数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 60-70

Eisenstein Series and Zeros of Zeta Functions

東京大学大学院 数理科学研究科　鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1. はじめに

この小論の主題は 2007 年に Lin Weng 氏により導入されたゼータ関数の零点に対する筆者と小森靖氏, Haseo Ki 氏との共同研究に関するものである. このゼータ関数は Langlands の Eisenstein 級数の理論にも由来している. それが表題の由縁でもあるのだが, 10 月の解析数論研究集会でこの話題について講演させて頂いた後, 明けて 1 月の保型形式研究集会でも同じ話題について講演させて頂く機会を得た. このような経緯で同じ話題について 2 編の講究録原稿を書かねばならなくなったのだが, 同じような文章を 2 編並べるのも芸がない. そこで結果自体は同じであるものの, それに対する切り口を変えて解説することとした.

この小論では抽象ルート系の方面からの解説を試みる. Eisenstein 級数方面からの解説は保型形式研究集会の講究録 [11] で展開する予定である. したがって表題にあるにも関わらず, 以下では Eisenstein 級数は一切登場しないことを御容赦頂きたい.

ここで抽象ルート系からの解説を選んだのには一応の訳がある. 近年, 解析数論の分野でもルート系や Weyl 群が登場することが増えて来たように思う. 代表的なのは Bump, Chinta, Diaconu, Friedberg, Goldfeld, Hoffstein 等の欧米勢による multiple Dirichlet series の理論, Komori, Matsumoto, Tsumura による Witten ゼータの理論などである. du Sautoy 等の群・環のゼータ関数を含めてもいいかもしれない. こういった背景から, この小論の対象である Weng のゼータ関数を代数群ではなく抽象ルート系の観点から記述することで, これらとの接点が見やすくしようというのが一つの理由である. また, ルート系や Weyl 群といったものは分野を超えた共通言語の一つであるから, そのような言葉で解説することで多くの研究者の興味をひくきっかけにしたいという目論見もある. 実際, 筆者が小森氏と共同研究をすることになったきっかけは, 筆者がセミナー講演中に書いた Weng のゼータ関数のルート系・Weyl 群による表示に小森氏が興味を持ってくれたことであった.

前置きが長くなってしまったが, 以下にも御付合い頂ければ存外の幸せである.

2. 抽象ルート系による Weng ゼータ関数の導入

2.1. 抽象ルート系と Weyl 群. ここではルート系, Weyl 群に関する基本事項を述べる. 詳細な事項や証明に関しては例えば Humphreys [3,4] を参照して欲しい.

標準的な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ をもつ r 次元ユークリッド空間 V の有限部分集合 Φ が以下の 4 つの性質を満たすとき, Φ を階数 r の (抽象) ルート系と呼び, Φ の元をルートという:

(1) Φ は $\mathbb{R}$ 上で V を張る.
(2) $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. ここで $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle$.

(3) ルート $\alpha \in \Phi$ を法線ベクトルに持つ V 内の超平面 $P_\alpha = \{v \in V \mid \langle \alpha, v\rangle = 0\}$ に関する鏡映を σ_α とする: $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee\rangle\alpha$ $(\beta \in \Phi)$. このときすべてのルート $\alpha \in \Phi$ に対し, $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

(4) α の実数倍で Φ に属するものは $\pm\alpha$ に限る.

ルート $\alpha \in \Phi$ に対し, $\alpha^\vee = 2\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$ を α のコルートと呼ぶ. 2つの抽象ルート系 (Φ_1, V_1), (Φ_2, V_2) が与えられたとき, 直和 $(\Phi_1 \cup \Phi_2, V_1 \oplus V_2)$ もルート系をなす. 直和としての表示を持たないルート系を既約であるという. 特に整数性の条件 (2) によって, 階数 r を固定すればルート系には限られた可能性しかなく, 既約なルート系には完全な分類が知られている. それは4つの無限系列 A_r, B_r, C_r, D_r と, 例外型の E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 から成る (添字は階数を表す). 鏡映 $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ が生成する $GL(V)$ の有限部分群 $W = W(\Phi)$ をルート系 Φ の Weyl 群という.

ルート系 Φ の部分集合 $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ が基本ルート系であるとは, (i) Φ の各元 α は $\alpha = \sum_{i=1}^r m_i\alpha_i$ (m_i は整数) と一意に表され; (ii) m_i $(1 \le i \le r)$ はすべて ≥ 0 であるか, すべて ≤ 0 であるかのいずれか; であることをいう. 基本ルート系 Δ に対し $\Phi^+ = \Phi \cap \left\{\sum m_i\alpha_i \mid m_i \ge 0,\ \alpha_i \in \Delta\right\}$ を (Δ に関する) 正のルート系, $\Phi^- = -\Phi^+$ を負のルート系と言う. このとき $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ かつ $\Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset$. しばしば $\alpha \in \Phi^+$ (resp. Φ^-) であることを $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) で表す. 基本ルート系 $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ が与えられたとき, Weyl 群 W は $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$ $(1 \le i \le r)$ で生成されることが知られている. 以下, 基本ルート系 $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ を一つ固定する. Δ の元を単純ルートと呼ぶ.

すべての $\alpha \in \Phi$ について $\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$ であるような $\lambda \in V$ をウェイトという. 単純ルートのコルートの集合 $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ は再び V の基底をなす. これに関する双対基底 $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ (即ち $\langle \lambda_i, \alpha_j^\vee\rangle = \delta_{ij}$) の元はウェイトであり, 特に基本ウェイトと呼ばれる. 正のルートから成るベクトル

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$$

を Weyl ベクトルと呼ぶ. これを用いて $\alpha^\vee$ の高さ (height) が

$$\mathrm{ht}\,\alpha^\vee = \langle \rho, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$$

で定義される. 各 $w \in W$ に対し,

$$\Phi_w = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-.$$

とおく. 同じことだが $\alpha \in \Phi_w$ よりも, $\alpha > 0$ かつ $w\alpha < 0$ と表記した方が直観的に分かりよいので, この両方を適宜用いることにする.

2.2. **Weng ゼータ関数の定義 1.** まず次のような V 上の関数を導入する.

定義 1. Φ を階数 r の既約なルート系とし, W をその Weyl 群とする. 基本ルート系 Δ を一つ固定し, V 上の関数 $\omega_\Delta^\Phi : V \to \mathbb{C}$ を

$$\omega_\Delta^\Phi(\lambda) = \sum_{w \in W} \prod_{\alpha \in \Delta} \frac{1}{\langle w\lambda - \rho, \alpha^\vee\rangle} \prod_{\alpha > 0,\, w\alpha < 0} \frac{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle)}{\hat{\zeta}(\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle + 1)} \quad (\lambda \in V) \tag{2.1}$$

で定義する．ここで $\hat{\zeta}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ で $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数，$\Gamma(s)$ はガンマ関数である．(右辺の二つ目の積はすべての $\alpha\in\Phi_w$ を渡る意味で，$\Phi_w=\emptyset$ のときは 1 とする．)

このように天下りに定義してしまうと，このような関数を考える理由が見えないが，この定義の由来は Eisenstein 級数の定数項にある (Weng [13,14])．冒頭で述べたようにそれには今回は立ち入らない．小森氏の言によれば氏のようなルート系の専門家からすると，Eisenstein 級数の事とは無関係に右辺の形にはピンとくるものがあるらしい．筆者はまだ修行不足でそこまでの境地には達していない．

右辺の和や積は全て有限であるから，ω_Δ^Φ は V 上の関数から $V\otimes\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}^r$ 上の関数へ自然に延長される．特異性は見やすい．定義から ω_Δ^Φ は $\lambda\in V\otimes\mathbb{C}$ の関数として扱う方が自然であるし，また理論も展開しやすいが，敢て座標をとって書き下してみよう．もしかしたらそれで親しみを持ってくれる方がいるかもしれない．

基本ウェイト $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$ を用いて $V\otimes\mathbb{C}$ の座標を

$$\lambda=\sum_{j=1}^{r}(1+s_j)\lambda_j=\rho+\sum_{j=1}^{r}s_j\lambda_j\quad(\lambda\in V)\tag{2.2}$$

と取る．ここで $\rho=\sum_{i=1}^r\lambda_i$ を用いた．これに応じて各 $w\in W$, $1\le j\le r$ に対し

$$w\lambda_j=\sum_{i=1}^{r}(1+c_{ij}(w))\,\lambda_i$$

により $\{c_{ij}(w)\}_{1\le i,j\le r}$ を定める．また $\Delta^\vee$ に関する $\alpha^\vee$ の座標を $a_j(\alpha)$ とおく:

$$\alpha^\vee=\sum_{j=1}^{r}a_j(\alpha)\,\alpha_j^\vee.$$

このとき $\langle\lambda-\rho,\alpha^\vee\rangle=\sum_{j=1}^r a_j(\alpha)s_j$ だから，$\mathrm{ht}\,\alpha^\vee=\langle\rho,\alpha^\vee\rangle$ を思い出すと

$$\begin{aligned}&\omega_\Delta^\Phi(s_1,\cdots,s_r):=\omega_\Delta^\Phi(\rho+s_1\lambda_1+\cdots+s_r\lambda_r)\\&=\sum_{w\in W}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{\sum_{j=1}^r\bigl(c_{ij}(w)+(1+c_{ij}(w))\,s_j\bigr)}\prod_{\alpha>0,w\alpha<0}\frac{\hat{\zeta}(a_1(\alpha)\,s_1+\cdots+a_r(\alpha)\,s_r+\mathrm{ht}\,\alpha^\vee)}{\hat{\zeta}(a_1(\alpha)\,s_1+\cdots+a_r(\alpha)\,s_r+\mathrm{ht}\,\alpha^\vee+1)}.\end{aligned}$$

予想通り (?) かえって何だか分からない形になった気もするが，次節で例を計算するのでそちらも参照して欲しい．

定義から $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ は Weyl 群による対称性を内包した一般には多変数の関数である．その対称性を保ったまま $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ を 1 変数関数に特殊化する方法は自明ではない．しかし $\lambda=\rho$ という特異点に注目することで性質のよい特殊化を得ることができる．この発見の経緯は Weng [14] に詳しく述べられている．

定義 2. $V\otimes\mathbb{C}$ の座標を (2.2) のようにとる．各 $1\le p\le r$ に対し，$\omega_p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

$$\omega_p(s):=\omega_{\Delta,p}^\Phi(s):=\operatorname*{Res}_{s_i=0,\,i\ne p}\omega_\Delta^\Phi(\lambda)\quad(s=s_p)\tag{2.3}$$

により定義する．ここで $\operatorname*{Res}_{s_i=0,\, i\neq p}$ は $s_p=0$ とは異なる全ての超平面 $s_i=0$ $(1\le i\le r)$ にそって留数をとることを意味する．

(2.3) の右辺は留数をとる順序によらないことが示されるので ω_p は well-defined である．各単純ルートに対応した超平面 $H_\alpha=\{\lambda\in V\otimes\mathbb{C}\,|\,\langle\lambda-\rho,\alpha^\vee\rangle=0\}$ $(\alpha\in\Delta)$ たちはみな $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ の極因子になっており，点 $\lambda=\rho$ は H_α たちの交点となっている．(2.2) の座標の下で H_{α_j} は $s_j=0$ という超平面であり，$\lambda=\rho$ における特異性は $(s_1s_2\cdots s_r)^{-1}$ で与えられる．したがって全ての $s_j=0$ に対して留数をとってしまえば結果は定数であるが，$s_p=0$ という超平面を一つ除くことで 1 変数の関数が得られている．こう説明すると人工的な定義に思えるが，後で示すように $\omega_p(s)$ はキチンと Weyl 群の対称性を受け継いでいてきれいな性質をもっている事が分かる．

さきの $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ の表示からも分かるように，$\omega_p(s)$ の各項は分母に $\hat\zeta(as+b)$, $\hat\zeta(c)$ $(a,b,c$ は定数) の積を含む．しかし適当な $\hat\zeta(as+b)$, $\hat\zeta(c)$ たちの積を掛けることでこれらを消去することができる．そのような積で“最小”のものを $\omega_p(s)$ に掛けたものが Weng のゼータ関数である．

定義 3 (Weng, 2007). Φ を既約なルート系とし，Δ をその基本ルート系とする．各 $1\le p\le r$ に対し，$M_p(s)$ を $\omega_p(s)$ の分母に現れるような $\hat\zeta(as+b)$, $\hat\zeta(c)$ たちの積で，それらを記号として見たときに $M_p(s)\,\omega_p(s)$ の分母にそれらが現れないという意味で最小のものとする．このとき

$$\hat\zeta_p(s)=M_p(s)\,\omega_p(s) \tag{2.4}$$

を (Φ,Δ,p) に付随する Weng ゼータ関数と呼ぶ．

2.3. **Weng ゼータ関数の一例．** ここで一つ Weng ゼータ関数の例を挙げよう．しかし階数が上がると Weyl 群の元の個数が急速に増え，とても規定のページ数に収まらないので，ここでは階数 2 の G_2 型ルート系に対して述べるに留める．

$\mathbb{R}^3$ の標準的な正規直交基底を $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ とし，V を $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ に直交する $\mathbb{R}^3$ 内の平面とする．このとき $\Phi=\{\alpha\in V\cap\mathbb{Z}^3\,|\,\langle\alpha,\alpha\rangle=2 \text{ or } 6\}$ は G_2 型のルート系になり，基本ルート系の一つは

$$\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2\},\quad \alpha_1=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2,\quad \alpha_2=-2\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

で与えられる．しばしば $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\alpha_2$ とも表記する．$\langle\alpha,\alpha\rangle=2$, $\langle\beta,\beta\rangle=6$ であり，α を短ルート，β を長ルートと呼んだりする．ちなみに $\langle\alpha,\beta\rangle=-3$. この Δ に対し

$$\Phi^+=\{\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta,\,2\alpha+\beta,\,3\alpha+\beta,\,3\alpha+2\beta\},$$

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Phi^+}\gamma=5\alpha+3\beta.$$

基本ウェイト ($\{\alpha^\vee,\beta^\vee\}$ の双対基底) は $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\lambda_1=2\alpha+\beta$, $\lambda_2=3\alpha+2\beta$ である．Weyl 群 W は位数 12 の群で，鏡映と角度 θ の左回転 σ_θ を用いて表せば

$$W=\{\mathbf{1},\,\sigma_\alpha,\,\sigma_\beta,\,\sigma_{\alpha+\beta},\,\sigma_{2\alpha+\beta},\,\sigma_{3\alpha+\beta},\,\sigma_{3\alpha+2\beta},\,\sigma_{\pi/3},\,\sigma_{2\pi/3},\,\sigma_\pi,\,\sigma_{4\pi/3},\,\sigma_{5\pi/3}\}$$

この他に $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ を書き下すのに必要となるのは, 各 $w\in W$ に対する $\Phi_w=\Phi^+\cap w^{-1}\Phi^-$ の決定と, 多項式 $\langle w\lambda,\alpha^\vee\rangle\langle w\lambda,\beta^\vee\rangle$ の計算である. これらを Table 1 にまとめておいた. V の座標を (2.2) のようにとるなら, $\langle w\lambda,\alpha^\vee\rangle\langle w\lambda,\beta^\vee\rangle$ の計算には各 w の基底 Λ への作用が分かっていれば十分である. 最後の 2 列の「$*$」は対応する $w\in W$ が $\mathfrak{W}_p$ $(p=1,2)$ に属さないことを意味する. ここで $\mathfrak{W}_p$ は各 $1\le p\le r$ について,

$$\mathfrak{W}_p:=\{w\in W\mid \Delta_p\subset w^{-1}(\Delta\cup\Phi^-)\}\tag{2.5}$$

で定義される Weyl 群 W の部分集合であり, 次節以降で頻繁に用いられる. ルートとコルートの関係は

$$(\alpha+\beta)^\vee=\alpha^\vee+3\beta^\vee,\quad (2\alpha+\beta)^\vee=2\alpha^\vee+3\beta^\vee,$$
$$(3\alpha+\beta)^\vee=\alpha^\vee+\beta^\vee,\quad (3\alpha+2\beta)^\vee=\alpha^\vee+2\beta^\vee$$

となっている. これらから $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ が次のように計算される.

$$\begin{aligned}
\omega_\Delta^\Phi(\lambda)=&\frac{1}{s_1s_2}-\frac{1}{(s_1+2)(s_1+s_2+1)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)}{\hat\zeta(s_1+2)}-\frac{1}{(s_2+2)(s_1+3s_2+3)}\frac{\hat\zeta(s_2+1)}{\hat\zeta(s_2+2)}\\
&-\frac{1}{(s_1+2s_2+4)(2s_1+3s_2+4)}\frac{\hat\zeta(s_2+1)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)}{\hat\zeta(s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)}\\
&-\frac{1}{s_2\,(s_1+3s_2+5)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_1+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&-\frac{1}{(2s_1+3s_2+6)(s_1+2s_2+2)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_1+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&-\frac{1}{s_1\,(s_1+s_2+3)}\frac{\hat\zeta(s_2+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_2+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&-\frac{1}{(s_1+2s_2+2)(s_1+3s_2+5)}\frac{\hat\zeta(s_2+1)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)}{\hat\zeta(s_2+2)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)}\\
&-\frac{1}{(s_1+s_2+1)(2s_1+3s_2+6)}\frac{\hat\zeta(s_2+1)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&+\frac{1}{(s_1+2)(s_2+2)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)\hat\zeta(s_2+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(s_1+3s_2+4)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_1+2)\hat\zeta(s_2+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(s_1+3s_2+5)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&-\frac{1}{(s_1+2s_2+4)(s_1+3s_2+3)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)\hat\zeta(s_1+2s_2+3)\hat\zeta(2s_1+3s_2+5)}{\hat\zeta(s_1+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)\hat\zeta(s_1+2s_2+4)\hat\zeta(2s_1+3s_2+6)}\\
&-\frac{1}{(s_1+s_2+3)(2s_1+3s_2+4)}\frac{\hat\zeta(s_1+1)\hat\zeta(s_1+s_2+2)}{\hat\zeta(s_1+2)\hat\zeta(s_1+s_2+3)}.
\end{aligned}$$

ただし $V\otimes\mathbb{C}$ の座標 (s_1,s_2) は (2.2) のようにとってあるものとする.

ここで $s_2=0$ にそって留数をとることにより $\hat{\zeta}_1(s)$ を得る:

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_1(s)=&\frac{\hat{\zeta}(2)}{s}\hat{\zeta}(s+5)\hat{\zeta}(2s+6)-\frac{1}{2(s+3)}\hat{\zeta}(s+5)\hat{\zeta}(2s+6)\\&-\frac{1}{(s+4)(2s+4)}\hat{\zeta}(s+3)\hat{\zeta}(2s+6)-\frac{\hat{\zeta}(2)}{(s+5)}\hat{\zeta}(s+1)\hat{\zeta}(2s+5)\\&-\frac{1}{s\,(s+3)}\hat{\zeta}(s+2)\hat{\zeta}(2s+5)-\frac{1}{(s+2)(s+5)}\hat{\zeta}(s+4)\hat{\zeta}(2s+6)\\&-\frac{1}{(s+1)(2s+6)}\hat{\zeta}(s+3)\hat{\zeta}(2s+5)+\frac{1}{2(s+2)}\hat{\zeta}(s+1)\hat{\zeta}(2s+5).\end{aligned}$$

この場合 $M_1(s)=\hat{\zeta}(2)\hat{\zeta}(s+5)\hat{\zeta}(2s+6)$. また $s_1=0$ にそって留数をとることにより,

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_2(s)=&\frac{\hat{\zeta}(2)}{s}\hat{\zeta}(s+3)\hat{\zeta}(2s+4)\hat{\zeta}(3s+6)-\frac{1}{2(s+1)}\hat{\zeta}(s+3)\hat{\zeta}(2s+4)\hat{\zeta}(3s+6)\\&-\frac{1}{s(3s+5)}\hat{\zeta}(s+2)\hat{\zeta}(2s+3)\hat{\zeta}(3s+4)\\&-\frac{1}{6(s+1)(s+2)}\hat{\zeta}(s+2)\hat{\zeta}(2s+4)\hat{\zeta}(3s+5)-\frac{\hat{\zeta}(2)}{(s+3)}\hat{\zeta}(s+1)\hat{\zeta}(2s+3)\hat{\zeta}(3s+4)\\&+\frac{1}{2(s+2)}\hat{\zeta}(s+1)\hat{\zeta}(2s+3)\hat{\zeta}(3s+4)-\frac{1}{6(s+1)(s+2)}\hat{\zeta}(s+2)\hat{\zeta}(2s+3)\hat{\zeta}(3s+5)\\&-\frac{1}{(s+3)(3s+4)}\hat{\zeta}(s+2)\hat{\zeta}(2s+4)\hat{\zeta}(3s+6).\end{aligned}$$

この場合 $M_2(s)=\hat{\zeta}(2)\hat{\zeta}(s+3)\hat{\zeta}(2s+4)\hat{\zeta}(3s+6)$. ただし $\hat{\zeta}_p(s)$ $(p=1,2)$ ともに $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ との対応を見やすくするため項の順番は入れ替えていない. ここで Table 1 で「$*$」に対応する項は現れていない事に注意しておいて欲しい.

2.4. **Weng ゼータ関数の定義 2.** 既に Weng ゼータ関数 $\hat{\zeta}_p(s)$ の定義はしたものの, 定義に現れた $M_p(s)$ が明示的には定義されていないのに不満を持たれる方もいるだろう. 実際, 上のように具体例で計算する限りでは $M_p(s)$ は分かりやすいのだが, 一般論として扱うにはこのままでは具合が悪い. ここではもう少し定量的に $M_p(s)$ を定義する.

定義 4. 各 $w\in\mathfrak{W}_p$ と $(k,h)\in\mathbb{Z}^2$ に対し,

$$\begin{aligned}N_{p,w}(k,h)&=\sharp\{\alpha\in w^{-1}\Phi^-\mid\langle\lambda_p,\alpha^\vee\rangle=k,\ \mathrm{ht}\,\alpha^\vee=h\},\\N_p(k,h)&=\sharp\{\alpha\in\Phi\mid\langle\lambda_p,\alpha^\vee\rangle=k,\ \mathrm{ht}\,\alpha^\vee=h\}\end{aligned}$$

と定義する. これを用いて $M_p(k,h)$ を

$$M_p(k,h)=\max_{w\in\mathfrak{W}_p}\bigl(N_{p,w}(k,h-1)-N_{p,w}(k,h)\bigr).$$

により定義する. ただし $\mathfrak{W}_p$ は (2.5) で定義された W の部分集合.

TABLE 1

w	$\Phi_w = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^-$	λ_1	λ_2	$\mathfrak{W}_1$	$\mathfrak{W}_2$
id	$\emptyset$	λ_1	λ_2		
σ_α	α	$-\lambda_1+\lambda_2$	λ_2	$*$	
σ_β	β	λ_1	$3\lambda_1-\lambda_2$		$*$
$\sigma_{\alpha+\beta}$	$\beta,\ \alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$2\lambda_1-\lambda_2$	$3\lambda_1-2\lambda_2$		$*$
$\sigma_{2\alpha+\beta}$	$\alpha,\ \alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$-\lambda_1$	$-3\lambda_1+\lambda_2$		
$\sigma_{3\alpha+\beta}$	$\alpha,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta$	$-2\lambda_1+\lambda_2$	$-3\lambda_1+2\lambda_2$	$*$	
$\sigma_{3\alpha+2\beta}$	$\beta,\ \alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$\lambda_1-\lambda_2$	$-\lambda_2$		
$\sigma_{\pi/3}$	$\beta,\ \alpha+\beta$	$-\lambda_1+\lambda_2$	$-3\lambda_1+2\lambda_2$		$*$
$\sigma_{2\pi/3}$	$\beta,\ \alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$-2\lambda_1+\lambda_2$	$-3\lambda_1+\lambda_2$		$*$
$\sigma_\pi = w_0$	$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$		
$\sigma_{4\pi/3}$	$\alpha,\ 2\alpha+\beta,\ 3\alpha+\beta,\ 3\alpha+2\beta$	$\lambda_1-\lambda_2$	$3\lambda_1-2\lambda_2$	$*$	
$\sigma_{5\pi/3}$	$\alpha,\ 3\alpha+\beta$	$2\lambda_1-\lambda_2$	$3\lambda_1-\lambda_2$	$*$	

もし $k \geq 1$ であるか, または $h \geq 1$ ならば, $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, $\Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset$ により

$$N_{p,w}(k,h) = \sharp\{\alpha \in \Phi_w \mid \langle \lambda_p, \alpha^\vee \rangle = k,\ \mathrm{ht}\,\alpha^\vee = h\},$$
$$N_p(k,h) = \sharp\{\alpha \in \Phi^+ \mid \langle \lambda_p, \alpha^\vee \rangle = k,\ \mathrm{ht}\,\alpha^\vee = h\}$$

である. このとき次が成り立つ:

命題 1 (Komori [6]). 定義 3 の $M_p(s)$ について

$$M_p(s) = \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{h=2}^{\infty} \hat{\zeta}(ks+h)^{M_p(k,h)}.$$

これにより定義 3 は次のように書き換えられる:

定義 5. 各 $1 \leq p \leq r$ に対し,

$$\hat{\zeta}_p(s) = \omega_p(s) \prod_{k=0}^{\infty}\prod_{h=2}^{\infty} \hat{\zeta}(ks+h)^{M_p(k,h)} \tag{2.6}$$

を (Φ, Δ, p) に付随する Weng ゼータ関数と呼ぶ.

例えば G_2 について $N_{p,w}(k,h)$ $(p=1,2)$ は Table 2, 3 のようになっている. 命題 1 はこれから直接確認できるだろう. ただし表の最終列は個数

$$n_p(w) = \left|(\Phi^+ \setminus \Phi_p^+) \cap w^{-1}\Phi^-\right|$$

である (Φ_p は次節で定義する).

3. WENG ゼータ関数の性質, 及び今回の結果

3.1. Weng ゼータ関数の関数等式. ある関数が "ゼータ" を冠して呼ばれるための資格として, それが関数等式を持つことを挙げる研究者は多い. 先に定義した関数 $\hat{\zeta}_p(s)$ は

TABLE 2

$c_1 = 5$	$N_{1,w}(1,1)$	$N_{1,w}(1,2)$	$N_{1,w}(1,3)$	$N_{1,w}(1,4)$	$N_{1,w}(2,5)$	$n_1(w)$
id	0	0	0	0	0	0
$\sigma_\beta = w_1$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{\pi/3}$	0	0	0	1	0	1
$\sigma_{\alpha+\beta}$	0	0	1	1	0	2
$\sigma_{2\pi/3} = w_0\,\sigma_{\alpha+\beta}\,w_2$	0	0	1	1	1	3
$\sigma_{3\alpha+2\beta} = w_0\,\sigma_{\pi/3}\,w_2$	0	1	1	1	1	4
$\sigma_\pi = w_0$	1	1	1	1	1	5
$\sigma_{2\alpha+\beta} = w_0 w_1$	1	1	1	1	1	5

TABLE 3

$c_2 = 3$	$N_{2,w}(1,1)$	$N_{2,w}(1,2)$	$N_{2,w}(2,3)$	$N_{2,w}(3,4)$	$N_{2,w}(3,5)$	$n_2(w)$
id	0	0	0	0	0	0
$\sigma_\alpha = w_2$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{5\pi/3}$	0	1	0	0	0	1
$\sigma_{3\alpha+\beta}$	0	1	0	0	1	2
$\sigma_{4\pi/3} = w_0\,\sigma_{3\alpha+\beta}\,w_2$	0	1	1	0	1	3
$\sigma_{2\alpha+\beta} = w_0\,\sigma_{5\pi/3}\,w_2$	0	1	1	1	1	4
$\sigma_\pi = w_0$	1	1	1	1	1	5
$\sigma_{3\alpha+2\beta} = w_0 w_2$	1	1	1	1	1	5

標準的な関数等式を満たし, この意味でゼータと呼ばれるための資格を一つ有していることを述べる.

各 $1 \le p \le r$ に対し, $\Phi_p = \{\alpha \in \Phi \,|\, \langle \lambda_p, \alpha^\vee \rangle = 0\}$ は再びルート系をなし, 基本ルート系の一つは $\Delta_p = \Delta \setminus \{\alpha_p\}$ で与えられる. (もとの Φ が既約であっても Φ_p は既約とは限らない.) Δ_p に対応する Φ_p の正のルートは $\Phi_p^+ = \Phi^+ \cap \Phi_p$ であり, その Weyl 群 W_p は $\{\sigma_i \,|\, i \neq p\}$ で生成される W の部分群である.

定義 6. $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ を基本ルート系, $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ を $\Delta^\vee$ の双対基底から成る基本ウェイトとする. 各 $1 \le p \le r$ に対し c_p を

$$c_p = 2\,\langle \lambda_p - \rho_p, \alpha_p^\vee \rangle, \quad \rho_p = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_p^+} \alpha \tag{3.1}$$

で定める. 特に c_p は正の整数である.

定理 1 (Weng, Kim, Komori). 各 $1 \le p \le r$ に対し $\hat{\zeta}_p(s)$ は関数等式

$$\hat{\zeta}_p(s) = \hat{\zeta}_p(-c_p - s) \tag{3.2}$$

を満たす.

この関数等式は最初 Weng によって A_r $(1 \leq r \leq 4)$, $B_2 \simeq C_2$, G_2 の場合に $\hat{\zeta}_p(s)$ を明示的に書き下すことによって示され, 一般の場合にも成り立つことが予想された [14]. その後 Weng-Kim により一般の A_r と $p=1$ (Dynkin 図形の左端の単純ルート) の場合に証明され (in a personal communication), 最終的に Komori がこの形で証明した [6]. 一般の場合の関数等式の折り返し定数 c_p は Komori により初めて決定された.

再び G_2 の場合を例にとると, $\Phi_1 = \{\beta, -\beta\}$, $\Phi_2 = \{\alpha, -\alpha\}$ であるから, $\rho_1 = \frac{1}{2}\beta$, $\rho_2 = \frac{1}{2}\alpha$ であり, これから c_p $(p=1,2)$ が

$$c_1 = 2\langle \lambda_1 - \rho_1, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 2 - \langle \beta, \alpha \rangle = 5$$

$$c_2 = 2\langle \lambda_2 - \rho_2, \alpha_2^\vee \rangle = 2 - \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = 2 - \frac{1}{3}\langle \alpha, \beta \rangle = 3$$

と計算される. 2.3 節の $\hat{\zeta}_p(s)$ の表示から, 関数等式は直接確かめられる.

関数等式があればそれに応じた Riemann 予想の類似が成立するか否かが自然に問題になる. これについて次の結果がある.

定理 2 (Ki, Lagarias, S., Weng, [8–10], [12], [5]). ルート系 A_r $(1 \leq r \leq 4)$, $B_2 \simeq C_2$, G_2 と任意の $1 \leq p \leq r$ について, ゼータ関数 $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点はみな関数等式の中心線 $\mathrm{Re}(s) = -c_p/2$ 上にあり, しかも全て単純である.

一般にゼータ関数 $\hat{\zeta}_p(s)$ は有理式を係数にもつ Riemann ゼータ関数の積の線形結合である. したがって当初は, Bombieri-Hejhal [1] などの結果を踏まえて, 適当な意味で零点の殆ど全ては $\mathrm{Re}(s) = -c_p/2$ 上にあるにしても, $\mathrm{Re}(s) = -c_p/2$ の外に多くの例外的な零点が存在することが予想された. しかしながら驚くべきことに, この定理にあるような場合 (14 個あるが本質的には 10 個) では, そのような例外的な零点は存在しなかったのである. これは例えば [14, Appendix B] にある A_4 のゼータ関数たちの非常に長い表示を見ると, 奇跡的なことであるように思える. 当初は数値実験によって観察されたこの結果が裏付けとなって, 次の予想が立てられた.

予想. すべての既約なルート系 Φ と Δ, $1 \leq p \leq r$ について, $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点はみな関数等式の中心線 $\mathrm{Re}(s) = -c_p/2$ 上にあり, しかも単純であろう.

もしこの予想が正しいとすれば $\hat{\zeta}_p(s)$ は $\omega_\Delta^\Phi(\lambda)$ のもつ Weyl 群の対称性を相当程度受け継いでいるといって良いだろう. 今回この予想に関して次の結果が得られた.

定理 3 (Komori-Ki-S. [7]). ある (Φ, Δ, p) に依存する $\mathbb{C}$ 内の有界閉集合が存在して, その外にある $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点はすべて $\mathrm{Re}(s) = -c_p/2$ 上にあり, しかも単純である.

今回用いた方法では, この定理で述べられている有界閉集合の内側での零点の状況はよく分からない. しかしながら, この結果には個々のルート系の詳細な性質に立ち入ることなく示されるという利点がある. 昨今のランダム行列モデルを用いたゼータ関数の零点の研究によれば, 虚部が大きいゼータ関数の零点たちはある普遍的な法則に従い, 各ゼータ関数の個性は虚部の小さいところに反映されるという. これと似た状況が Weng ゼータ関数でも起っているとすれば, このような証明が可能である理由も納得できる. 逆に $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点が全て関数等式の中心線上にあることを示そうとすれば, それ

には各型のルート系の性質に対する考察が必要になることが予想される. 実際のところどうなのかは証明されてみないと分からないが.

4. 証明の方針

以下, 定理 3 の証明のあらすじを述べる. まず, 適当な多項式 $Q_p(s)$ で $Q_p(-c_p - s) = \pm Q_p(s)$ を満たすものを $\hat{\zeta}_p(s)$ にかけて整関数にしておく:

$$\xi_p(s) = Q_p(s)\,\hat{\zeta}_p(s).$$

定理 3 の立場からは"掛け過ぎ"はあまり気にしなくてよい.

証明の第 1 段階は次を満たす整関数 $\varepsilon_p(s)$ を構成することである:

$$\xi_p(s) = \varepsilon_p(s) \pm \varepsilon_p(-c_p - s). \tag{4.1}$$

ここで右辺の符号 $\pm$ は多項式 $Q_p(s)$ の次数に応じて決まる. 分解 (4.1) により, $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点の問題が $\varepsilon_p(s)$ の零点を調べることに帰着される. この利点は $\varepsilon_p(s)$ の零点を調べることの方が, もとの $\hat{\zeta}_p(s)$ の零点を調べることに比べ易しいことである. 分解 (4.1) に類似した分解は, これまでの結果 (定理 2) においても証明の第 1 段階であった.

証明の第 2 段階は (4.1) を満たすように構成した整関数 $\varepsilon_p(s)$ に対して, 次の性質を示すことである:

(1) 右半平面 $\mathrm{Re}(s) \geq -c_p/2$ における $\varepsilon_p(s)$ の零点は高々有限個.
(2) $\varepsilon_p(s)$ の全ての零点は領域 $|\mathrm{Re}(s)| \ll \log(|\mathrm{Im}(s)| + 3)$ 内にある.
(3) ある正数 $H > 0$ が存在して, $\varepsilon_p(s)$ の水平帯領域 $T < \mathrm{Im}(s) < T + H$ における零点の個数は, $T \to \infty$ のとき, 少なくとも $H \log T$ 個ある.

ここで (2) の代わりに

(2)' $\varepsilon_p(s)$ の全ての零点はある有限幅の垂直帯領域 $a < |\mathrm{Re}(s)| < b$ 内にある.

が示せたとする. その場合には (3) は不要となり, 証明が随分簡単になる. 一般の場合は [7] を見て頂くとして, ここでは (2)' が示せたとしよう. 実際, 定理 2 にあるルート系の場合にはこれが証明できる (特に例に挙げた G_2 の場合もそうである). この場合, $\xi_p(s)$ の零点が有限個を除いてみな関数等式の中心線上にあることは, 次から直ちに従う.

命題 2. 整関数 $E(z)$ が次の表示を持つとする:

$$E(s) = H(s) e^{ias} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right)\left(1 - \frac{s}{\bar{\rho}_n}\right) \right].$$

ここで $H(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > -C/2$ に重複度を込めてちょうど N 個の零点を持つ非零多項式, $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\rho_n) \leq -C/2$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で, 無限積は $\mathbb{C}$ で広義一様収束するものとする. このとき $E(s) \pm \overline{E(-C - \bar{s})}$ は $\mathrm{Re}(s) = -C/2$ の外に高々 $2N$ 個の零点しか持たない. (これらは高々 N 個の複素共役のペアである.)

実際, 第 1 段階の $\varepsilon_p(s)$ の構成と第 2 段階の (1) と (2)' から, $\varepsilon_p(s)$ がこの命題の条件を満たすことは殆ど自動的に導かれる. 命題 2 は de Bruijn [2, Lemma 2] から標準的な関数論的手法で導かれる. 証明の第 3 段階に命題 2 を用いるという方法は, 定理 2 の当初の証明を簡略化するために H. Ki により最初に導入された [5].

零点が有限個を除いて臨界線上にあることが分かってしまえば, それらはまた有限個を除いて単純であることは $\theta(t) = \arg \varepsilon_p(-c_p/2+it)$ が $|t| \to \infty$ のときに狭義単調増加であることを示せば十分である. これは臨界線上で

$$\xi_p\Big(-\frac{c_p}{2}+it\Big) = \Big|\varepsilon_p\Big(-\frac{c_p}{2}+it\Big)\Big|\,(e^{i\theta(t)} \pm e^{-i\theta(t)})$$

であることから明らかである. そして $\theta(t)$ の単調性は第1段階の $\varepsilon_p(s)$ の構成の仕方から, ガンマ関数の Stirling の公式と Riemann ゼータ関数の幾つかの古典的な評価から比較的容易に示される.

このように, 証明のポイントは整関数 $\varepsilon_p(s)$ の構成と, その構成された $\varepsilon_p(s)$ に対して第2段階の (1), (2), (3), あるいは (1), (2)' を示す所にある. さらに言えば, $\varepsilon_p(s)$ の構成法は既知の定理2の証明と Komori [6] の一般の場合の関数等式の証明を見比べれば容易に見当がつくものなので, 最も本質的な部分は第2段階の (1) を示すところにある. この部分は2.4節で導入した $N_{p,w}(k,h)$ の分布を詳しく調べることによって示される.

このような説明では殆ど証明について何も言っていないに等しいが, $\varepsilon_p(s)$ の構成や, 必要となる $N_{p,w}(k,h)$ の情報について述べるにはまだ多くの準備が必要となるので本稿はここで終えさせて頂く. 興味を持って頂けたら詳細は [7] を参照して欲しい.

References

1. Enrico Bombieri and Dennis A. Hejhal, *On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 3, 821–862. MR MR1370117 (96m:11071)
2. Nicolaas G. de Bruijn, *The roots of trigonometric integrals*, Duke Math. J. **17** (1950), 197–226. MR MR0037351 (12,250a)
3. James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978, Second printing, revised. MR MR499562 (81b:17007)
4. ______, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR MR1066460 (92h:20002)
5. Haseo Ki, *On the zeros of weng's zeta functions*, (2009), preprint.
6. Yasushi Komori, *Functional equations for Weng's zeta functions*, (2009), preprint.
7. Yasushi Komori, Haseo Ki, and Masatoshi Suzuki, *On the zeros of weng zeta functions for* (G,P), (2010), preprint.
8. Jeffrey C. Lagarias and Masatoshi Suzuki, *The Riemann hypothesis for certain integrals of Eisenstein series*, J. Number Theory **118** (2006), no. 1, 98–122. MR MR2220265 (2007c:11099)
9. Masatoshi Suzuki, *A proof of the Riemann hypothesis for the Weng zeta function of rank 3 for the rationals*, The Conference on L-Functions, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 175–199. MR MR2310295 (2008e:11102)
10. ______, *The Riemann hypothesis for Weng's zeta function of* $Sp(4)$ *over* $\mathbb{Q}$, J. Number Theory **129** (2009), no. 3, 551–579, With an appendix by Lin Weng. MR MR2488589
11. ______, *Zeros of Weng's zeta functions for* (G,P), (2010), 数理研講究録「保型形式・保型表現およびそれに伴うL函数と周期の研究」掲載予定.
12. Masatoshi Suzuki and Lin Weng, *Zeta functions for* G_2 *and their zeros*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 2, 241–290. MR MR2482116
13. Lin Weng, *A geometric approach to L-functions*, The Conference on L-Functions, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 219–370. MR MR2310297
14. ______, *Symmetries and the Riemann hypothesis*, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008, to appear.