, 円分関数体とそのゼータ関数の基本的性質について説明する. セクション 3 では, 本稿の目的である相対合同ゼータ関数の行列式

[1] 日本学術振興会 特別研究員 PD

公式 (Theorem 3.1) について紹介する. また, その系として Rosen の公式が我々の結果から導かれることを示す. セクション 4 では, 行列式公式の具体例を紹介する.

1 円分関数体

このセクションでは円分関数体の定義と基本的性質について紹介する. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の一変数有理関数体を $k = \mathbb{F}_q(T)$ とし, 多項式環を $A = \mathbb{F}_q[T]$ とする. 有理関数体 k の代数的閉包 k^{ac} に対し, $\mathbb{F}_q$ 上の線形写像 φ, μ を,

$$\begin{aligned} \varphi : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto x^q) \\ \mu : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto Tx) \end{aligned}$$

によって定義する. これらの線形写像を用いて, $m \in A$ の作用を

$$m * x = m(\varphi + \mu)(x) \quad (x \in k^{ac}) \tag{1}$$

と定義する. この作用によって, k^{ac} は A-加群になる. この A-加群 k^{ac} を Carlitz-加群と呼ぶ. モニック多項式 $m \in A$ に対して, Carlitz-加群の m-torsion point の集合

$$\Lambda_m = \{x \in k^{ac} | m * x = 0\} \tag{2}$$

を考える. 集合 Λ_m は k^{ac} の部分 A-加群であり, さらに, cyclic であることが知られている. 従って, 生成元 γ_m によって $\Lambda_m = A * \gamma_m$ と表せる.

有理関数体 k に Λ_m を添加して得られる体 K_m を m-円分関数体という. 拡大 K_m/k は geometric なガロア拡大であることが知られている. さらに, $a \bmod m \in (A/mA)^\times$ に対し,

$$\sigma_{a \mod m}(\lambda_m) = a * \gamma_m$$

によって $\sigma_{a \mod m} \in \mathrm{Gal}(K_m/k)$ を定めることで, 同型対応

$$(A/mA)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_m/k) \quad (a \bmod m \mapsto \sigma_{a \bmod m})$$

を得る.

上の同型によって, $\mathbb{F}_q^\times \left(\subseteq (A/mA)^\times\right)$ に対応する K_m/k の中間体を K_m^+ で表す. このとき, $\Phi(m)$ を $(A/mA)^\times$ の位数とすれば, ガロア理論より $[K_m^+ : k] = \frac{\Phi(m)}{q-1}$ となる. モニック多項式 m が 1 次のときは $K_m^+ = k$ であり, $q = 2$ のときは $K_m^+ = K_m$ であることが分かる.

Proposition 1.1. 有理関数体 k の無限素点を P_∞ とする. ただし, k の無限素点とは対応する指数付値 v_{P_∞} が $v_{P_\infty}(T) < 0$ を満すものとする. このとき,

1. 素点 P_∞ は K_m^+/k で完全分解する.

2. 素点 P_∞ 上にある K_m^+ の素点は, K_m/K_m^+ で完全分岐する.

有理関数体 k を P_∞ で完備化した体を k_∞ とすれば, 上の Proposition から $K_m^+ = k_\infty \bigcap K_m$ となることが分かる.

次に, Dirichlet 指標を用いて円分関数体に含まれる k 上の有限次アーベル拡大を考察する. モニック多項式 $m \in A$ に対して, X_m を $(A/mA)^\times$ の原始的指標からなる群とする. 指標 $\chi \in X_m$ が $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = 1$ を満すとき real, そうでないとき imaginary と呼ぶ. 特に, X_m の元で real な指標全体を X_m^+, imaginary な指標全体を X_m^- とおく. 原始的 Dirichlet 指標全体のなす群を

$$\mathbb{D} = \bigcup_{m:monic} X_m \tag{3}$$

とおく. また,

$$\tilde{k} = \bigcup_{m:monic} k_m \tag{4}$$

とおく. このとき, 次の一対一対応がある.

$$\{\mathbb{D} \text{ の有限部分群}\} \leftrightarrow \{\tilde{k} \text{に含まれる } k \text{ 上有限次拡大体}\}. \tag{5}$$

特に, X_m, X_m^+ に対応する k の拡大体は, それぞれ K_m, K_m^+ である. 次の定理は k の素点の分岐, 分解の様子を調べる上で基本となる.

Theorem 1.1. X を $\mathbb{D}$ の有限部分群, K を対応する体とする. 任意の既約モニック多項式 $P \in A$ に対して,

$$Y = \{\chi \in X \mid \chi(P) \neq 0\}, \quad Z = \{\chi \in X \mid \chi(P) = 1\}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} X/Y &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における惰性群}, \\ Y/Z &\simeq \ \text{位数 } f_P \text{ の巡回群}, \\ X/Z &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における分解群} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, f_P は P の K/k における相対次数とする.

2 円分関数体の相対合同ゼータ関数

有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の一変数代数関数体に対し, その合同ゼータ関数 $\zeta(s,K)$ を

$$\zeta(s,K)=\prod_{\mathcal{P}:prime}\left(1-\frac{1}{\mathcal{NP}^s}\right)^{-1} \tag{6}$$

によって定義する. ただし, $\mathcal{NP}$ は $\mathcal{P}$ の剰余類体の元の個数である. 上のオイラー積は $\mathrm{Re}(s)>1$ で広義一様絶対収束し, その領域で正則関数となる. 関数体 K の種数を g_K とする. このとき, $2g_K$ 次の整数係数多項式 $Z_K(X)$ を用いて, 合同ゼータ関数 $\zeta(s,K)$ は,

$$\zeta(s,K)=\frac{Z_K(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})} \tag{7}$$

と表せることが知られている. 上の等式の右辺は $\mathbb{C}$ 上有理型関数であることから, 合同ゼータ関数は全平面に解析接続される. 多項式 $Z_K(X)$ に関して次の性質が知られている.

Theorem 2.1. 関数体 K の類数 ($=0$ 次の因子類群の位数) を h_K とする. このとき,

1. $Z_K(0)=1,\ Z_K(1)=h_K.$
2. $q^{g_K}X^{2g_K}Z_K(\frac{1}{qX})=Z_K(X).$
3. $Z_K(X)$ の根はすべて $|q|^{-\frac{1}{2}}$ 上にある.

さて, $\tilde{k}$ に含まれる k の有限次拡大体 K に対し, これに対応する指標群を X_K とおく. 体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ ($=K$ の元で A 上整のものからなる環) に対し, そのゼータ関数を

$$\zeta(s,\mathcal{O}_K)=\prod_{\mathcal{P}:finite}\left(1-\frac{1}{\mathcal{NP}^s}\right)^{-1}$$

によって定義する. また, $\chi\in\mathbb{D}$ に対して L-関数を

$$L(s,\chi)=\prod_{P:irreducible}\left(1-\frac{\chi(P)}{N(P)^s}\right)^{-1}$$

とおく. このとき, Theorem 1.1 を用いて, 関数 $\zeta(s,\mathcal{O}_K)$ は次のように, L-関数の積で分解することができる.

Proposition 2.1.

$$\zeta(s,\mathcal{O}_K)=\prod_{\chi\in X_K}L(s,\chi).$$

次に, 円分関数体の合同ゼータ関数について調べる. 等式 (7) により, K_m, K_m^+ の合同ゼータ関数 $\zeta(s,K_m)$, $\zeta(s,K_m^+)$ は, 整数係数多項式 $Z_m(X)$, $Z_m^+(X)$ を用いて,

$$\zeta(s,K_m)=\frac{Z_m(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})},$$
$$\zeta(s,K_m^+)=\frac{Z_m^{(+)}(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})}$$

と表すことができる. ここで,

$$Z_m^{(-)}(X)=\frac{Z_m(X)}{Z_m^{(+)}(X)} \tag{8}$$

とおく. 拡大 K_m/K_m^+ において無限素点が完全分岐することから, K_m の相対合同ゼータ関数 $\frac{\zeta(s,K_m)}{\zeta(s,K_m^+)}$ は,

$$\frac{\zeta(s,K_m)}{\zeta(s,K_m^+)}=Z_m^{(-)}(q^{-s})=\prod_{\chi\in X_m^-}L(s,\chi) \tag{9}$$

と表せる. また, 指標 $\chi\in X_m^-$ に対して f_χ を χ の conductor とすれば, 簡単な計算から

$$L(s,\chi)=\sum_{\substack{a:monic\\ \deg(a)<d}}\chi(a)q^{-\deg(a)\cdot s} \tag{10}$$

となることが分かる. よって, $Z_m^{(-)}(X)$ は複素数係数多項式であることが分かるが, $Z_m^{(+)}(0)=1$ であること, $Z_m(X)$, $Z_m^{(+)}(X)$ が整数係数多項式であることから, $Z_m^{(-)}(X)$ も整数係数多項式となる. また, Theorem 2.1 から K_m の相対類数を h_m^- とおけば, $Z_m^{(-)}(1)=h_m^-$ となる.

3 相対合同ゼータ関数の行列式表示

このセクションでは, 円分関数体の相対合同ゼータ関数の行列式表示について紹介する.

まず, 必要な記号を準備にする. モニック多項式 $m \in A$ に対して, $d = \deg m$, $N_m = \Phi(m)/(q-1)$ とおく. また, $\alpha \in (A/mA)^\times$ に対して, $r_\alpha \in A$ を

$$\begin{aligned} r_\alpha &= a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (n = \deg r_\alpha < d) \\ r_\alpha &\equiv \alpha \mod m \end{aligned}$$

を満たすものとする. このとき,

$$\mathrm{Deg}(\alpha) = n, \quad L(\alpha) = a_n \in \mathbb{F}_q^\times$$

と定める. また, $\mathbb{F}_q^\times$ の指標 λ と $\alpha \in (A/mA)^\times$ に対し, $c^\lambda(\alpha) = \lambda^{-1}(L(\alpha))$ とおく. 群 $(A/mA)^\times$ の元 α で, $\mathrm{Deg}(\alpha) < d$, $L(\alpha) = 1$ となるもの全体を $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N_m}$ で表し,

$$\begin{aligned} c_{ij}^\lambda &= c^\lambda(\alpha_i \alpha_j^{-1}) \ \ (i, j = 1, 2, ..., N_m), \\ d_{ij} &= \mathrm{Deg}(\alpha_i \alpha_j^{-1}) \ \ (i, j = 1, 2, ..., N_m) \end{aligned}$$

とおく. 上記の記号もと, 指標 λ に対して次の行列

$$M_{m,\lambda}(X) = (c_{ij}^\lambda X^{d_{ij}})_{i,j=1,2,...,N_m} \tag{11}$$

を考える. 行列 $M_{m,\lambda}(X)$ が相対合同ゼータ関数の行列式表示を与えるものである. 簡単な計算から $M_{m,\lambda}(0)$ は単位行列となることが確かめられ, 従って, $M_{m,\lambda}(X)$ は正則行列となる. これらの行列を用いて,

$$D_m^{(-)}(X) = \prod_{\lambda \neq 1} \det M_{m,\lambda}(X) \tag{12}$$

とおく. ただし, 上の積において λ は非自明な $\mathbb{F}_q^\times$ の指標を全体を渡る. 次に,

$$J_m^{(-)}(X) = \prod_{\chi \in X_m^-} \prod_{Q|m} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) \tag{13}$$

を考える. 多項式 $J_m^{(-)}(X)$ は, $D_m^{(-)}(X)$ と $Z_m^-(X)$ との差を補正するものである. 定義から, m が既約モニック多項式のベキとなる場合は, $J_m^{(-)}(X) = 1$ となる. 多項式 $J_m^{(-)}(X)$ は次のように計算することができる.

Proposition 3.1.

$$J_m^{(-)}(X) = \prod_{Q|m} \frac{(1 - X^{f_Q \deg Q})^{g_Q}}{(1 - X^{f_Q^+ \deg Q})^{g_Q^+}}$$

ただし, Q は m を割る既約モニック多項式を渡り, f_Q, f_Q^+ は, それぞれ Q の K_m/k, K_m^+/k における相対次数, g_Q, g_Q^+ はそれぞれ Q 上にある K_m, K_m^+ の素点の個数である.

Proof. まず, K_m, K_m^+ に対応する指標群は X_m, X_m^+ であることに注意する. 既約モニック多項式 Q を一つ固定し,

$$Y_Q = \{ \chi \in X_m \mid \chi(Q) \neq 0 \}, \quad Z_Q = \{ \chi \in X_m \mid \chi(Q) = 1 \}$$

とおく. Theorem 1.1 から

$$\begin{aligned}
\prod_{\chi \in X_m} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) &= \prod_{\chi \in Y_Q} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) \\
&= \prod_{\chi \in Y_Q/Z_Q} \prod_{\psi \in Z_Q} (1 - \chi\psi(Q) X^{\deg Q}) \\
&= \Big(\prod_{\chi \in Y_Q/Z_Q} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) \Big)^{g_Q}.
\end{aligned}$$

群 Y_Q/Z_Q は f_Q 次の巡回群であることから,

$$\prod_{\chi \in Y_Q/Z_Q} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) = (1 - X^{f_Q \deg Q}).$$

従って,

$$\prod_{\chi \in X_m} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) = (1 - X^{f_Q \deg Q})^{g_Q}.$$

となる. 同様に X_m^+ について計算すると,

$$\prod_{\chi \in X_m^+} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) = (1 - X^{f_Q^+ \deg Q})^{g_Q^+}.$$

となる. $X_m^- = X_m - X_m^+$ に注意すれば, 上の二つの等式から Propositon を得る. □

次の定理が本稿の主結果ある.

Theorem 3.1. モニック多項式 m に対して,

$$D_m^{(-)}(X) = Z_m^{(-)}(X) J_m^{(-)}(X) \tag{14}$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $\chi \in X_m^-$ に対して, f_χ を conductor, 指標 $\tilde{\chi}$ を,

$$\tilde{\chi} = \chi \circ \pi_\chi$$

によって定義する. ただし, $\pi_\chi : (A/mA)^\times \to (A/f_\chi A)^\times$ は自然な写像である. このとき,

$$L(s, \tilde{\chi}) = L(s, \chi) \cdot \prod_{Q|m} \left(1 - \chi(Q) q^{-s \deg Q}\right).$$

が成立する.

群 $\mathbb{F}_q^\times$ の非自明な指標 λ に対し, $\psi \in X_m^-$ $(\psi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda)$ を一つ固定する. このとき,

$$\psi \cdot X_m^+ = \{\chi \in X_m^- \mid \chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda\}$$

となる. また, $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda$ なる指標 $\chi \in X_m^-$ に対して, 適当な $\phi \in X_m^+$ を用いて, $\chi = \psi \cdot \phi$ と表せる. よって,

$$\begin{aligned} L(s, \tilde{\chi}) = &= \sum_{i=1}^{N_m} \tilde{\chi}(\alpha_i) q^{-\mathrm{Deg}(\alpha_i)s} \\ &= \sum_{i=1}^{N_m} \tilde{\psi}(\alpha_i) \tilde{\phi}(\alpha_i) c^\lambda(\alpha_i) q^{-\mathrm{Deg}(\alpha_i)s} \end{aligned}$$

が成り立つ. 指標 ϕ が X_m^+ 全体を渡るとき, $\tilde{\phi}$ は $(A/mA)^\times/\mathbb{F}_q^\times$ の指標全体を渡る. 一方, $\tilde{\psi}(\alpha)c^\lambda(\alpha)$ と Deg は $(A/mA)^\times/\mathbb{F}_q^\times$ 上の関数であり, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N_m}$ はその代表系であることに注意すれば, Frobenius の行列式公式から,

$$\begin{aligned} \prod_{\chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda} L(s, \tilde{\chi}) &= \det(\psi(\alpha_i \alpha_j^{-1}) c_{ij}^\lambda q^{-sd_{ij}})_{i,j=1,2,\ldots,N_m} \\ &= \det(c_{ij}^\lambda q^{-sd_{ij}})_{i,j=1,2,\ldots,N_m} \\ &= \det M_{m,\lambda}(q^{-s}). \end{aligned}$$

集合 X_m^- は,

$$X_m^- = \bigcup_{\lambda \neq 1} \{\chi \in X_m \mid \chi|_{\mathbb{F}_q^\times} = \lambda\}$$

と分解されることから Theorem を得る. □

等式 (14) の両辺に $X = 1$ を代入すれば, $Z_m^-(1) = h_m^-$ であるから, 次の相対類数に関する行列式表示を得る.

Corollary 3.1. (cf. Bae-Kang [B-K], Ahn-Choi-Jung [A-C-J]) 定理と同じ記号において,

$$\prod_{\lambda \neq 1} \det(c_{ij}^\lambda) = W_m^- h_m^- \tag{15}$$

が成り立つ. ただし,

$$W_m^- = \begin{cases} \prod_{Q|m} f_Q^- & Q|m \text{ なる既約多項式に対して}, g_Q^- = 1, \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{16}$$

ただし, $f_Q^- = \frac{f_Q}{f_Q^+}$, $g_Q^- = \frac{g_Q}{g_Q^+}$.

4 いくつかの具体例

Example 4.1. $q = 3$, $m = T^2 + 1$ のケースを考える. このとき, $N_m = 4$ であり,

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = T,\ \alpha_3 = T + 1,\ \alpha_4 = T + 2$$

とおく.

$$\begin{aligned} D_m^-(x) &= \begin{vmatrix} 1 & -x & x & x \\ x & 1 & -x & x \\ x & -x & 1 & -x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 - 2x^2 + 9x^4. \end{aligned}$$

多項式 m は既約であることから, $J_m^{(-)}(X) = 1$. 従って, *Theorem 3.1* により,

$$Z_m^-(x) = 1 - 2x^2 + 9x^4.$$

また, K_m の相対類数 h_m^- は $Z_m^{(-)}(1) = 8$.

Example 4.2. $q=3$ と $m=T^3+T^2$ のケースを考える．このとき，$N_m=6$ であり，

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1,\ \alpha_2 = T^2+2T+2,\ \alpha_3 = T^2+T+1,\\ \alpha_4 &= T+2,\ \alpha_5 = T^2+1\ \alpha_6 = T^2+T+2\end{aligned}$$

とおく．

$$\begin{aligned} D_m^{(-)}(X) &= \begin{vmatrix} 1 & x & -x^2 & x^2 & x^2 & -x^2 \\ x^2 & 1 & -x^2 & -x^2 & -x^2 & -x \\ x^2 & x^2 & 1 & x & -x^2 & x^2 \\ x & x^2 & x^2 & 1 & x^2 & x^2 \\ x^2 & x^2 & -x & -x^2 & 1 & x^2 \\ x^2 & -x^2 & -x^2 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1-6x^3-3x^4-6x^5+23x^6+30x^7+6x^8-18x^9-27x^{10}, \end{aligned}$$

$$J_m^{(-)}(x) = 1+x-x^3-x^4.$$

従って，*Theorem 3.1* より，

$$\begin{aligned} Z_m^{(-)}(x) &= \frac{D_m^{(-)}(x)}{J_m^{(-)}(x)} \\ &= 1-x+x^2-6x^3+3x^4-9x^5+27x^6 \end{aligned}$$

となる．また，K_m の相対類数 h_m^- は $Z_m^{(-)}(1)=16$.

References

[A-C-J] Ahn, Jaehyun and Choi, Soyoung, and Jung, Hwanyup, Class number formulae in the form of a product of determinants in function fields, J. Aust. Math. Soc. **78** (2005), no.2, 227–238.

[B-K] Bae, Sunghan and Kang, Pyung-Lyun, Class numbers of cyclotomic function fields. Acta Arith. **102** (2002), no. 3, 251-259.

[C-O] L. Carlitz and F. R. Olson, Maillet's determinant, Proc. Amer. Soc. **6** (1955), 265-269.

[Gi] Girstmair, K., The relative class numbers of imaginary cyclic fields of degrees 4, 6, 8, and 10, Math. Comp. **61** (1993), 881-887.

[G-R] Galovich, Steven and Rosen, Michael, The class number of cyclotomic function fields. J. Number Theory **13** (1981), no. 3, 363–375.

[Ha] Hayes, D. R., Explicit class field theory for rational function fields.Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77-91.

[Ro] M. Rosen, A note on the relative class number in function fields. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1299-1303.

[Sh] D. Shiomi, Determinat formula of congruence zeta functions for maximal real cyclotomic functional fields. Acta Arith. **138** (2009), no. 3, 259–268.

[Wa] Washington, L.C., Introduction to Cyclotomic Fields, Springer-Verlag. New York, 1982.