

「専門基礎としての数学」とは何か

— 教育数学の必要性 —

三重大学教育学部 蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)

Faculty of Education, Mie University

鳥羽商船高等専門学校 佐波 学 (Manabu Sanami)

Toba National College of Maritime Technology

はじめに

RIMS 共同研究の主題である「数学教師に必要な数学能力」に関する考察を通じて、筆者たちが得た結論は、「数学教師に必要な数学能力を、ひとことで述べるなら、“教育的観点から数学を捉えることのできる”能力である」ということだった ([6]).

本稿の目的は、この「教育的観点から数学を捉える」ということが、教員養成以外の文脈においても重要な役割を果たすことを示し、さらには、こうした姿勢で数学の教育や数学それ自体にも臨むことの必要性を論じることである。

本稿では、共同研究の直接的な目標から少し離れて、「専門基礎としての数学」を考察の対象とする。

数学は理工系学科の基礎か

「数学は理工系学科の基礎である」と言われる。

理工系の著作物の多くは“数学の言葉”を用いており、そういう意味では、確かに正しい言明であろう。その一方で、大学での数学の基礎教育

を担当する数学者に対して、理工系学科の関係者の「数学者の教える数学は役に立たない」といった声を耳にすることがある。

なぜ、このような事態が起こるのだろうか。

仮に、「数学者の教える数学は理学や工学の役に立たない」ことが真実であったとしよう。それでは、科学者や工学者が学生に数学を教えれば、問題は解決するのだろうか。

この問いは、少なくとも、二つの問題を含んでいる。ひとつは、「数学者の教える数学」と「科学者や工学者が自身の専門分野で用いる数学」が同じなのかどうかという問題であり、他方は、ある分野で“基礎”として必要な数学は、誰が教えるのが良いか（適しているか）という問題である。

専門基礎としての数学

「数学」は多様な側面を持っている。「学問の一分野としての数学」と、「自然科学や工学の諸分野の基礎としての数学」は、歴史という時間軸の一点で横断してみれば、確かに、異なる「数学」の様相を見せるかもしれない。しかし、時間の中を広くとり、過去や未来を考えてみると、両者の関係は同じような差異を見せるだろうか。

数学という学問の発展は、内在的にだけでなく、他領域で用いられる“数学”を取り込み、開発することでなされてきた。それゆえ、翻って、他領域の「専門基礎としての数学」の在り方を考えることは、学問としての数学にとっても、有益でもありまた必要でもあるだろう。

教育との関係

数学者が「専門基礎としての数学」のありかたを知ることと、数学者が「専門基礎としての数学」を教えることには、本質的なつながりがある。これが、筆者たちの基本的な認識である。端的に述べれば、「専門基礎としての数学を“教育的観点から”眺めることで、そのありかたを明らかにできる」という機構が存在しうると考えている。

教育数学について

上述のように，“教育的な観点から捉えようとする姿勢”で数学に臨むことを，我々は，「教育数学」という言葉で表現する．同時に，同じ「教育数学」という言葉で，「教育的観点から臨むことで生み出される数学に関する諸々の結果」の総称ともすることを，提唱したい¹．

この言葉を用いれば，本稿の主張は，次のようにまとめることが出来る．「専門基礎としての数学」が何であるかを明確化するためには，「教育数学」が必要であるのだ，と．

構成

本稿の構成は，次の通りである．

第1章は，「専門基礎としての数学」を定位することの重要性と，そのありかたの明確化のために「教育」が果たす役割について述べる．そして，「数学者による数学教育不要論」に対するひとつの回答を提示してみる．第2章は，議論がいたずらに抽象的になるのを避けるため，「工業静力学」という具体的な分野を採り，そこでの微分や積分の用法と，現在大学等で教えられている微分積分学との比較をおこなう．第3章では，こうした問題の考察における「教育数学」の必要性について論じる．最後に，「専門基礎としての数学」よりも一般的な文脈において，“教育数学の機能”が何であり，あるいは，何であるべきかについて論じることで，結びにかえることにした．

なお，付録では，第2章の議論の前提として，工業静力学の代表的な教科書における微分や積分の用例についてまとめてある．

1 「専門基礎としての数学」のありかた

1.1 「数学」は理工系学科の基礎か

「数学は自然科学や工学の基礎である」といわれることがある．これは，しばしば，数学学習の必要性の理由として挙げられるものでもある．

¹鍋島信太郎氏による「教育数学」という言葉の使用例があるが，本稿のそれとは独立なものである．詳細は [6] を参照のこと．

この言明は、実際には何を意味しているのだろうか。「数学のすべての分野は、理工系のあらゆる分野で基礎をなす」というのは無理であろうし、「数学のある特定の分野が、理工系のしかるべき分野の基礎になっている」ということは十分に正しそうだ。もっとも、これも、「微分積分学が工業静力学の基礎である」といった具体的な言明になると、そもそも「基礎」とはどういう意味かというような概念規定や、真偽の判定の仕方など、なかなか難しそうでもある。

はたして、「数学は理工系の基礎だ」という言明は、「だからしっかり勉強しなさい」ということ以上の意味をもっているのだろうか。

「数学者による数学教育」不要論

大学工学部の教育現場において、しばしば、次のような見解が（非公式に）囁かれているという。曰く、「大学の基礎課程で数学者の教える数学は、工学の役に立たない」、「数学者の書いた数学の教科書（テキスト・ブック）は、工学の役に立たない」（同工異曲に、「物理学者の書いた力学の本は工学の役に立たない」というのもあるらしい）、「工学部の学生への数学の教育は、数学の教員ではなく、工学部の教員が行った方が良い」等々²である。

こうした見解は、主として“数学の使用者”である工学者の側から出てくるのだが、この声に対して、批判される側である“数学者”は、何と答えればよいのだろうか。

1.2 専門基礎としての数学

「数学」という言葉で表わされる営みは、多様な側面をもつ。

まずは、学問の一領域としての「数学」がある。通常、「数学者」と呼ばれるのは、この“数学”の研究に携わる人々のことである。

また、他の領域の“基礎”としての役割を果たす「数学」がある。（「基礎」という言葉は、その領域を学ぶための前提となる、概念や記法といった知識、および、そうした概念等をしかるべき文脈で運用できる技能、と

²19世紀末にドイツの工業系高等教育機関（テヒニシェ・ホーホシューレ）で起きた“数学者による数学教育不要運動”と、それに対する数学者フェリックス・クラインの解決への努力については、文献 [4] およびその参考文献を参照のこと。

いった意味合いで用いている。) この“数学”は、自然科学や工学の多数の分野で必要とされる。

本稿では、後者の「数学」を「専門基礎としての数学」と呼ぶことにしたい³。そして、本章で検討の対象とするのは、この“専門基礎としての数学”である。

「専門基礎としての数学」の重要性

「専門基礎としての数学」を必要とする分野では、「数学」が、いわゆる“言語”の役割を果たしていることが多い。そのような場合、数学は、その分野の本質ではないにしろ、不可欠のものとなるから、当の分野における重要性は自明のことであろう。

しかし、「専門基礎としての数学」の重要性は、実は、その分野自身にあるだけではない。「学問の一分野としての数学」の立場からみても、「他の領域に内在する数学」を対象化することで、「既存の数学の応用」からは生れない「新しい数学」を生み出すことが可能となる⁴。

なお、後者の意味で「専門基礎としての数学」を捉えるということは、既存の「数学」というものを前提し、その「数学」が他領域でどのように応用されるのかを問うということではない。あくまで「他の領域」が先にあり、それに対応して、その領域で基礎となる「数学」とはどのようなものであるか、を問うことである。

³「専門基礎としての数学」を必要とする領域の例としては、自然科学や工学の諸分野がある。これらに対しては、現在の大学の教育課程において、ほぼ標準とされる「数学」が確立している。具体的には、大学初年時の微分積分と線形代数であり、その教育は数学者が担うことが多い。(この範疇における現行の「標準」の正当性の検討が、本稿の主題のひとつである。) また、上級学年において、フーリエ解析、ラプラス変換、ベクトル解析、確率・統計からなる「応用数学」の課程が置かれることも多いが、その教育にあたるのは、数学者ではないことも珍しくはない。

なお、情報系の学科のように、工学における新しい分野の場合、その基礎となる数学(「情報数学」であるとか「離散数学」と称される)は必ずしも確立されたものとは言いがたい。さらに、いわゆる文系の高等教育における数学は、「教養」であって「専門基礎」ではないとされるのが普通だが、将来、国家や企業の意味決定に携わることの多い法学部や経済学部の学生が学ぶに相応しい、「専門基礎としての数学」の必要性に関する検討も、大きな重要性をもっていると思われる。

⁴フェリックス・クラインは、エアランゲン大学の就任講演(アントリッツレーデ)で、他領域で内在的に用いられている数学を(「通常の意味での応用」とは異なるが、と断りながら)「数学の応用」と呼び、この「応用」から新しい数学が生まれる機構(メカニズム)について述べている。[4]を参照のこと。

「専門基礎としての数学」のありかた

「専門基礎としての数学」のありかたを明確にすることは、何をもちがらすのだろうか。

まず、「他領域に内在する数学の対象化」に至るための、ひとつの、そして、重要な段階をなすということが挙げられる。そして、件の「数学」が、数学の専門家によって「対象化」されれば、その「数学」を基礎としていた分野は、より有用で洗練された「数学」を入手出来ることになる。

こうした過程は、歴史的に何度も繰り返されてきた⁵もので、新しい数学を手にした分野は、しばしば、飛躍的な発展を遂げることになる。

ただ、我々の基本的な認識は、歴史上繰り返されてきたこの種の過程が、意識的に^{コントロール}制御されたものではなかったということである。こうした過程を、意識的に生成できるようにすることが、我々の目的のひとつであるといっても良いかもしれない。

教育的観点の必要性

それでは、上述のような「専門基礎としての数学のありかた」は、どのようにすれば明確化できるのだろうか。

本稿の主張は、この目的を達するにあたり、最も重要な役割を果たすのが「教育」だということである。つまり、「ある領域で用いられている数学」を「教育的な観点」から眺めることで、その領域における「専門基礎としての数学のありかた」が見えてくることになる。

「教育」の有するこうした機能については、次に節をあらためて説明をしてみたい。

⁵例を挙げるなら、「解析学の厳密化」がある。これは、ニュートン・ライプニッツ的な「無限小解析」が、コーシーやワイエルシュトラスといった一群の人々によって、「微分積分学」に転じる過程をさす言葉である。(本稿の第2章の主題に関係していることに留意願いたい。) 教育的観点からの顕著な特徴として、「解析の厳密化」に貢献した数学者たちの拠ったのが、エコール・ポリテクニク、ベルリン大学等の「学校」であったことが指摘されている(例えば、文献[3] pp. 360-361を参照)。

より最近の例としては、「ベクトル解析」が挙げられよう。これは、マクスウェルの電磁気学を「大学で教育」するために、背景にあった四元数的解析を捨象した「新しい数学」として、ギブスによって構成されたものである。この例がさらに興味深いのは、ギブスのものとまったく同等な体系を、ヘヴィサイドが独立に構成していることである。ヘヴィサイドが拠ったのが、ギブスのような大学の教壇ではなく、雑誌の連載講座であったことは、“コミュニケーションとしての教育”が“出版(publication)”を含意することを強く示唆している(ベクトル解析の歴史については、文献[1]を参照のこと)。

1.3 教育の機能

「教育」とは何か

「専門基礎としての数学のありかた」の把握のためには，“教育的観点”から数学を眺めることが重要であると述べた⁶。

では、「教育」とは何なのだろう。

ジョン・デューイによれば、教育 (education) とは、“言葉の本来の意味におけるコミュニケーション⁷”に他ならないという。我々は、教育の最も一般的な定義として、デューイのこの見解を採用しておこう。

制度的教育と非制度的教育

この「教育」は、次のようにして、二種類に分けて考えることができる ([2], pp..20-22)。

- (1) 元来の「教育」は、共同体の構成員の候補者（子供）を正規の構成員（大人）の営む共同生活と同種の生活に参画させることで、共同体を維持・発展させるために必要な性向を教え込むものであった。
- (2) 共同体の高度化・複雑化に伴い、「大人の活動に有効に参加する能力は、この目的を目指して前もって与えられる訓練に依存することに」なり、その結果、「意図的な機関 — つまり学校 — およびはっきりきまった教材 — つまり学科 — が案出され」、「一定のことを教えるという仕事が、特定の人々の集団に委任される」ことになる。

以下、本稿では、上の説明の後段に現われた教育、つまり、「機関（学校）、教育課程、教師集団」による“独立した”教育を、デューイに倣って、「制度的 (formal) 教育」と呼ぶ。制度的教育は、また、教えること自体を目的とする営みであるから、「直接 (direct) 教育」とも呼ばれる。したがって、それ以外の教育、つまり、非制度的 (informal) 教育⁸は、「間接 (indirect) 教育」ということになる。

⁶本稿の「はじめに」で述べたように、この姿勢を「教育数学」と呼ぶ。

⁷共同体（コミュニティ）を成立させる諸要素を構成員に共有化させるための手段という意味である。例えば、デューイの主著の一つである [2] を参照のこと。

⁸デューイの説明の前段に現われた「共同生活と同種の生活に参加」することによる教育、特に、いわゆる「徒弟制」も、その一種であろう。

こうして、「教育」は、制度的教育と非制度的教育の二種類に分かれることになる⁹。

教育のもつ機能

先に、「教育」の定義を，“言葉の本来の意味におけるコミュニケーション”とした。デューイは、この意味におけるコミュニケーション（つまり教育）の特質として、コミュニケーションの受け手だけでなく、送り手も変化を蒙ることを指摘している（[2], p.18）。

デューイは言う。伝え手が「経験をきちんと述べるには、その経験の外に出、他人がそれを見るようにその経験を見、…他人がその経験の意味を感得できるような形にしておくことが必要である」。そして、教えるという行為の必要性が、「経験を加工して、それを最も伝えやすく、したがって最も利用しやすくするような秩序や形式へと整えることに、測り知れないほど大きな刺激を与えるのである」、と。

求めていたもの

我々が求めていたのは、「専門基礎としての数学のありかた」を明確に把握することであった。そのために必要なのは、まさに、「教えること」を意識化することで得られる、上述の機能である。つまり、こうした機能によってこそ、「教えるべき対象のありかた」の明確化が促進されることになる。

なお、こうした機能をより効果的に発揮するのは、「学習者が正規の構成員の模倣を通じて学ぶことを原則とする徒弟制（非制度的教育）」ではなく、「教えることの直接性が担保される制度的教育」の方であることは当然なことだろう。

1.4 数学教育不要論に答える

第1.1節で述べた“数学者による数学教育不要論”に対して、我々は、こう答えたい。

⁹[5]では、別の観点から教育を区分し、専門教育と一般基礎教養教育という類型を用いた。

批判者に対して

第1.2節で述べたように、「専門基礎としての数学」のありかたを明確化することは、あなたの分野においても効用をもたらす得ることである。したがって、その利益をより効果的に得るためには、自分たちの手で教育するよりも、「制度的教育」によって、“数学者¹⁰”が教える方が有効なのだ、と。

数学者にとっては

“数学者による数学教育不要論”が、仮に、数学者の教える数学がそれぞれの分野の内在論理に適合するものになっていないことを理由とするのであれば、数学者はこう答えるべきではないか。

「専門基礎としての数学」の教育は、数学自身にとっても重要な役割を有するものであり、数学者の側は、その分野の専門家の協力を仰ぎながら、その必要を満たすために努力する準備がある、と。

2 工業静力学に現われる微分と積分

前章は抽象的な議論に終始したが、本章では、具体的な例について検討してみたい。

2.1 検討対象としての静力学

本章は、工学教育で実際に用いられる微分や積分の技法について調べ、それを、理工系の基礎とされる「微分積分」と比較することを試みる。

議論を具体化するために、工学一般を扱うのではなく、ある特定の分野について検討を加えてみたい。検討対象として選ぶ分野は、「静力学」である。

¹⁰もちろん、制度的教育の「教師」の役割を果たしているという条件が付くが。

なぜ静力学か

工学に用いられる微分・積分について検討するために、静力学の分野を選んだのはなぜか。

第一に、「静力学」が工学の多数の分野において基礎をなす¹¹ことから、影響の及ぶ広さという点で高く評価できると考えたことである。(この点は、工学にかぎらず、自然科学全般についても同様であろう。)

次に、静力学が、かつては数学の重要な一分野であり、「積分」や「無限小量」の発展において重要な役割を果たしてきたという歴史的な事情を斟酌したことである¹²。

『メリアム工業静力学』について

以下では、議論が拡散しないように、「工業静力学」の標準的なテキスト・ブックを一冊指定し、その本の中で用いられている微分と積分について調べることにしたい。

本節で検討対象として採りあげるのは、メリアム著 “*Engineering Mechanics, volume 1, STATICS*” (6th edition, [8]) である。

この著作は、2巻目の “*Engineering Mechanics, volume 2, DYNAMICS*” とあわせ、工業力学のテキスト・ブックのシリーズとして、故ジェームズ・メリアム博士によって、1951年に出版された。

第6版の緒言 ([8], p. v.) によると、このシリーズは、当時の大学の力学教育における革命的な転換を象徴する書物であったという。そして、現在にいたるまで、ほぼ半世紀にわたり、この分野のテキスト・ブックの決定版であり続け、また、その後出版された工業力学の教科書の範とされている。

このシリーズは多数の外国語に翻訳されており¹³、そうした各国版のテキスト群が、工業力学の大学用テキストの一種の国際的標準を形成しているともいわれる。

¹¹『メリアム工業静力学』の序文(本稿の付録のA.1)を参照のこと。

¹²現存する静力学の体系的文献の最古のものが、アルキメデスのものであることに留意されたい。力学が数学の一分野であったことの歴史的な“意味”については、トーマス・クーンの論考『物理科学の発達における数学的伝統と実験的伝統』([7]に所収)を参照のこと。

¹³日本では、第2巻が、1982年に一度翻訳されており、さらに、最近別の訳者による二度目の出版がなされている([10], [11])。

2.2 『メリアム工業静力学』の微分と積分

この節では、『メリアム工業静力学』に現われる微分と積分の特徴について、要点をまとめて記述する¹⁴。

(1) 量としての「微分」

『メリアム工業静力学』では、「微分 (differential)」は、「微分という量 (differential quantities)」という表現で最初に現われる (付録の B.1 節)。つまり、「微分」は、量の一種として扱われることになる。

「有限の量 Δx が極限において dx となる」といった表現は、最初の準備的な項で一度だけ出てくることを除けば、用いられない。つまり、「有限の Δ 、無限の d 」の区別はない。というよりむしろ、「 Δ 」は用いられず、 d が有限微小量と微分を明確に区別することなく用いられている。(稀に「極限に移行すると」という文章が見られるが、それは、微分を含む関係式から高位の微分の項を消去する文脈で使われる表現で、単に有限量から微分に移行するということを主張するものではない。)

実際に「微分量」が現われるところは、幾何学的な形状をなす物体を構成する微小部分として用いられることがほとんどであり、用語としては、「要素 (element)」が多い。具体的には、「積分要素 (element for integration)」としての「体積要素」、「面積要素」、「線要素」であるが、ときおり、「微分要素 (differential element)」、「無限小要素 (infinitesimal element)」が用いられることもある。

概して述べれば、「微分量」と「微小量」は曖昧なままに用いられているように思われる。例えば、「 $\sin d\theta = \tan d\theta = d\theta$, $\cos d\theta = 1$ 」という式は、「微分角 (differential angle) $d\theta$ が弧度法で表示されているとき、「角 θ がゼロに近づくとき、数学的な極限において、関係式が真となる」とされる (付録 B.2 節)。

なお、第 2 巻で扱う動力学と異なり、「時間の関数」的な量が出てこないため、「微分」に速度の意味を見ることはない。

¹⁴メリアムのテキストに現われる微分と積分について、以下の議論で必要となる部分を、本稿の付録にまとめてある。適宜、参照願いたい。

(2) 「積分」の機能の分類

それでは、「積分」の方はどうだろうか。

メリアムのテキストにおいて、「積分」は、大きく分けて、二種類の機能を有している。

ひとつは、「連続的な量に対する“和”としての記法」であり、他方が、「微分の関係式から有限の関係式を復元する手法」としてのものである。本稿では、仮に、前者を「連続和としての積分」、後者を「平方化としての積分」と呼ぶ¹⁵。それぞれの機能は、次のようになる。

(3) 連続和としての積分

有限個の量の和 \sum に対して成り立つ性質を、連続的に分布している量に一般化するとき、 \sum を \int に替えるという、いわば“記法としての「積分」”の機能を言う。重心やモーメント等、多くの基本的な概念の表示式に用いられる（例えば、D.1 節）。

なお、単なる「記法」を超えて具体的な値の計算が必要になる場合、対称性の利用や、積分要素の選定など、種々の工夫が必要になる（D.2 節）。

(4) 平方化としての積分

テキストでは、「系の微小部分で成立する平衡条件から“微分の関係式”を導出」し、次いで「その関係式から微分（商）の積分を利用して有限の関係式を取り出す」という論法がしばしば用いられる。その後段で用いられるのが、「平方化としての積分」である。

なお、実際的な問題への適用においては、数式を用いた代数的アルゴリズムとしての「積分」だけでなく、「平方化」を面積計算へと帰着させるような図的表式も含めて考えられている（C.2.1 節）。

(5) 体系的説明の欠如

メリアムのテキストにおける微分や積分の扱いの全般的な特徴は、体系的な説明がなされていないことである。微分と積分に関する事項は、ほぼ、説明なしに用いられている。

¹⁵一次元の量を扱う場合は、「和としての積分」と「平方化としての積分」は、“グラフの作る平面図形の面積”を考えることを通じて同一視される（微積分の基本定理）。

この点については、「ベクトル」の扱いと対照的である。ベクトルについては、一箇所ではなく数箇所に分かれてではあるが、定義から始まり、演算や成分表示等の基礎的な事項の説明が、かなり体系的に与えられている。

このことは、メリアムのテキストが準備された半世紀前のアメリカの大学初年級の教育課程で、微分積分は既習と仮定してよいが、ベクトルの方は仮定できないといった事情があったのかもしれない。

しかし、反面、テキストで扱う微分や積分と、数学で学習する微積分との整合性が必ずしもとれておらず、計算技法的な事項は利用できたにしても、概念的なものを適切に説明することが困難であったのではないかという想像もできる。

2.3 微分積分学と無限小解析

メリアムの『工業力学』のテキストを一読しての印象は、そこで用いられている微分と積分は、高校や大学で学習する「微分積分」とは異なり、むしろ、ライプニッツやベルヌイによって開発された計算技法（無限小解析）に類似するものではないかということである。

以下、本章では、区別を明確にするため、今の高校や大学初年級で学ぶ微分積分を「微分積分学」と、ライプニッツ・ベルヌイ的な計算技法の方を「無限小解析」と呼ぶことにする。

この言葉を用いれば、我々の疑問は、「『メリアム工業静力学』で用いられている数学は、微分積分学ではなく、無限小解析ではないのか」と述べることができる。

「微分積分学」とは何か

上の疑問について考える前に、「微分積分学」とは何で、「無限小解析」との相違は何なのかということについて、高瀬正仁氏の著書『dx と dy の解析学』([12])に従って、まとめておこう。

本稿で言う「微分積分学」とは、コーシー以降のいわゆる“解析学の厳密化”を経た後の“微分積分”をさす¹⁶。「微分積分」、「解析」等々、名

¹⁶この「微分積分学」は、コーシー以前と以降を区分するものであり、いわゆる $\varepsilon-\delta$ 論法を用いるか否かといった区別とは、異なるレベルのものである。

称は様々でも、現在の大学等で数学の一領域として教えられているものは、すべてこの「微分積分学」であるといっても良いだろう。

高瀬氏によれば、この「微分積分学」の最大の特徴は、理論を支える土台として「極限」の概念があり、その上で「関数」が主役となっていることである ([12], p.189).

今日の微積分の主役を演じるのは「関数」の概念であり、極限の理論を土台に据えて、その上に「関数の微分」と「関数の積分」という、理論構成の支柱となる二概念が打ち立てられていく。これらは概念上まったく無縁だが、それにもかかわらず「微積分の基本定理」が主張され、微分と積分は不可分の関係で結ばれていることが明らかにされる。これが、コーシー以来、まもなく二百年になろうとする歴史をもつ近代解析学の骨格である。

無限小解析とは

それに対して、コーシー以前の状況は、オイラーもそうであったように、「無限小解析」と呼ぶのが相応しいのだとされる。微分積分学と異なり、無限小解析では次のようになる ([12], p.190).

主役は関数から「変化量」に転じ、「変化量の微分」すなわち「有限変化量から作り出される無限小変化量¹⁷」という唯一の基礎概念の上に理論全体が構築されていく。変化量の微分を作るための一定の諸規則を教えるのが「微分計算」であり、逆に無限小変化量を知って有限変化量にもどる道筋を教えてくれるのが「積分計算」である。微分と積分は概念上無関係なのではなく、さながら一枚の同じ紙片の表裏のように、当初より不即不離の関係で結ばれている。

¹⁷本稿で題材としている『メリアム工業静力学』においては、「微分」の「有限変化量から作り出される無限小変化量」という性格は後景に退いていて、有限量と同種の扱いを許容する「自立した量」の意味合いが濃いように感じられる。そういう意味では、「無限小計算」の正当化のために「量」を時間というパラメータに従って変化するものとして動的に捉えたニュートンのありがたよりも、「量」を静的に捉えていたライプニッツ的ありがたに近いかもといえる。

無限小解析と微分積分学

無限小解析が微分積分学へと“進化”することが、「解析学の厳密化」だったのだろうか。高瀬氏は、否と答える。

高瀬氏は、解析の歴史に、三つの層があるのではないかと述べる。ニュートンとライプニッツが発見した古層と、オイラーの三部作に象徴される第二層、そして、コーシー以降の近代微積分の第三層である。そして、この三つの層の関係について、こう述べる ([12], p.4).

歴史の進歩はつねに直線的であるとして、古層はそのまま第二層へと展開し、第二層を厳密化していけば即座に近代微積分が成立するというのであれば、事は簡明である。だが、実情はおそらくそうではないであろう。三つの層は画然と分かたれていて、「進歩」と見えた事象の真相は実は非常に大がかりな「変容」だったのではあるまいか¹⁸。

厳密化の得失

積分は、無限小解析の世界では「“無限小量”を考えている区間全域に渡って寄せ集めて得られる量」と理解されるとして、次のように評されている ([12], p.21).

これはたしかに論理的明確さを欠く解釈ではあるが、本来の積分概念をあるがままの姿で表象する質実で強力な受け止め方でもあり、物理や工学の現場では今も生きて働いている。数学では様相が異なり、微積分の厳密化の過程が進行していく中で、無限小量は次第に理論の表象から捨てられていき、やがて完全に消滅した。ところが、微分係数と定積分の精密な概念規定がなされると、今度は微分記号の意味が不明朗になるという意外な局面に逢着してしまうのである。

¹⁸“厳密化”という言葉の不適切さについて、高瀬氏はこうも述べている ([12], p.188); 厳密化は「変化量とその微分」から「関数とその導関数」へという、世界の再編成に伴って生じた現象なのであり、決してそれ自体が目的だったのではない。「厳密化」という言葉はやはり不適切で、単に再編成とのみ言えば十分なのではあるまいか。

2.4 工業静力学で用いられる数学は微分積分学か

『メリアム工業静力学』の話にもどろう。このテキストで用いられていた微分や積分は、コーシー以降の微分積分学なのか、それ以前の無限小解析なのか。これが問題であった。

微分積分学ではない

メリアムのテキストの記述から、微分積分学における主役であるはずの「関数」の存在を、(種々の不自然な解釈を経ずに) 読み取ることは困難である。したがって、『メリアム工業静力学』で用いられる微分や積分は、「微分積分学」のものとはいえないだろう。

実際、大学初年級学生にとって、メリアムのテキストで用いられている「微分」や「積分」を、数学の授業で学んだばかりの微分積分学のそれと同じだと思ふことは、相等の無理があるのではないか。

もし『メリアム工業静力学』で工業静力学を代表させるのであれば、我々は、「微分積分学は工業静力学の基礎か」という問いに、否と答えざるをえないであろう。

無限小解析か

それでは、コーシー以前の無限小解析こそが、工業静力学の基礎なのだろうか。もちろん、2.2節で挙げた特徴を見れば、無限小解析との親縁性は明らかである。

しかし、細かく見ると、用いられている技法が、ライプニッツやベルヌイ時代の無限小解析そのものであると主張するには、いくつか疑念がある。

例えば、付録の C.2.3 節 (積分可能性についてのコメント) に取り上げた原註のコメントを見れば、著者が不連続関数の原始関数に関するそれなりに明確な概念をもっていることが察せられる。これは、コーシーやフーリエ以前の無限小解析における「躓きの石」のひとつであり、高瀬氏のいう“世界の再編成”を引き起こした原因のひとつであった。

つまり、メリアムのテキストで用いられている微分と積分は、やはり、創出期の無限小解析そのものではなく、近代以降の再編をくぐりぬけた数学であると思ふべきではないだろうか。

新しい数学か

メリアムのテキストで用いられている微分と積分は、微分積分学でもなく、無限小解析でもないという結論が正しいとしよう。それでは、それは、新しい数学なのだろうか。

我々は、本稿の主題である「専門基礎としての数学」に関する一般的議論へともどる時点に来たようである。

3 教育数学の必要性

3.1 問題の多様性

第2章で調べたところでは、「工業静力学」という特定の分野において、“基礎”として必要な数学は、現在の標準的な「微分積分学」ではなく、「無限小解析」の技法を自然な形で含んでいるような“新しい数学”である可能性が高いことが見て取れた。

「工業静力学」は、今も、現実に、工学系の多くの分野で学ばれている教科である。この「工業静力学」のために、それに適した「新しい数学」を作るという選択肢を選んだとしよう。

この選択肢を実現するためには、実際上、どういう課題を解決しなければならないのだろうか。思いつくままに、挙げてみる。

検討を要する課題群

まず、誰が、つまり、どういう立場の人間が、「新しい数学」を構成するという作業に従事するのか、という問題がある。その人は、職業として行うのだろうか。

次に、仮にそうした「新しい数学」が、ある人々によって構成されたとしよう。それでは、その「新しい数学」を学校の教育課程に組み込むためには、どうしたら良いのだろうか。教育課程に組み込むに際して、他の教科目との整合性を、どうやって保つのか。さらには、教育課程に入ったとして、未だ知られていなかった新しい数学を、誰が学生に教えるのだろうか。

まだまだ、ありそうである。

課題群の性格

こうした疑問のうちには、「数学」と関係しないものもあるかもしれない。しかし、「数学」に関係する問題の多くは、「工業静力学に適した新しい数学」に限定されたものではなく、より一般的に「学校の教育課程に新しい数学を組み込む」場合に生じるものであることに留意されたい。

つまり、解決が必要な事項の多くは、「専門基礎としての数学」に限られない、より一般的な状況下で検討することが可能な（そして、おそらくは、有効な）ものなのだ。

3.2 教育数学の必要性

本稿の主題は、「専門基礎としての数学」のありかたを問うことであった。そして、第1章の1.3節で見たように、そのために必要なのは「教育的観点から数学を捉えること」であった。

教育数学の導入

本稿冒頭の“はじめに”で述べたように、「教育数学」という言葉で、我々は、第一に、“教育的観点から数学を捉えようとする姿勢”を表わしたい。そして、“教育的な観点から捉えることで生み出される数学に関する諸々の知見”の総称も、同じく「教育数学」という言葉で表すこととした。

つまり、「専門基礎としての数学」のありかたを問うことは、教育数学のひとつの課題として位置づけられることになる。

教育数学の効用

「専門基礎としての数学」を「教育数学」の問題として定位しなおすことは、単なる“名前のつけかえ”ではない。

「教育数学」が対象とする数学は、必ずしも“専門基礎”に限定されない。我々は、最も一般的な「数学」に舞台を広げることで、「専門基礎」に限定することで見失われてしまいがちな多角的な視点、豊富な手段を手に入れることが期待できるようになる。

そして、このことが、我々の主題を展開する上で「教育数学」を必要とする理由である。

結びにかえて — 教育数学の機能

本稿では、“専門学科の基礎としての数学”の教育について考えるとき、より一般的な教育の文脈で数学を捉える「教育数学」というものを導入することの意義と効用について述べてきた。

本稿を閉じるにあたり、“専門基礎としての数学”を離れ、「教育数学」が持ちうる、もしくは、持つべき、機能のいくつかについて、略述してみたい。

教育数学の創造的機能

まず、教育数学は、新しい数学を生み出す機能をもつ。

現時点の「学問としての数学」に含まれていない領域で内在的に用いられている“数学的な思考や技法”は、“教える対象”となることを通じて、新しい数学として結晶化することになる。これは、本稿の主題の一つでもあった。

こうした機能を、教育数学の創造的機能と呼んでおこう。

教育対象としての数学

第2章で扱った内容には、「工業静力学」という分野の基礎教育のために、現在大学で教えられている「微分積分」が適しているのか、もしそうでないのなら、どんな数学が適するのか、といった問いに答える試みという側面があった。

同種の問題として、例えば、中学校で教えられる「数学」は、義務教育という教育的観点からみて、現行のもので良いのか、そうでないなら、どのような「数学」にするべきなのか、といった問いかけもありうる。

こうした問いに向かい合うことも、また、「教育数学」の果たすべき役割のひとつであろう。

政策決定において学問の果たす役割

「教育数学」的な議論で、ある目的を達成するために“教える”のに適した数学が決定できたとしよう。その「数学」を、実際的な教育課程（制

度的教育)に取り入れようとすれば、その先に多くの課題があることについて、その一端を3.1節で指摘した。

これは、「数学の教育」が、さまざまな社会的条件を課された“実践的”な営みであることに由来するものであろう。また、こうした、“最適な数学”を実際的な教育課程に組み入れることの、社会的制約による困難さといった側面は、本稿の主題であった高等教育よりも、初等・中等教育においてより大きなものとなるかもしれない。後者の場合、事実上、“政策レベルでの教育課程の決定過程¹⁹”が視野に入ることを得ないだろう。

様々な制約下で構成される“制度的な教育課程”の一部としての数学を決定するに際し、教育数学の果たすべき役割というのは、どのようなものであるべきなのだろうか。

今の我々は、確固とした答をもたない。

ここでは、直接的な答を求めることにかえて、政策決定の過程において学問(Wissenschaft)の果たすべき役割について論じた、マックス・ヴェーバーの『客観性論文』の見解を、参考のため、供することとしたい²⁰。

ヴェーバーの見解

ヴェーバーが『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』論文([14])において設定する枠組は、論文名の“社会政策”に限定されず、より一般性をもったものとなっている。

まず、ヴェーバーは、「人間の行為」というもの全般について、「その究極の要素を抽出しようとする」と…そうした行為が「目的」と「手段」の範疇に結びついていることがわかる」とする。その上で、“学問的な考察の対象となり得る”ものとして、「行為者」が何らかの「手段」を用いてしかるべき「目的」を達成しよう「意欲」している状況を設定する。

なお、“政策”の枠組での対応物を示すなら、「行為者」というのは政策決定者(政府)であり、「目的」というのは検討の対象としたい政策目的、「手段」は具体的な政策と思ってよいだろう。

¹⁹所与の制度的教育機関が国家の機関である場合、この型の問題は、文字通り、文教政策の一種と考えることができる。

²⁰ヴェーバーの所論は、ここで取り上げた“意思決定における学問の役割”だけでなく、“理念型”を用いる方法論も、教育数学の方法論的基礎のひとつとして有効であると思われる。しかし、本稿の主題からは外れるため、方法に関する議論には触れないこととする。

ヴェーバーの主張の大筋を述べておく。まず、前提として、目的を所与と仮設する。つまり、目的の設定自体は、学問の役割ではないとする。そして、与えられた「所与」の目的を実現するための「手段」についての技術的評価など、行為者が意思決定をするための補助こそが、学問の役割だとするのである。

より詳しく述べれば、次のようになる ([14], pp. 30–35)。

- (1) 目的への手段の適合性の評価、すなわち、所与の目的について、いかなる手段が適合し、また適合しないかを、その時代的な知識の限界内で、ある妥当性をもって確定すること。

この目的の達成可能性の見積もりにより、当の目的に、当代の歴史的状況下で、実践上意味があるか、あるいは、無意味かについて、批判 (kritisieren) することが可能となる。

- (2) 次に、所与の目的を達成する可能性がありそうな場合に、そのために必要な手段を現実に適用することに随伴して生じる結果（意図した所期の目的達成の他の副次的諸結果や犠牲）を確定すること。

そのことで、行為者の行為の意欲した結果と、意欲されなかった随伴結果との相互秤量 (abwägen) を可能とする。この秤量自体に決着をつけることは、もはや学問のよくなしうる任務ではなく、意欲する人間の課題となる。

- (3) そして、意欲する人間がこうした決断を下す際に、学問に従事するものが提供しうるものは、意欲されたもの（目的）の意義に関する知識となる。

目的の根底にある、もしくは、ありうる「理念 (Idee)」を開示し、論理的な連関をたどって展開することによって、行為者が意欲し、選択する目的を、その連関と意義に即して、行為者自身に自覚させることが可能となる。

- (4) 最後に、価値判断にかんする学問的な取扱いは、さらに進んで、意欲された目的とその根底にある理想を、ただ単に理解させ、追体験させるだけでなく、とりわけ、それらを批判的に「評価する (beurteilen)」ことも教えるものでありたいとする。

ただ、この批判にできることは、意欲されたものが内面的に矛盾を含んでいてはならないという要請に照らして理想を吟味することに限られる。

教育数学の批判的機能

制度的な教育課程の一部としての数学を決定するときに、上述のヴェーバー的な役割を担う「学問」とは何なのか。これも、「教育数学」の果たすべき役割のひとつではないかと考える。

先に、「新しい数学」を生み出しうる教育数学の機能を、「創造的機能」と呼んだ。では、後で論じた“意思決定において果たす教育数学”の機能は、どう呼べば良いのだろう。我々は、この機能を、教育数学の「批判的機能」と呼ぶことを提案したい。

参考文献

- [1] Crowe, Michael J. : *A History of Vector Analysis : The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Dover (1994).
- [2] デューイ 『民主主義と教育 (上)』 (松野安男 訳) 岩波書店 (1975).
- [3] Grabiner, J.V. : *Is Mathematical Truth Time-Dependent ?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 4. (Apr., 1974), 354-365.
- [4] 蟹江幸博, 佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について — 試論 —』 三重大学教育学部紀要, 第 60 巻, 教育科学 (2009), 219-236.
- [5] 蟹江幸博, 佐波学 『教育数学序説 - 古代における教育と数学の類型 -』 三重大学教育学部紀要, 第 61 巻, 教育科学, (2010), 187 - 218.
- [6] 蟹江幸博, 佐波学 『数学教師に必要な数学能力とは何か — 戦前における数学教師養成の一断面 —』 本講究録所収.
- [7] Kuhn, T.S. : *The Essential Tension*, The University of Chicago Press (1977).
(日本語訳) トーマス・クーン 『本質的緊張』 (我孫子誠也, 佐野正博 訳) みすず書房 (1998).

- [8] Meriam, J.L., Kraige, L.G. : *Engineering Mechanics, volume 1, STATICS*, sixth edition, John Wiley & Sons, Inc. , (2008).
- [9] Meriam, J.L., Kraige, L.G. : *Engineering Mechanics, volume 2, DYNAMICS*, sixth edition, John Wiley & Sons, Inc. , (2008).
- [10] Meriam, J.L., Kraige, L.G., 浅見敏彦 訳 『メリアム カラー図解 機械の力学 – 質点の力学 –』丸善株式会社 (2006).
- [11] Meriam, J.L., Kraige, L.G., 浅見敏彦 訳 『メリアム カラー図解 機械の力学 – 剛体の力学 –』丸善株式会社 (2007).
- [12] 高瀬正仁 『dx と dy の解析学 — オイラーに学ぶ』 日本評論社 (2000) .
- [13] Weber, Max. : *Gesammelte Aufsätze zur Wissenschaftslehre*, 7. Aufl., Tübingen (1988).
- [14] マックス・ヴェーバー 『社会科学と社会政策にかかわる認識の「客観性」』 (富永祐治 立野保男 訳, 折原浩 補訳) 岩波書店 (1998) .

付 録 :

『メリアム工業静力学』の微分と積分

J.L.Meriam 博士の『Engineering Mechanics, Statics』および『Engineering Mechanics, Dynamics』は、大学初年級の工業力学のテキスト・ブックとして、1950年に出版された。(『Dynamics』の巻は、過去に二度、日本語に訳されている。)

この『メリアム工業力学』は、L.G.Kraige 氏を代表とする多くの後継者・協力者と出版社の熱意を得て、著者の死後も改訂を重ねている²¹、世界的名著と評判の高い著作である。

本付録は、『Engineering Mechanics, Statics』の第6版 ([8]) をテキストとして、そこで「微分と積分」がどのように用いられているかを、代表的と思われる話題を取り上げる形でまとめたものである。

内容について、簡単に説明しておこう。

A 項では、工業教育の基礎として力学が占める位置、および、この観点からの数学教育に対する原著者の見解を紹介した。B 項は、「微分」の初出部分である。C 項は系の微小部分で成立する平衡条件から「微分の関係式」を導出する話題を、D 項は連続量の和としての「積分」の役割に関する話題を、それぞれ取り上げた。

A 基礎科目としての力学

A.1 工業力学の役割

序文の冒頭で、工学教育の基礎課程としての工業力学²²の役割について、次のように述べられている ([8], p.vii).

²¹現在、第6版が出版されている。

²²“engineering mechanics”の訳語。「工業」とはいつでも、industrial ではない。工学系の教育課程ではこのように訳することが多いようなので、それに従った。

工業力学は、工学のほとんどの分野において、基礎であると共に骨格をなしている。土木工学、機械工学、航空宇宙工学、農業工学、そしてもちろん工業力学自身、といった諸分野における話題の多くは、静力学と動力学スタティクス ダイナミクスの題材に基づいている。電気工学のような専門分野でさえ、実務に従事する人たちは、ロボットの装置や製造行程の電気部品について思案する過程で、最初に関係する力学を扱わなければならないことがわかるだろう。

こうして、工業力学から得られるもの (engineering mechanics sequence) は、工学の教育課程にとって決定的なものとなる。ここから身につくものは、それ自身のために必要なだけではない。工業力学の諸課程は、応用数学、物理学、図学 (graphics) を含む他の重要な科目についての学生の理解を堅固なものにすることにも役立つ。付言すれば、こうした諸課程は、問題解決能力を強化するための卓越した舞台装置としても役に立つものである。

A.2 数学教育の問題点

序文の “philosophy” の項に、数学教育に関係する所見が述べられているので、紹介しておく ([8], p.vii).

過去数十年にわたり、工学教育において、いくつかの残念な傾向が生じてきている。第一に、前提となる数学の幾何的および物理的な意味を強調することが、少なくなってきたように思われる。第二は、以前に力学的な問題を視覚化し表示する能力を高めてきた図学 (graphics) の教育が、大きく減少（あるいは削除さえ）されてきていることである。第三として、力学を扱う数学の程度を上げるに際して、幾何的な視覚化を覆い隠す（もしくは取って替える）ために、ベクトル演算の記号的な操作を許容する傾向が見られるようになってきたことである。力学とは、生来、幾何的および物理的な直

観に依存する分野であり、我々は、この能力を伸ばしていくよう努力を重ねていくべきものである²³。

B 「微分」の初出

B.1 量としての微分 (differential)

「精度・極限・近似 (Accuracy, Limit, and Approximation)」と題された第1章の第7節において、「微分 (differential)」が最初に登場する。ただし、「微分」が何かという説明はなく、位数（の説明もない）に関する取り扱い方の説明が与えられる。（概して述べれば、「微分」という言葉で、あるときは「有限の微小量」、あるいは、その極限、また、あるときは、いわゆる「無限小量」的な概念が、“適度”に使い分けられているように思われる。）

以下は、「微分 (Differential)」という小見出しをもつ部分である（([8], p.13).

微分という量 (differential quantities) の位数 (order) は、等式 (equation) を導くに際して、しばしば誤りの原因となる。高位の微分 (differentials) は、数学的な極限をとるとき、低位の微分に比べると、常に無視してもよい。例えば、高さが h で底面の半径が r の直円錐の体積要素 ΔV は、頂点からの距離が x のところで厚さが Δx の円形の切片をとることになる。この体積要素の表示式は、

$$\Delta V = \frac{\pi r^2}{h^2} [x^2 \Delta x + x(\Delta x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^3]$$

となる。

ΔV が dV に、そして、 Δx が dx に行くよう極限に移ると、 $(\Delta x)^2$ と $(\Delta x)^3$ を含む項は落ちてしまい、単に、

²³なお、この文章に引き続いて、コンピューターの使用に関する見解が述べられている。これも興味深いものではあるが、本付録の主題とは直接的な関係をもたないため、ここでは扱わない。

$$dV = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$$

が残ることに注意しよう。これが、積分する際の正確な表示式である。

B.2 微小角の近似

次に、「微小角の近似 (Small-Angle Approximations)」という小見出しのついた部分が続く。小さい角に対する三角関数の値や、正弦、余弦、正接関数のそれぞれの3次の項までの近似式の説明があり、最後に次のような文章がきている ([8], p.14).

角 θ がゼロに近づくと、数学的な極限において、次の関係式が真となる。

$$\sin d\theta = \tan d\theta = d\theta \quad \cos d\theta = 1$$

ただし、微分角 (differential angle) $d\theta$ は弧度法で表示されていなければならない。

C 微分の関係式 — 梁の剪断力と曲げモーメント

本節では、「系の微小部分で成立する平衡条件から“微分の関係式”を導出すること、そして、その関係式から微分（商）の積分を利用して有限の関係式（図的表式も含めて）を取り出す」といった手法を、初出の話題である「一般的な荷重のかかった梁の剪断力と曲げモーメントの決定」という問題を通じて紹介する。

なお、同様な手法は、第 5/8 節（「フレキシブル・ケーブル (Flexible Cable)」）、第 5/9 節（「流体静力学 (Fluid Statics)」）、第 6/8 節（「フレキシブル・ベルト (Flexible Belts)」）等々でも用いられている。

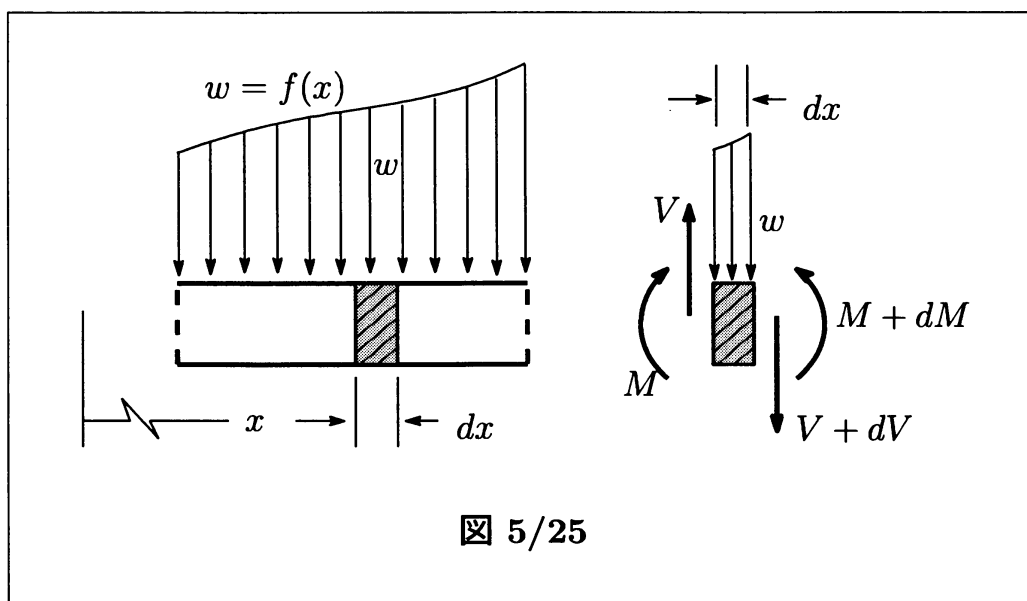
C.1 梁問題の設定

ここで対象とする梁は、静力学の適用が可能な梁 — いわゆる「静定梁 (statically determinate beam)」 — であるとする。本節で考察するのは、次のような問題である ([8], p.282).

梁の長さに応じた剪断力 V と曲げモーメント M の変動 (variation) の様子は、梁の設計解析のために必要な情報を提供することになる。特に、曲げモーメントの最大値は、通常、梁の設計や選択において最優先で考慮すべき事項であり、その値と位置が決定すべきことになる。剪断力とモーメントの変動は、図的 (graphically) に表示されるのが最良 (best) であり、 V と M を梁に沿って測った距離の上方にプロットすることで表示したものが、その梁の剪断力線図 (shear-force diagram) と曲げモーメント線図 (bending-moment diagram) となる。

C.2 一般荷重・剪断力・モーメントの関係

これから考察を進める系の部分を表す図 (5/25) は、次のようになる ([8], p.282).



C.2.1 荷重と剪断力の関係式

荷重と剪断力の関係式は、以下のような議論で求められる ([8], pp..272 - 283).

図 (5/25) は、荷重をかけた梁の一部分を表しており、梁の要素 dx が分離 (isolated) されている。荷重 w は、梁の単位長さ当たりの力を表す。 x の位置において、要素の上に働く剪断力 V とモーメント M は、正の方向に描いてある。座標が $x + dx$ である要素の反対側でも、この二つの量は正の方向で示されている。もっとも、この二量は、 $V + dV$ と $M + dM$ と表記されている。というのも、 V と M は x とともに変化するから。荷重 (applied loading) w は、この要素の区間上では定数であると考えてよい。実際、この長さは微分量であり、 w の変化分の効果は、極限においては、 w 自身の効果の効果に比べれば、消えてしまう。

この要素の平衡 (equilibrium) 条件は、垂直方向の力に関する次の和がゼロであることを必要とする。

$$V - wdx - (V + dV) = 0$$

すなわち、

$$w = -\frac{dV}{dx} \quad (5/10)$$

等式 (5/10) より、剪断力線図の傾きは、いたるところで、荷重の値のマイナスに等しくなければならないことがわかる。

...

ここで、等式 (5/10) を積分をすれば、剪断力 V を荷重 w の言葉で表すことができる。こうして、

$$\int_{V_0}^V dV = - \int_{x_0}^x w dx$$

すなわち,

$$V = V_0 + (x_0 \text{ から } x \text{ までの区間における荷重曲線の下
の領域の面積のマイナス})$$

となる.

上式において, V_0 は x_0 における剪断力, V は x における剪断力である. 荷重曲線の下面積を足し合わせることは, 通常, 剪断力線図を作図するための簡単な方法である²⁴.

C.2.2 曲げモーメントに関する関係式

次いで, 同様な議論が, 曲げモーメントに関して適用される ([8], p..284–285.).

図 (5/4) の要素の平衡条件は, モーメントの和がゼロであることも要求する. この要素の左側に関するモーメントの和は, 次のようになる.

$$M + wdx \frac{dx}{2} + (V + dV)dx - (M + dM) = 0$$

二つの M は消し合い, $w(dx)^2/2$ と $dVdx$ の項は, 残りの項に比べて位数が高い微分であるから, 落としてよい. こうして, 残りは,

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (5/11)$$

となる. この式は, 剪断力が, いたるところ, モーメント曲線の傾きに等しいことを表している.

...

²⁴定積分が面積に対応することの直接的な指摘は, 本文には与えられていない. 数学の公式集である Appendix C/12 において, 数値積分の方法を扱う際に触れられる程度である. なお, 実例の計算においては, しばしば, 「積分計算」にかえて, 初等的な面積計算が用いられることもある.

等式 (5/11) を積分をすれば、モーメント M を剪断力 V の言葉で表すことができ、

$$\int_{M_0}^M dM = \int_{x_0}^x V dx$$

つまり、

$$M = M_0 + (\text{\textit{x}}_0 \text{ から } x \text{ までの区間における剪断力線図の下の領域の面積})$$

となる。ここで、 M_0 は x_0 における曲げモーメント、 M は x における曲げモーメントである。外からのモーメントが働いていない梁の場合、 x_0 における $M_0 = 0$ であり、任意の断面 (section) における全モーメント (total moment) は、この断面までの剪断力線図の下の面積に等しくなる。剪断力線図の下の面積を足し合わせることは、通常、モーメント線図を作図するための最も簡単な方法になる。

V がゼロの点を通り、 $dV/dx \neq 0$ であるような x の連続関数であるなら、そのような点で $dM/dx = 0$ となるから、曲げモーメント M は最大値もしくは最小値をもつことになる。

C.2.3 積分可能性についてのコメント

最後に、積分可能性についての“数学的な”コメントがある ([8], p.284).

等式 (5/10) と (5/11) を結びつけば、

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \quad (5/12)$$

とならなければならない。こうして、 w が x の既知の関数であれば、モーメント M は二度積分することで得ることができる。ただし、積分の極限が、各々の時間において適切に値をもてば、であるが²⁵。この方法は、 w が連続関数であるときのみ、用いることができる [原註： w が x の不連続関数のとき、不連続点を含む区間上で剪断力 V とモーメント M を解析的に表示することを許すような、シンギュラリティ関数 (singularity functions) と呼ばれる表式 (expression) の特別な集合を導入することが可能である。こうした関数は、本書では扱わない。]。

D 連続和としての積分 — セントロイド計算

有限個の量の和 \sum に対して成り立つ性質を、連続的に分布している量に一般化するとき、 \sum を \int に替えるという、いわば“記法としての「積分」”は、多くの箇所に現われる。

また、同じ「積分」ではあっても、単なる「記法」としての積分ではなく、実際の計算に適したものを与えるには、対称性の利用や、積分要素の選定など、種々の工夫が必要になる。

そうした「積分の用法」について、本節では、初出でもある「セントロイドの計算」を話題として、眺めてみることにしたい。

D.1 重心・質量中心・セントロイド

D.1.1 重心の決定

任意の形状の3次元的物体をとる。重力が同一方向に一様な力の場合である場合に、この物体の重心を決定することを考えてみよう ([8], pp.. 237 – 238).

²⁵[原文] provided that the limits of integration are properly evaluated each time.

任意の物体の重心の位置を数学的に決定するために、**モーメントの原理**²⁶を平行な重力系²⁷に適用する。合力としての重力 W の任意の軸に関するモーメントは、この物体の無限小の要素 (infinitesimal element) として扱われるすべての質点 (all particles) に作用する重力 dW の、同じ軸に関するモーメントの和に等しい。すべての要素に作用する重力の合力は、この物体の重量 (weight) であり、和 $W = \int dW$ によって与えられる。ここで、モーメント法則を、 y 軸、例えばだが、に関して適用してみると、この軸に関する要素重量 (elemental weight) のモーメントは $x dW$ であり、物体のすべての要素に対するこうしたモーメントの和は $W = \int x dW$ となる。このモーメント和は、和のモーメント $W \bar{x}$ に等しくなければならない²⁸。こうして、 $\bar{x} W = \int x dW$ が得られた。

他の二つの成分についても同様の表式が得られるから、次のように重心 G の座標を表すことができる。

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W} \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W} \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W} \quad (5/1a)$$

三番目の等式に現われる重力の物理的なモーメントが見えるようにするためには、物体の向きを変えて z 軸が水平になるように置くとよいだろう。本質的なことは、各々の表示式の分子が**モーメントの和**を表す一方で、 W と G の対応する座標を掛け合わせたものが**和のモーメント**を表していることを認識することである。このモーメント原理は、力学の全体を通じて繰り返し用いられることがわかるだろう。

²⁶Principle of Moments. 物体に複数 (有限個) の力が作用しているとき、物体を構成している部分のモーメントの和が、力の和 (合力) のモーメントに等しいという原理。第2章で導出されている。

²⁷鉛直方向が z 軸方向であるとする。

²⁸ \bar{x} は、重心の x 座標。

D.1.2 質量中心

一様性の条件の下で、重心の位置は重力に無関係となる。この点は、物体の質量分布だけで決まることから、「質量中心 (center of mass)」と呼ばれる。

考えている物体の密度 (density) [単位体積あたりの質量。座標の関数として表示される] を ρ とすると、質量中心の表示式は、重心の公式を書き直して、次のようになる。ただし、 dV は、体積の微分要素である ([8], p.239)。

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\rho dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\rho dV}{\int \rho dV} \quad (5/3)$$

D.1.3 セントロイド

質量中心の公式 (5/3) において、密度 ρ が一様であれば、 ρ の寄与は分母と分子で打ち消しあう。こうして得られた表示式は、純粋に物体の幾何学的な性質を表現することになる。このように、計算が幾何学的な形状のみに関係するという意味をこめて、得られた点を「セントロイド (centroid)」と呼ぶ。

セントロイドの計算は、物体の形状を線状、面状、立体状にモデル化することに拠って、三つの異なるカテゴリーに分かれることになる ([8], pp..240–241)。

(1) 曲線

長さが L である曲線分を、断面積 A と密度 ρ が一様な針金だと考えれば、セントロイド C の座標は、線要素 dL を用いて、次のように書ける。

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L} \quad (5/4)$$

(2) 曲面

同様にして、面積 A の曲面分のセントロイド C の座標は、面積要素 dA を用いて、次のように書ける。

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A} \quad (5/5)$$

(3) 立体

体積 V の立体のセントロイド C の座標も、同様に考えれば、体積要素 dV を用いて次のように書ける。

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \quad (5/6)$$

なお、以上の諸々の表示式において、積分記号 \int の役割は、連続的な分布における「和の記法」としてのものであることに注意しておこう。

D.2 計算実施にあたっての留意事項

D.2.1 対称性を用いた計算の簡易化

重心やセントロイドの計算を実際におこなうためには、計算を簡易化するための工夫が必要になる。

もっとも、ここで説明される工夫は、人工的な工夫というよりは、物体の形状の特徴をうまく利用するという意味で、本質的なものである。

本節で扱われるのは、座標系の設定において、どのように対称性を利用するかということである ([8], p.239).

ほとんどの問題において、質量中心の位置の計算は、参照軸系 (reference axes) を上手く選ぶことで、簡易化することができる。一般に、この軸系は、境界の方程式 (the equations of the boundaries) を出来る限り簡易化するよう取るべきである。こうして、円形の境界をもつ物体には、極座標が有効になる。

もうひとつの重要なヒント (cue) は、対称性 (symmetry) を考慮することから得ることができる。均質 (homogeneous) な物体において、対称性の軸、もしくは平面、が存在するときは、常に、座標軸や座標平面をこの軸や平面に一致するように選ぶべきである。対称的な場所にある要素のモーメントは常に打ち消しあうが、この物体はそうした要素の対 (pair) から構成されていると考えることができるから、質量中心は常にこの軸もしくは平面上にあることになる。

...

対称性を利用すれば、存在すればだが、(質量中心) G の位置を見つけることはより容易となる。

D.2.2 積分要素の選択

次に、積分要素の選び方についての説明に耳をかたむけてみよう ([8], p..241–243).

理論の主要な困難は、しばしば、その概念 (concepts) にあるのではなく、それを適用する手続き (procedures) にある。質量中心やセントロイドの場合、モーメント原理は十分に単純 (simple) であるが、困難なステップは、微分要素の選び方と積分式を立てる (setting up) ことである。

(1) 要素の位数 (Order of Element)

可能な限り、高次の要素はさしおいても、一つの積分で全体の形状 (entire figure) を覆うことが望めるような1次の微分要素を選ぶべきである。

...

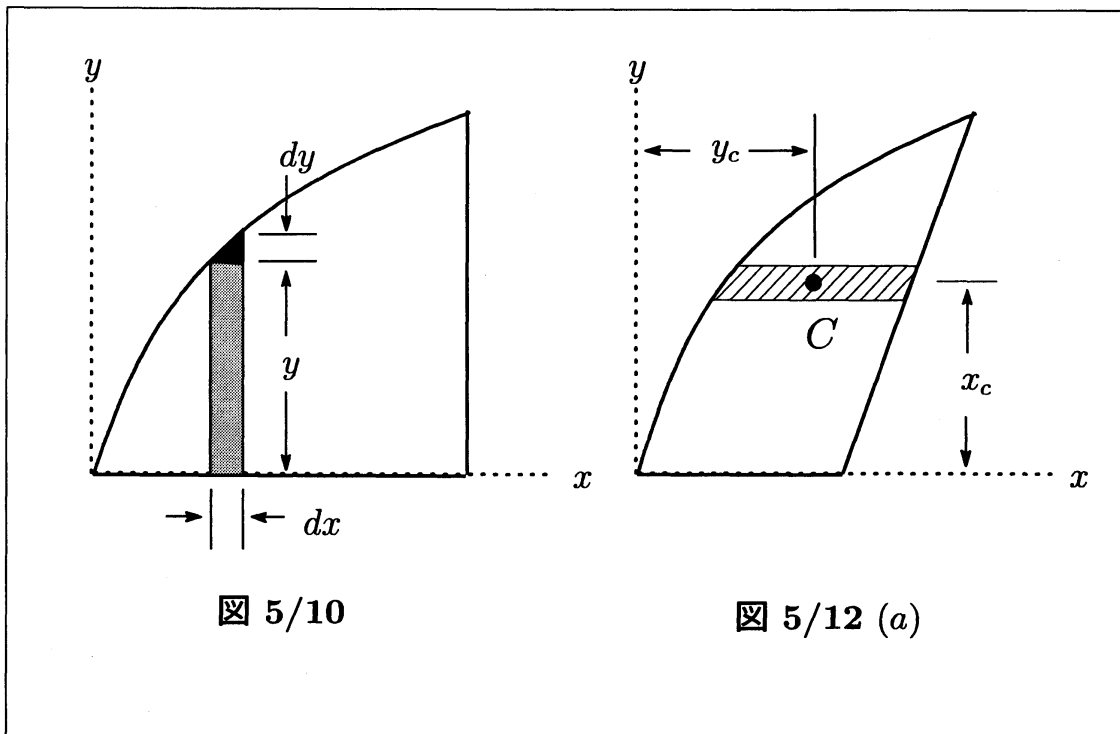
(2) 連続性 (Continuity)

可能な限り，問題の形状を覆うような一回の連続的操作で積分できる要素を選ぼう²⁹。

...

(3) 高次の項の切り捨て (Discarding Higher-Order Term)

高次の項は，低次の項と比較した上で，常に取り去ってもよい (1/7 節参照)。こうして，図 5/10 の場合，曲線の下領域 (area, 面積) の垂直な細片は，1 次の項 $dA = ydx$ で与えられることになる。2 次の三角形形状の領域 $\frac{1}{2}dxdy$ は，切り捨てられる。極限においては，もちろん，誤差 (error) はない。



²⁹[原文] we choose an element which can be integrated in one continuous operation to cover the figure.

(4) 座標系の選択 (Choice of Coordinates)

一般論 (As a general rule) として、座標系は、問題の図形の境界の形状に適したものを選ぼう。

...

(5) 要素のセントロイド座標 (Centroidal Coordinate of Element)

1次もしくは2次の微分要素を選んだとき、その微分要素のモーメントを表示する際のモーメント・アーム [moment arm. モーメントの基準点と力の作用線との距離] として**要素のセントロイドの座標**を用いることが本質的である。こうして、図 5/12(a) の領域の垂直な細片の場合、要素 dA の y 軸に関するモーメントは、 $x_c dA$ になる。ただし、 x_c は、この要素のセントロイド C の x 座標である。 x_c はこの領域のいずれかの境界を記述している x ではないことに注意しよう。この要素の y 方向についても、二つの境界の y 座標についての極限において、要素のセントロイド y_c がモーメント・アームであることは同様である。

...

こうした諸例を念頭において、等式 5/5 と 5/6 を次の形に書き直しておく。

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int z_c dA}{A} \quad (5/5a)$$

および、

$$\bar{x} = \frac{\int x_c dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y_c dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z_c dV}{V} \quad (5/6a)$$

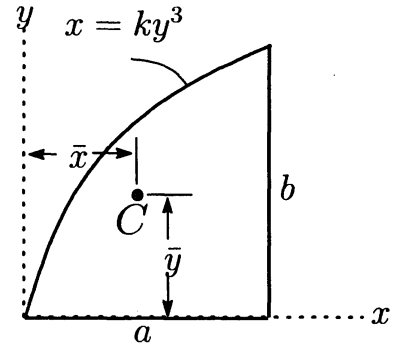
となる。

D.3 計算の実例

例題 5/4

$x = 0$ から $x = a$ の間にある曲線 $y = kx^3$ の下の領域のセントロイドの位置を求めよ。

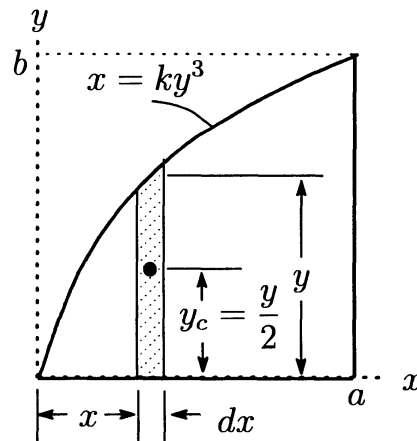
([8], p.246.)



解法

領域の垂直要素 $dA = ydx$ を図のように選ぶ。セントロイドの x 座標は、等式 (5/5a) の最初の項から求まる。すなわち、 $[A\bar{x} = \int x_c dA]$ より、

$$\bar{x} \int_0^a y dx = \int_0^a x y dx$$



$y = (x/k)^{1/3}$ と $k = a/b^3$ を代入して積分すると、

$$\frac{3ab}{4}\bar{x} = \frac{3a^2b}{7} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{4}{7}a \quad (\text{答え})$$

等式 (5/5a) の二番目から y 座標を求める場合、長方形要素のセントロイドの座標は $y_c = y/2$ になる。(ここで、 y は曲線の方程式 $x = ky^3$ によって規定される細片の高さである。)

こうして、モーメント原理より、 $[A\bar{y} = \int y_c dA]$ だから、

$$\frac{3ab}{4}\bar{y} = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y dx$$

$y = b(x/a)^{1/3}$ を代入して積分する.

$$\frac{3ab}{4}\bar{y} = \frac{3ab^2}{10} \quad \therefore \bar{y} = \frac{2}{5}b \quad (\text{答え})$$

D.4 補 足

積分計算に関連して微分積分の他の技法が使われている例に、第 5/8 節 **フレキシブル・ケーブル** 中の**放物ケーブル**に関する部分がある ([8], p..296–297). そこでは、原始関数が初等的に求まらない場合の定積分の値を評価するために、被積分関数を級数展開するという方法が用いられているが、紙面の都合もあり、本付録では取り上げない.