数理解析研究所講究録
第1710巻 2010年 135-141

三角関数 $\cos z$ に似た関数
(Fucntions like $\cos z$)

立教大学 博士後期課程 1年 (Rikkyo University)
小島彰太 (Shota Kojima)

概要

三角関数 $\cos z$ に似た関数を見つけることを目的とし, 2次多項式の無限合成について調べる. ただし証明を与えることはしない.

1 導入

結果として, 三角関数 $\cos z$ が持つ次の4つの性質を持つ関数を2次多項式の無限合成で構成される関数のクラスから見つけることができた.
1. 位数1の整関数である.
2. 全ての零点が実数となる.
3. 実軸上で一様に有界である. すなわち, ある x によらない定数 M があって

$$|f(x)| \leq M \text{ for all } x \in \mathbb{R}.$$

4. 極大値, 極小値が有理数となる.
これから2次の多項式の無限合成で構成される関数について詳しく見ていくことにする. 関数の合成を見やすくするための準備として, 次の二つの定義を用意する.

定義 1.1 関数 f と g に対して,

$$f(z) \circ g(z) := f(g(z))$$

とする.

例えば,

$$(z+1) \circ (z+2) = z+3.$$

定義 1.2 文字 d, N を $N \geq d$をみたす整数とする．このとき

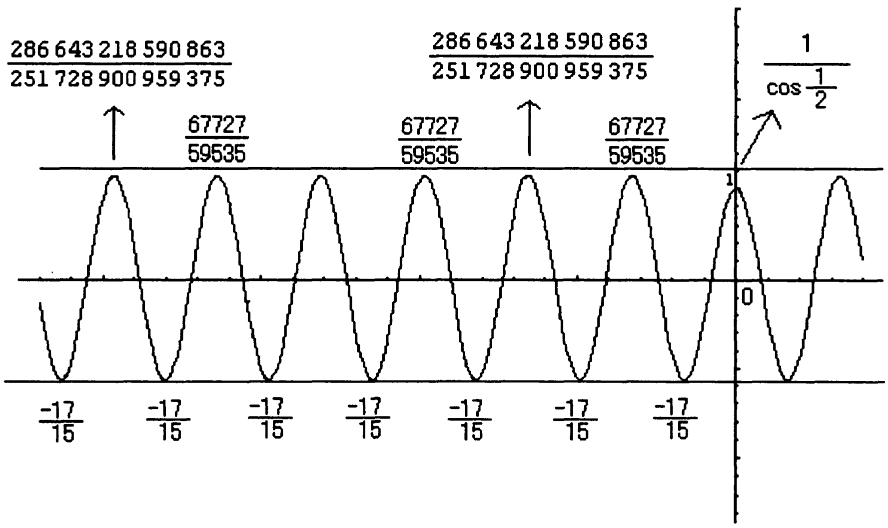
$$\begin{aligned}\mathop{\mathcal{R}}_{n=d}^{N} f_n(z): &= f_d(z)\circ f_{d+1}(z)\circ f_{d+2}(z)\circ\cdots\circ f_N(z)\\ &= f_d(f_{d+1}(\cdots f_{N-1}(f_N(z))\cdots)\end{aligned}$$

とする．

関数 $G_n(z)$ を $n \geq 1$ で

$$G_n(z) := 1 + 2\mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{\infty}\left(z + \frac{\prod_{j=n}^{r}(1-4^{-j})}{4^{r+1-n}}z^2\right).$$

によって定義したとき $G_n(-z^2)$ は, 性質 1 から 4 をみたす．そしてそのグラフは図のようになる.(波の上の数字はその極大値を指し, 波の下の数字は極小値を指す．)



図は $G_2(-z^2)$ のグラフであるがこれは $\cos(z)$ のグラフとかなり似ている．しかし図のように極大値が一定にならない．どのような規則でどのような極大値があらわれるかが決定できるがそれは後で見ることにする．そもそもなぜこのような関数を考えたのかであるがそれは次の等式による．

命題 1.1 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\cos 2z = 1 + 2\left(\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty}\left(z + \frac{z^2}{4^n}\right)\right)\circ(-z^2).$$

すなわち $G_n(z)$ は $\cos z$ を 2 次の無限合成により分解して, それぞれの因子を少し変形させたものと見ることができる．

2　2次多項式の無限合成の一般論

無限に合成させていくとなると, その収束が問題となるがそれは次の定理によって保障される.

定理 2.1 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

の収束を仮定する. このとき,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + c_n z^2\right) = \lim_{N\to\infty} \mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{N} \left(z + c_n z^2\right)$$

は $\mathbb{C}$ 上広義一様に収束し, したがって整関数となる.

例.

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty} \left(z + \frac{z^2}{n^2}\right)$$

は整関数となる.

整関数の位数は整関数を分類する重要な量であるがそれに関して次を得た.

定理 2.2 関数 $F(z)$ を

$$F(z) := \mathop{\mathcal{R}}_{r=1}^{\infty} \left(z + c_r z^2\right)$$

と定義し

$$\sum_{r=n}^{\infty} |c_r| < \infty$$

を仮定する. このとき整関数 $F(z)$ に対してその整関数としての位数を ρ とする. そして,

$$D_n := \left(\sum_{r=n}^{\infty} |c_r|\right)^{-1}$$

とおく. また

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log D_{n+1}}{\log D_n} = 0 \tag{1}$$

を仮定する. このとき

$$\rho \le \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log 2}{\log D_n}$$

が成り立つ.

整関数はマクローリン展開できる．その係数について上からの評価が次で与えられる．

定理 2.3

$$F_n(z) := \mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{\infty} \left(z + c_r z^2\right)$$

とし

$$C_n := \sum_{r=n}^{\infty} |c_r| < \infty$$

を仮定する．そして

$$F_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

によって a_m を定義する．このとき，任意の $y \in (0,1)$ に対して，

$$|a_m| \le \frac{1}{1-y} \left(\frac{C_n}{y}\right)^{m-1}.$$

また，定義から

$$a_1 = 1, \ \ a_2 = \sum_{r=n}^{\infty} c_r.$$

がすぐに従う．

3 主定理

これからは２次多項式でも一般のものでなくて，三角関数 $\cos z$ の性質を持つように特別な２次多項式の合成について考える．次の主定理によりはじめに与えた $G_n(z)$ の極大値，極小値がどのようにあらわれるかがわかる．

定理 3.1 整数 n を固定する．そして，正の実数列 $\{c_r\}_{r=n-1}^{\infty}$ に対して，

$$\sum_{r=n}^{\infty} c_r < \infty$$

を仮定し，

$$G_n(z) = 1 + 2 \mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{\infty} \left(z + \frac{c_r}{c_{n-1}} z^2\right)$$

とおく．そして，$d_r := c_{r-1}/c_r$ とし，$\mu_n(m)$ を $G_n(z)$ の零点の絶対値を小さい順に並べたときの m 番目の零点とする．また，整数列 α_m, β_m を

$$m = (2\alpha_m - 1)2^{\beta_m}$$

によって定義し，

$$A_n(m) := \frac{c_{n-1}}{c_{n-1+\beta_m}} \mu_{n+\beta_m}(\alpha_m)$$

とする．そして $d_r > 1 (r \geq n)$ と $G_n(z)$ は実零点しか持たないこと $G_n(z)$ の位数は 1 より小さいこと，さらに

$$\mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{N} \left(\frac{d_r}{2}(z^2-1)+1\right) \circ 0 > 0 \ \ (N \geq n+1),$$

$$1 - \frac{d_n}{2} < 0$$

を仮定する．このとき，不等式，

$$0 > A_n(1) > A_n(2) > \cdots > A_n(m) > \cdots \to -\infty$$

が成り立ち，

$$G_n(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{A_n(2m-1)}\right),$$

$$G_n'(z) = 2 \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{A_n(2m)}\right)$$

が成り立つ．そして，$z = x \in \mathbb{R}$ とおくとき $G_n'(x)$ の符号は次のように完全に決定できる．

$$G_n'(x) > 0 \quad (A_n(2) < x, A_n(4m+2) < x < A_n(4m)\,(m = 1, 2, 3, \ldots)),$$

$$G_n'(x) < 0 \quad (A_n(4m) < x < A_n(4m-2)\,(m = 1, 2, 3, \ldots)).$$

また，原点 0 から負の方向へ数えて，m 番目の極大値は

$$G_n(A_n(4m)) = \mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{n+1+\beta_m} \left(\frac{d_r}{2}(z^2-1)+1\right) \circ 0 \tag{2}$$

で与えられ，m 番目の極小値は

$$G_n(A_n(4m-2)) = 1 - \frac{d_n}{2}$$

で与えられる．

式 (2) は, 極大値が β_m にだけよっていることを示す. すなわち, m 番目の極大値は m が 2 で何回ちょうど割れるかできまる. 例えば, 2010 番目の波と 2 番目の波の高さは等しくなる. またこの定理で $s \geq 4$ とし $c_r = s^{-r}$ とおくとき, $G_n(z)$ は京都の講演で扱った関数 (Poincaré 関数 [1], [2], [3], [4], [5] を参照) となる. また, 最初に与えた $G_n(z)$ は $c_r = \prod_{j=1}^{r}(1-4^{-j})/4^r$ としたものである. 上の定理の条件に加え,

$$\mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{N}\left(\frac{d_r}{2}(z^2-1)+1\right)\circ 0 \ \ (N \geq n+1),$$

が有界であることを仮定すると, $G(-x^2)$ は実軸上で有界となる. 問題はこれら全ての条件を満たす列 $\{c_r\}$ が取れるかどうかであるが

$$c_r = \prod_{j=1}^{r}(1-4^{-j})/4^r$$

とすると全ての条件（定理の条件と上の有界性）を満たすことが示せる. すなわち

$$G_n(z) := 1 + 2 \mathop{\mathcal{R}}_{r=n}^{\infty}\left(z + \frac{\prod_{j=n}^{r}(1-4^{-j})}{4^{r+1-n}}z^2\right).$$

としたとき, $G_n(-z^2)$ は最初に述べた性質 1 から 4 を全て持った関数となる. 特に, $G_n(-x^2)$ は実軸上で有界であり

$$|G_n(-x^2)| \leq \frac{1}{\cos 2^{-n+1}}$$

が $n \geq 1$ の任意の自然数に対して成り立つ. また, $G_n(z)$ の位数は 定理 2.2　を用いればその位数は 1/2 を超えないことがわかり, また, 負軸上での有界性より, 1/2 以上であることがわかる. したがって $G_n(z)$ の位数は 1/2 であり, $G_n(-z^2)$ の位数は 1 となる. また

$$\omega := \prod_{n=1}^{\infty}(1-4^{-j})$$

とおくと,

$$G_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -1.$$

が成り立つ.

4 今後の課題

無限合成が次のように因数分解できたとする.

$$\mathop{\mathcal{R}}_{n=1}^{\infty}\left(z+c_n z^2\right)=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_n}).$$

このような分解を持つ c_n を見つけることは定理2.2 から難しくない. そして, 両辺の z^2 の係数を見ることにより,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z_n}$$

を得る. ここで右辺の零点同士に関係があればこの等式は面白くなる. 例えば, $z_n=n^2 z_1$ のような関係式があれば右辺に $\zeta(2)$ があらわれる. したがって零点について詳しく見ていく事で等式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

の類似が得られることを期待する.

参考文献

[1] Gregory Derfel, Peter J. Grabaner and Fritz Vogl: Complex asymptotics of Poincaré functions and properties of Julia sets, Math Proc Camb Phil Soc, Volume 145, Issue 03, November 2008, pp 699-718

[2] M. R. S. Kuhenović, Orlando Merino : Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica, Chapman & Hall , 2002 , 65-66.

[3] H. Poincaré : Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes, J. Math. Pures Appl. IV. Ser. 6 (1890), 313-365.

[4] N. Steinmetz : Rational Iteration, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[5] G. Valiron : Fonctions analytiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1954.