数理解析研究所講究録
第 1710 巻 2010 年 217-227

Weighted multiple zeta values via higher Mahler measure

近畿大学大学院総合理工学研究科　佐々木　義卓 (Yoshitaka Sasaki)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Kinki University

1 序論

Mahler 測度は, Laurent 多項式 $P\in\mathbb{C}[X_1^{\pm},\ldots,X_n^{\pm}]\setminus\{0\}$ に対して,

$$m(P):=\int_0^1\cdots\int_0^1\log|P(e^{2\pi it_1},\ldots,e^{2\pi it_n})|\,dt_1\cdots dt_n \tag{1.1}$$

によって定義されるものである. Mahler 測度は, 超越数論への応用として, Mahler [13] により導入された*1. Mahler 測度の研究において, 非常に興味深い結果は,

$$m(1+X+Y)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(2,\chi_{-3}),$$
$$m(1+X+Y+Z)=\frac{7}{2\pi^2}\zeta(3)$$

といった Mahler 測度とゼータ関数, L 関数の特殊値との関係である. 上記の結果は, Smyth [21] による. さらに, Deninger [2] により, n 変数の整数係数 Laurent 多項式 $P(X_1,\ldots,X_n)$ が n 次元トーラス $\mathbb{T}^n:=\{(X_1,\ldots,X_n)\in\mathbb{C}^n\mid|X_1|=\cdots=|X_n|=1\}$ 上に零点を持たないとき, $m(P)$ は, 混合モチーフの Deligne 周期であることが示されるなど, 現在では, 多くの分野と関連する重要な研究対象となっている. 最近の研究結果については, [1], [19], [7], [9], [11], [10] およびそれらの参考文献等を参照されたい. また, [25] では, 上記のことも含めた Mahler 測度に関連する研究結果が多く紹介されている.

本稿のメインテーマは, 最近, 黒川・Lalín・落合 [8] によって与えられた Mahler 測度の一般化である**多重高次 Mahler 測度**である. 多重高次 Mahler 測度は, Laurent 多項式 $P_1,\ldots,P_l\in\mathbb{C}[X_1^{\pm},\ldots,X_n^{\pm}]\setminus\{0\}$ に対して,

$$m(P_1,\ldots,P_l):=\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{q=1}^{l}\log|P_q(e^{2\pi it_1},\ldots,e^{2\pi it_n})|\,dt_1\cdots dt_n$$

*1 Mahler 以前に, すでに Lehmer [12] が, 一変数多項式に関する (1.1) を扱っていたが, Lehmer の動機は, Mahler とは全く異なるものであった.

で定義される. 便宜上, $\mathscr{P}=\{P_1,\ldots,P_l\}$ としたとき, $m(\mathscr{P})$ は $m(P_1,\ldots,P_l)$ を意味するものとする. さて, この多重高次 Mahler 測度はどのような数学的意味を有しているのであろうか. 本稿では, Witten ゼータ関数の特殊値を通して, ある多項式族に関する多重高次 Mahler 測度が, あるモジュライ空間の体積として解釈できることを述べる. Witten ゼータ関数は, 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g})=\sum_{\varphi}(\dim\varphi)^{-s} \tag{1.2}$$

で定義されるものである. ここで φ は, $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現全体をわたる. Witten [27] は, 量子ゲージ理論の研究において, 上記のゼータ関数を導入し, 正偶数点での特殊値を通して, あるモジュライ空間の体積を計算している. さらに, Zagier [26] は, Witten の結果を用いれば,

$$\zeta_W(2k;\mathfrak{g})\in\mathbb{Q}\pi^{2kl}\qquad(k\in\mathbb{N}) \tag{1.3}$$

であることを指摘している. (1.3) は, **Witten の体積公式** (*Witten's volume formula*) と呼ばれ, l は $\mathfrak{g}$ の正のルートの個数を意味する. したがって, 多重高次 Mahler 測度と Witten ゼータ関数の特殊値との関係を与えることは, 多重高次 Mahler 測度に, あるモジュライ空間の体積としての解釈を与えることになる.

本稿では, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(3)$ の場合を中心に議論する. Weyl の次元公式を用いれば, $\mathfrak{sl}(3)$ に付随する Witten ゼータ関数は,

$$\zeta_W(s;\mathfrak{sl}(3))=2^s\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^sn^s(m+n)^s} \tag{1.4}$$

となる. 松本 [14] は, この多変数版, すなわち,

$$\zeta_{MT}(s_1,s_2,s_3):=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}} \tag{1.5}$$

を導入し, その解析接続を行った*2. この 2 重級数 (1.5) を最初に考えたのは Tornheim [22] で, (1.5) は, Tornheim の 2 重和 (もしくは 2 重級数)*3 と呼ばれる. また, $\mathfrak{sl}(3)$ に付随する Witten ゼータ関数 (1.4) はその特別な場合となっており, この場合の正偶数点での特殊値に関しても, Witten 以前に, Mordell [17] によって研究されている. 本稿では, 後者の多変数版を扱う.

*2 [14] では, (1.5) は, Mordell-Tornheim ゼータ関数として導入されている.
*3 Tornheim [22] は, 調和 2 重級数 (harmonic double seires) と呼んでいる.

次節で $\mathfrak{sl}(3)$ の場合に関する結果を述べ, その証明を具体例を通して第 3 節で述べる. 第 4 節では, 一般の半単純 Lie 代数に付随する多変数 Witten ゼータ関数に関する結果を述べる. 第 5 節では, 第 4 節で与えた定理の具体例をいくつか与える.

2 $\mathfrak{sl}(3)$ (A_2) の場合

定理を述べる前に, いくつか記号を導入する.

記号 2.1 与えられた正整数 s_1, s_2, s_3 $(\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3))$ に対して, 多項式を

$$X_j^{(l_j)} := 1 - x_j^{(l_j)}, \qquad Z_j := 1 - z\prod_{l_j=2}^{s_j} x_j^{(l_j)} \qquad \text{for } j = 1, 2 \text{ and } l_j = 2, \ldots, s_j,$$

$$Y^{(l)} := 1 - y^{(l)}, \qquad \widetilde{Z} := 1 - z\prod_{l=2}^{s_3} y^{(l)} \qquad \text{for } l = 2, \ldots, s_3$$

とする. また, それらによる多項式族を

$$\mathscr{P}(\mathbf{s}, \mathfrak{sl}(3)) = \left\{ \bigcup_{j=1,2} \left\{ Z_j \cup \{X_j^{(l_j)}\}_{l_j=2}^{s_j} \right\} \right\} \cup \left\{ \widetilde{Z} \cup \{Y^{(l)}\}_{l=2}^{s_3} \right\}$$

とする.

そのとき, 次が成り立つ.

定理 2.2 任意の正整数 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ に対して,

$$m(\mathscr{P}(\mathbf{s}; \mathfrak{sl}(3))) = \frac{(-1)^{S_3}}{2^{S_3-1}} \left(\zeta_{MT}(s_1, s_2, s_3) + \zeta_{MT}(s_2, s_3, s_1) + \zeta_{MT}(s_3, s_1, s_2) \right) \tag{2.1}$$

が成り立つ. ここで, $S_3 = \sum_{j=1}^{3} s_j$ である.

定理 2.2 の右辺のインデックスには, 対称群の作用が確認できる. 実際, このインデックスに対する群作用は, A_2 の Weyl 群の作用として解釈されることを示すことができる.

中村 [18] により,

(2.2)

$$\begin{aligned}
&\zeta_{MT}(a, b, s) + (-1)^b \zeta_{MT}(b, s, a) + (-1)^a \zeta_{MT}(s, a, b) \\
&= \frac{2}{a!b!} \sum_{k=0}^{\max(a,b)/2} \left\{ a\binom{b}{2k} + b\binom{a}{2k} \right\} (a+b-2k-1)!(2k)!\zeta(2k)\zeta(a+b+s-2k),
\end{aligned}$$

が与えられている．ただし，この式は，自然数 a, b および特異点を除いた複素数 s に対して成り立つ．$\zeta(n)$ は Riemann ゼータ値である．この式を用いると，定理 2.2 は，次のように書くこともできる．

系 2.3 正の偶数 s_1, s_2 に対して，

$$m(\mathscr{P}(\mathrm{s}; \mathfrak{sl}(3))) = \frac{(-1)^{s_3}}{2^{S_3-2} s_1! s_2!} \sum_{k=0}^{\max(s_1,s_2)/2} \left\{ s_1 \binom{s_2}{2k} + s_2 \binom{s_1}{2k} \right\} \times (s_1+s_2-2k-1)!(2k)!\zeta(2k)\zeta(s_1+s_2+s_3-2k)$$

が成り立つ．

注意 2.4 中村が (2.2) を示す以前に，(2.2) と同様の公式が，津村 [24] により与えられている．

例 2.5

1. $(s_1, s_2, s_3) = (2, 1, 1)$

$$\begin{aligned} m(1-xz, 1-z, 1-x, 1-z) &= \frac{1}{8}\Big(2\zeta_2(2,1,1;\mathfrak{sl}(3)) + \zeta_2(1,1,2;\mathfrak{sl}(3))\Big) \\ &= \frac{3}{8}\zeta(4) = \frac{\pi^4}{240}. \end{aligned}$$

2. $(s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 2)$

$$m(1-x_1z, 1-x_2z, 1-x_1, 1-x_2, 1-yz, 1-y) = \frac{3}{32}\zeta_{MT}(2,2,2) = \frac{\pi^6}{30240}.$$

3. $(s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 3)$

$$\begin{aligned} &m(1-x_1z, 1-x_2z, 1-x_1, 1-x_2, 1-y^{(2)}y^{(3)}z, 1-y^{(2)}, 1-y^{(3)}) \\ &= -\frac{1}{64}\Big(2\zeta_{MT}(3,2,2) + \zeta_{MT}(2,2,3)\Big) = -\frac{1}{32}\Big(-3\zeta(7) + 2\zeta(2)\zeta(5)\Big). \end{aligned}$$

3 定理 2.2 の (具体例の) 証明

$(s_1, s_2, s_3) = (2, 1, 1)$ の場合の証明を記載する．次の 2 つの性質に注意する．

$$\log|1-\mathbf{e}(t)| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi tn)}{n},$$

$$\prod_{j=1}^{\nu} \cos\alpha_j = \frac{1}{2^\nu} \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_\nu)\in\{\pm1\}^\nu} \cos\Big(\sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j\alpha_j\Big),$$

ここで, $\mathbf{e}(t)=e^{2\pi it}$. したがって,

$$(3.1)\qquad m(1-xz,1-z,1-x,1-z)$$
$$=\frac{(-1)^4}{2^4}\sum_{(\sigma_0,\ldots,\sigma_3)\in\{\pm1\}^4}\int_0^1\int_0^1\sum_{m_0,\ldots,m_3=1}^{\infty}\frac{1}{m_0\cdots m_3}$$
$$\times\cos\Bigl(2\pi\Bigl(t\bigl(\sigma_0m_0+\sigma_2m_2\bigr)+s\bigl(\sigma_0m_0+\sigma_1m_1+\sigma_3m_3\bigr)\Bigr)\Bigr)\,dtds.$$

t に関して積分を実行する際,

$$\int_0^1\cos\Bigl(2\pi t\bigl(\sigma_0m_0+\sigma_2m_2\bigr)+\Theta\Bigr)\,dt$$
$$=\begin{cases}\cos\Theta & (\sigma_0,\sigma_2)=(1,-1),(-1,1)\text{ および }m_0=m_2\text{ のとき},\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

に注意すれば, (3.1) の右辺は,

$$\frac{1}{2^4}\sum_{(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_3)\in\{\pm1\}^3}\int_0^1\sum_{m_0,m_1,m_3=1}^{\infty}\frac{\cos\bigl(2\pi s\bigl(\sigma_0m_0+\sigma_1m_1+\sigma_3m_3\bigr)\bigr)}{m_0^2m_1m_3}\,ds.$$

同様の理由により,

$$m(1-xz,1-z,1-x,1-z)$$
$$=\frac{1}{2^4}\sum_{(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_3)\in\{\pm1\}^3}\sum_{\substack{m_0,m_1=1,\\ \sigma_3(\sigma_0m_0+\sigma_1m_1)>0}}^{\infty}\frac{1}{m_0^2m_1(\sigma_3(\sigma_0m_0+\sigma_1m_1))}$$
$$=\frac{1}{2^4}\sum_{(\sigma_0,\sigma_1,\sigma_3)\in\{\pm1\}^3}\sum_{\substack{\sigma_0m_0,\ \sigma_1m_1>0,\\ \sigma_3(m_0+m_1)>0}}\frac{1}{(\sigma_0m_0)^2(\sigma_1m_1)(\sigma_3(m_0+m_1))}$$
$$=\frac{1}{2^4}\sum_{\sigma_3\in\{\pm1\}}\sum_{\substack{m_0\neq0,m_1\neq0,\\ \sigma_3(m_0+m_1)>0}}\frac{(\operatorname{sgn}m_0)^2(\operatorname{sgn}m_1)}{m_0^2m_1(\sigma_3(m_0+m_1))}.$$

最後の条件, $\sigma_3(m_0+m_1)>0$ は, $\operatorname{sgn}\sigma_3=\operatorname{sgn}(m_0+m_1)$ を意味しているので,

$$m(1-xz,1-z,1-x,1-z)$$
$$=\frac{1}{2^4}\sum_{\substack{m_0\neq0,m_1\neq0,\\ m_0+m_1\neq0}}\frac{(\operatorname{sgn}m_0)^2(\operatorname{sgn}m_1)(\operatorname{sgn}(m_0+m_1))}{m_0^2m_1(m_0+m_1)}$$
$$=\frac{1}{2^4}\sum_{\substack{m_0\neq0,m_1\neq0,\\ m_0+m_1\neq0}}\frac{1}{|m_0^2m_1(m_0+m_1)|}$$
$$=\frac{1}{2^4}\Bigl\{2\bigl(2\zeta_{MT}(2,1,1)+\zeta_{MT}(1,1,2)\bigr)\Bigr\}$$

となり, 定理の $(s_1,s_2,s_3)=(2,1,1)$ の場合を得る. $\square$

4 多変数 Witten ゼータ関数

ここでは, 与えられたランク r の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する多変数 Witten ゼータ関数の定義を述べ, その正整数点での特殊値と多重高次 Mahler 測度との関係を述べる.

半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する Witten ゼータ関数 (1.2) は, Weyl の次元公式を用いると, $\mathfrak{g}$ のルート系の言葉で記述することが出来る. この観点から, 松本・津村 [16] によって A_r 型に関する多変数 Witten ゼータ関数が定義され, 一般の $\mathfrak{g}$ に関する多変数 Witten ゼータ関数は, 小森・松本・津村 [4] によって定義された. 以下では, 小森・松本・津村の方法にしたがって, 多変数 Witten ゼータ関数の定義を述べる (詳細に関しては, [16], [4], [3] を参照のこと).

$\mathfrak{g}$ のルート系を Δ, その正 (負) のルート全体を Δ_+ (Δ_-), Δ の基本ルート系を $\Pi := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ とする. さらに, $\alpha \in \Delta$ のコルートを $\alpha^\vee$ で表すとする. そのとき, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を, $\langle \alpha_i^\vee, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ (Kronecker's delta) を満たす基本ウェイトとする.

$$P_{++} := \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}_{\geq 1} \lambda_j$$

としたとき, $\mathfrak{g}$ に付随する多変数 Witten ゼータ関数を

$$\begin{aligned}\zeta_r(\mathbf{s}; \mathfrak{g}) &:= \sum_{\lambda \in P_{++}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle^{-s_\alpha} \\ &= \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \prod_{\alpha_l \in \Pi} m_l^{-s_{\alpha_l}} \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Pi} \left(\sum_{j=1}^{r} C_{\alpha,j} m_j \right)^{-s_\alpha}\end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義する. ここで, $C_{\alpha,j}$ ($:= \langle \alpha^\vee, \lambda_j \rangle$) は, $\alpha \in \Delta_+ \setminus \Pi$ と λ_j に依存する非負整数で, $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+} \in \mathbb{C}^n$ ($n = |\Delta_+|$) である. $\mathfrak{g}$ が X_r ($X = A, B, C, D, E, F, G$) 型ならば, そのときは, $\zeta_r(\mathbf{s}; \mathfrak{g})$ の代わりに $\zeta_r(\mathbf{s}; X_r)$ とも記述する. また, Witten ゼータ関数 (1.2) は, (4.1) を用いて

$$\zeta_W(s; \mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \zeta_r(\underbrace{s, \ldots, s}_{n}; \mathfrak{g})$$

と書ける. ここで, $K(\mathfrak{g}) := \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \rangle$ である.

注意 4.1 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$ のとき, $\zeta_2(s_1, s_2, s_3; \mathfrak{sl}(3)) = \zeta_{MT}(s_1, s_2, s_3)$ である.

多変数 Witten ゼータ関数の特殊値と, 多重高次 Mahler 測度との関係を述べる前に, いくつか記号を導入する.

記号 4.2 与えられた半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $\mathbf{s}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}\in\mathbb{N}^n$ および $\alpha\in\Pi$ に対して,

$$X_\alpha^{(l_\alpha)}:=1-x_\alpha^{(l_\alpha)}\qquad\text{for } l_\alpha=2,\ldots,s_\alpha,$$
$$Z_\alpha:=1-\prod_{l_\alpha=2}^{s_\alpha}x_\alpha^{(l_\alpha)}\prod_{\beta\in\Delta_+\setminus\Pi}z_\beta^{C_{\beta,\alpha}}$$

とおく. ここで, $\alpha=\alpha_j\in\Pi$ に対して $C_{\beta,\alpha}=C_{\beta,j}$ を意味している. さらに, $\beta\in\Delta_+\setminus\Pi$ に対して,

$$Y_\beta^{(l_\beta)}:=1-y_\beta^{(l_\beta)}\qquad\text{for } l_\beta=2,\ldots,s_\beta,$$
$$\widetilde{Z}_\beta:=1-z_\beta\prod_{l_\beta=2}^{s_\beta}y_\beta^{(l_\beta)}$$

とおく. そのとき, それらによる多項式族を

$$\mathscr{P}(\mathbf{s};\mathfrak{g})=\mathscr{P}(\mathbf{s};X_r):=\left\{\bigcup_{\alpha\in\Pi}\left\{Z_\alpha\cup\{X_\alpha^{(l_\alpha)}\}_{l_\alpha=2}^{s_\alpha}\right\}\right\}\cup\left\{\bigcup_{\beta\in\Delta_+\setminus\Pi}\left\{\widetilde{Z}_\beta\cup\{Y_\beta^{(l_\beta)}\}_{l_\beta=2}^{s_\beta}\right\}\right\}$$

とおく.

以上の記号を用いると,

定理 4.3 (佐々木 [20]) $\Delta_+\setminus\Pi\neq\emptyset$ とする. そのとき, 正整数 $\mathbf{s}=(s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+}=(s_j)_{j=1}^n$ に対して, 次が成り立つ.

$$m(\mathscr{P}(\mathbf{s};\mathfrak{g}))=m(\mathscr{P}(\mathbf{s};X_r))=\frac{(-1)^{S_n}}{2^{S_n}}\sum_{w\in W}\zeta_r(w\mathbf{s};\mathfrak{g}),\tag{4.2}$$

ここで, $S_n:=\sum_{j=1}^n s_j$, W は X_r の Weyl 群であり, $w\mathbf{s}$ は Weyl 群の作用 $w\mathbf{s}=(s_{w^{-1}(\alpha)})_{\alpha\in\Delta_+}$ を意味する.

注意 4.4 変数の添字においてのみ, 正のルートと負のルートを同一視する. すなわち, $\alpha\in\Delta_+$ に対して, $s_\alpha=s_{-\alpha}$ と解釈する.

5 具体例

5.1 B_2 および C_2 の場合

B_2 (C_2) 型に付随する多変数 Witten ゼータ関数は,

$$\zeta_2(s_1,s_2,s_3,s_4;B_2):=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}}\tag{5.1}$$

である*4. B_2 (C_2) 型に対応する多項式は, $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{N}^4$ に対して,

$$X_j^{(l_j)} := 1 - x_j^{(l_j)} \quad Z_j := 1 - \prod_{l_j=2}^{s_j} x_j^{(l_j)} \prod_{i=3,4} z_i^{C_{i,j}} \quad j = 1,2 \text{ および } l_j = 2, \ldots, s_j,$$

$$Y_i^{(l_i)} := 1 - y_i^{(l_i)} \quad \widetilde{Z}_i := 1 - z_i \prod_{l_i=2}^{s_i} y_i^{(l_i)} \quad i = 3,4 \text{ および } l_i = 2, \ldots, s_i$$

であり,

$$C_{i,j} = \begin{cases} 2 & (i,j) = (4,2), \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. そのとき, B_2 (C_2) 型に関する定理 4.3 は, 次のようになる.

定理 5.1 任意の正整数 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ に対して, 次が成り立つ.

$$m(\mathscr{P}(\mathbf{s}; B_2)) = \frac{(-1)^{S_4}}{2^{S_4-1}} \Big(\zeta_2(s_1, s_2, s_3, s_4; B_2) + \zeta_2(s_1, s_3, s_2, s_4; B_2) + \zeta_2(s_4, s_3, s_2, s_1; B_2) + \zeta_2(s_4, s_2, s_3, s_1; B_2) \Big), \tag{5.2}$$

ここで, $S_4 = \sum_{j=1}^{4} s_j$.

例 5.2

1. $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (1, 2, 1, 1)$

$$m(1 - z_3 z_4, 1 - x_2 z_3 z_4^2, 1 - x_2, 1 - z_3, 1 - z_4)$$
$$= -\frac{1}{2^4} \{ 2\zeta_2(1,2,1,1; B_2) + 2\zeta_2(1,1,2,1; B_2) \} = -\frac{1}{2^4} \Big\{ -3\zeta(5) + \frac{\pi^2}{3}\zeta(3) \Big\},$$

なぜなら, [23, p. 151] のリストから次が知られている.

$$\zeta_2(1,2,1,1; B_2) = -\frac{13}{8}\zeta(5) + \frac{\pi^2}{6}\zeta(3), \qquad \zeta_2(1,2,1,1; B_2) = \frac{1}{8}\zeta(5)$$

2. $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (2, 2, 2, 2)$

$$m(1 - x_1 z_1 z_2, 1 - x_2 z_1 z_2^2, 1 - x_1, 1 - x_2, 1 - z_1 y_1, 1 - z_2 y_2, 1 - y_1, 1 - y_2)$$
$$= \frac{\zeta_2(2,2,2,2; B_2)}{2^5} = \frac{\pi^8}{9676800},$$

なぜなら, $\zeta_2(2,2,2,2; B_2) = \pi^8/302400$ が知られている ([5, (7.23)], [3, (2.9)] 参照).

---

*4 多変数版である (5.1) は, [15] で, 松本によって導入された.

5.2 G_2 の場合

G_2 型に付随する多変数 Witten ゼータ関数は,

$$\zeta_2(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6;G_2) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}(m+2n)^{s_4}(m+3n)^{s_5}(2m+3n)^{s_6}}.$$

である (詳細については, [6] を参照のこと). G_2 型に対応する多項式は, $(s_1,\dots,s_6)\in\mathbb{N}^6$ に対して,

$$X_j^{(l_j)} := 1 - x_j^{(l_j)}, \quad Z_j := 1 - \prod_{l_j=2}^{s_j} x_j^{(l_j)} \prod_{i=3}^{6} z_i^{C_{i,j}} \qquad j=1,2 \text{ および } l_j = 2,\dots,s_j,$$

$$Y_i^{(l_i)} := 1 - y_i^{(l_i)}, \quad \widetilde{Z}_i := 1 - z_i \prod_{l_i=2}^{s_i} y_i^{(l_i)} \qquad i=3,\dots,6 \text{ および } l_i = 2,\dots,s_i$$

であり,

$$C_{i,j} = \begin{cases} 3 & (i,j) = (5,2),(6,2), \\ 2 & (i,j) = (6,1),(4,2), \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. そのとき, G_2 型に関する定理 4.3 は, 次のようになる.

定理 5.3 任意の正整数 $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_6)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}(5.3)\quad m(\mathscr{P}(\mathbf{s};G_2)) = \frac{(-1)^{S_6}}{2^{S_6-1}}\{&\zeta_2(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6;G_2) + \zeta_2(s_6,s_3,s_4,s_2,s_1,s_5;G_2)\\ &+ \zeta_2(s_6,s_4,s_3,s_2,s_5,s_1;G_2) + \zeta_2(s_5,s_4,s_2,s_3,s_6,s_1;G_2)\\ &+ \zeta_2(s_5,s_2,s_4,s_3,s_1,s_6;G_2) + \zeta_2(s_1,s_3,s_2,s_4,s_6,s_5;G_2)\}.\end{aligned}$$

例 5.4 $(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6) = (2,2,2,2,2,2) =: (\mathbf{2})$ のとき,

$$m(\mathscr{P}((\mathbf{2});G_2)) = \frac{3}{1024}\zeta_2((\mathbf{2});G_2) = \frac{23}{101684758855680}\pi^{12},$$

なぜなら, $\zeta_2((\mathbf{2});G_2) = 23\pi^{12}/297904566960$ ([6] 参照).

謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である津村博文先生に感謝申し上げます. また, 本稿を執筆するにあたり, 小森靖先生, 松本耕二先生, 津村博文先生から多くのご助言を頂きました. ここに深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] D. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experiment. Math. **7** (1998), 37–82.

[2] C. Deninger, *Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain $\mathbb{Z}^n$-actions*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), 259–281.

[3] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Zeta functions of root systems*, in "The Conference on L-Functions", L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Sci. Publ., 2007, pp. 115–140.

[4] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras* II, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[5] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras* III, preprint.

[6] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras* IV, to appear in Glasgow Math. J.

[7] N. Kurokawa and H. Ochiai, *Mahler measures via the crystalization*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **54** (2005), 121–137.

[8] N. Kurokawa, M. Lalín and H. Ochiai, *Higher Mahler measures and zeta functions*, Acta Arith. **135** (2008), 269–297.

[9] M. N. Lalín, *An algebraic integration for Mahler measure*, Duke Math. J. **138** (2007), 391–422.

[10] M. N. Lalín, *On a conjecture by Boyd*, to appear in Int. J. Number Theory.

[11] M. N. Lalín and M. D. Rogers, *Functional equations for Mahler measures of genus-one curves*, Algebra Number Theory **1** (2007), 87–117.

[12] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. of Math. (2) **34** (1933), 461–479.

[13] K. Mahler, *On some inequalities for polynomials in several variables*, J. London Math. Soc. (2) **37** (1962), 341–344.

[14] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in 'Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory', M. A. Bennett et al (eds.), A K Peters, 2002, pp. 417-440.

[15] K. Matsumoto, *On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions*, Proceedings of the Session in analytic number theory and Diophantine equations (Bonn, January-June 2002), D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Mathematische Schriften Nr. 360, Bonn 2003, n.25, 17pp.

[16] K. Matsumoto and H. Tsumura, *On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras* I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 1457–1504.

[17] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc. **33** (1958), 368–371.

[18] T. Nakamura, *A functional relation for the Tornheim double zeta function*, Acta Arith.

125 (2006), 257–263.

[19] F. Rodriguez-Villegas, *Modular Mahler measures.* I, in "Topics in number theory", University Park, PA, 1997, Math. Appl., vol. 467, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1999, pp. 17–48.

[20] Y. Sasaki, *On multiple higher Mahler measures and Witten zeta values associated semisimple Lie algebras*, preprint.

[21] C. J. Smyth, *On measures of polynomials in several variables*, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981), 49–63.

[22] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math. **72** (1950), 303–314.

[23] H. Tsumura, *On Witten's type of zeta values attached to* $SO(5)$, Arch. Math. (Basel) **82** (2004), 147–152.

[24] H. Tsumura, *On functional relations between the Mordell-Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **142** (2007), 395–405.

[25] 植田 一石, ドミノによるタイル張り, 第 2 回城崎新人セミナー報告集.

[26] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Math., Paris, Vol. II, Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497–512.

[27] E. Witten, *On quantum gauge theories in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), 153–209.