数理解析研究所講究録
第1711巻 2010年 166-203

学校教育の教科内容の背景にある数学の事例研究
～歴史的状況や社会的状況と関連して～

中部大学・現代教育学部　金光三男（Mitsuo Kanemitsu）
College of Contemporary Education
Chubu University
鹿児島大学・教育学部　安井孜（Tsutomu Yasui）
Faculty of Education
Kagoshima University
鹿児島大学・教育学部　磯川幸直（Yukinao Isokawa）
Faculty of Education
Kagoshima University
奈良教育大学・数学教室　河上哲（Satoshi Kawakami）
Department of Mathematics
Nara University of Education
大阪府立大学大学院・理学系研究科　山中聡恵 (Satoe Yamanaka)
School of Science
Osaka Prefecture University

0. 序

研究チーム第３班は、「小学校・中学校・高等学校における算数・数学の教科内容の背景にある数学の事例」を探求することを目標とした。

教員養成系大学・学部に勤めている数学教員としては、学生に対し、教師として必要な数学能力の形成と向上を強く意識して、日々、大学の授業やセミナーに取り組んでいる。しかしながら、学生の教育実習や現場での授業を参観する度に、小学校における算数教育、中学・高校での数学教育の現状に、大変な危機感を抱いている。数学に対する自信の無さから教科書中心に陥り、生徒の質問や「つぶやき」に的確に答えられない教師が多く散見される。

このような現状に対し、教科内容の背景にある数学の多くの事例を紹介することにより、学問としての数学の立場から学校教育現場の教科数学の内容を見通し、その教科内容の背景にある数学を通して、数学教師を目指す学生及び現職の教員の疑問「なぜこの内容を教えるのか。なぜこのような方法で教えるのか。」などへの回答を彼らに提示することができる。このことにより、彼らの数学観の醸成に協力することができる。

更に、数学の体系性を理解して、研究する数学と教育する数学の関連性を強く意識して、より深く理解しておくことは、現場での授業の実践力の向上に役立つものと期待している。

以上のように、学校教育の教科内容の背景にある数学、その歴史的背景、社会的背景を理解しておくことは、数学教師の数学観、教材分析力・開発力の向上に有効であると考える。

研究チーム第３班は、平成２１年７月発行の数理解析研究所講究録1657「数学教師に必要な数学能力形成に関する研究」において第７論文で３つの事例を紹介した。

本講究録においては、５人による下記の４編の論文において、８個の事例を紹介する。

目次

1.において、演算九九の背景にある数学、「組み合わせ」の背景、及びグラフを活用した教材について説明する。

2.において、三角形の面積の公式（小学校５年）に比べ、角錐・円錐の体積の公式（中学１年）の求め方の説明がなぜあれほどに数学的に杜撰なのかを、その背景にある数学との関連で説明する。

3.においては、著者自身がポリア著「数学の発見的解き方」によって導かれて、再発見した４つの事例（統計、整数の剰余、コンピュータによる引き算、３次方程式の解法）を紹介する。

4.においては、関数の諸性質（比例の関係、指数法則、対数法則、三角関数の加法定理など）を位相群の連続な準同型写像という観点から体系的な理解ができることを紹介する。

平成２２年度は、新しいメンバーを加え、より多くの事例を開発探求しそれらの成果を紹介する予定である。

1. 学校数学における二つの教材の数学的背景と発展的な事例

中部大学・現代教育学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education,
Chubu University

1. はじめに

小学校における算数では, 子どもの「つぶやき・質問」や「疑問」などを敏感にキャッチして教材に反映させることも必要である。教師は常に子どもたちのこのような声を身近に聞いている。これは当然中学校や高等学校そして大学で学ぶ数学へと繋がりを持ち発展していく内容も多い。特に中学校・高等学校の教材の内容は, その背景として大学の数学の内容が深く関わってくる。

このようなものとして最初に, 小学校における九九を, 次に高等学校の数学である「組み合わせ」に関する教材の背景にある数学の事例および簡単に歴史的状況に関して述べる。小・中学校で文字式など内容の一部が重複されていて, スパイラルな指導が導入されている。九九の表から小学校の算数と中学校の数学を関連付けて, その内容を小学校・中学校教材に相互に利用する必要性を述べる。

次に「組み合わせ」に関して特に大学の数学 (特に線形代数の行列・行列式および固有多項式など) との関連を中心にして同様に小論を述べてみよう。

ここで述べた見方をした題材が必ずしも児童・生徒に適当で意欲を持たせる題材とはなりにくいかもしれないが, 例えば, 小学校で述べれば, 学習指導要領にあるように, スパイラル方式, 算数・数学の活用・有用性をキーワードとして, また系統性を充実して内容の増加されたことなどを意識して, また黒木哲徳 [Ku, 2009 年] を参考にして, 今後検討を重ねて考察・研究して行きたい。

2. 教科内容の具体的な事例および関連した歴史など

事例 1. 九九の表から出た子どもの質問の数学的背景

小学校２学年の２の段の九九 (を拡張した) の表から, 九九の中の決まりを見つける授業において次のような子どもの考え方が出たと, 志水廣著 ([S1, 1992 年]) に記してある。

・順平君の考え：「(答え) − (前のかける数) は, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 になる。」
この意味を説明しよう。次の九九の表を下の行から上の行に向けて見てみよう。

$$10 \qquad 2\times 8 = 16$$

$$\boxed{11} \qquad 2\times \boxed{9} = 18$$

$$2\times 10 = \boxed{20}$$

一番最初の$\boxed{11}$の数字は, $2 \times 9 = 18$に出てくる2と9を加えた$2 + 9 = 11$を表している。次の$\boxed{9}$が順平君の言っている「前のかける数」であり, その次の$\boxed{20}$が「答え」であり, 順平君の言っている「(答え) − (前のかける数)」は, この場合「$20 - 9 = 11$」である。他も同様である。

・洋平君の考え：「6 + 7 = 13で, 12と14の間になっている。」

$$8 \qquad 2 \times \boxed{6} = \boxed{12}$$

$$9 \qquad 2 \times \boxed{7} = \boxed{14}$$

ここに出てくる枠付きの数字が洋平君の言っている数字である。

これらについて志水廣 ([S1, 1992年]) には, 理由は省略してあり書いてない。また文科系の大学生に聞いても明確な解答が得られなかった。
そこでこの2つの考えについて数学的背景を探ってみよう。

まず順平君の考えでは, $2 \times a - (a-1) = 2a - a + 1 = a + 1 = 2 + (a-1)$となる。2の段の九九で$2 \times (a-1)$でこの積の各桁の和である$2 + (a-1) = a + 1$を作ると, $a = 9$のとき, $2 \times 9 = 18$で$2 + 9 = 11$, $a = 8$のとき2×8で$8 + 2 = 10$, $a = 7$のとき, $2 + 7 = 9$, 以下同様にして, 8, 7, 6, 5, 4, 3となっていく。

次に洋平君の考えは, $2 \times (m-1)$と$2 \times m$を考えると, 洋平君は,

$$(m-1) + m = 2m - 1 = \frac{(2 \times (m-1) + 2 \times m)}{2}$$

だから正しいことが言える。これは13は12と14の平均であり, 一般には$2 \times (m-1)$と$2 \times m$の平均になる。加法の平均が出てきたときに教材として利用できる。

もう一つの例を同じく志水廣著 [S2, p.55, 1991年] から, 子どもの見つけた3の段の九九から考察してみよう。

「3の段の九九」の決まりを小学校2年生のある子どもは「答えからかける数を引くと, 2, 4, 6, 8, $\cdots$と2の段の九九になる」ことを見つけた。文字式を使用すれば, $3 \times a - a = 2a$だから正しいことはすぐに分かる。
これは「3の段の九九」に限らず, 何の段でも「答えからかける数を引くと, 一つ前の段の九九になる」。理由は, aの段の九九でかける数がmなら, $am - m = (a-1)m$となることからすぐに分かる。
逆に, 中学校で$3a - a = 2a$の指導で, 九九を持ち出して「3の段の九九」で「答えからかける数を引くと2の段の九九になる」ことを中学生に見つけさせると, 文字の使用の良さが分かると思われる。

このように中学での文字の復習や新学習指導要領において小学校で文字が出てきたときの発展した材料としてこの九九の表を利用して興味を引き起こすことができるかも知れない。

更に「8の段の九九」について古藤怜氏は次のように論文([Ko, 1998年])の中で述べている。「8の段の各数：$8, 16, 24, 32, \cdots$ について, 1位と10位の数字を加えると, 次のことが分かる。即ち：$8 \times 1 = 8, 8 \times 2 = 16 \rightarrow 7, 8 \times 3 = 24 \rightarrow 6, 8 \times 4 = 32 \rightarrow 5, 8 \times 5 = 40 \rightarrow 4, 8 \times 6 = 48 \rightarrow 12 \rightarrow 3, 8 \times 7 = 56 \rightarrow 11 \rightarrow 2, \cdots$ つまり, $8, 7, 6, 5, \cdots$ と1ずつ小さくなっている。何故だろう？。このことの確かめは, 中学校の式表示のアイデアが必要かもしれない。」

この理由を考察してみよう。8の段のどこか一つの$8a$とその次の数$8(a+1)$を10進法で書いてみる。すると, $8 \times a = 10b + c$(bは0でない自然数, cは負でない整数とする)及びそれと隣り合った大きい数$8 \times (a+1) = 8a + 8 = 10b + c + 8 = 10(b+1) + (c-2)$と表わされる。この二数の一の位と十の位の数字同士を加えると, その和は$8 \times a = 10b + c$が$b + c$となり, $8 \times (a+1) = 10(b+1) + (c-2)$が$(b+1) + (c-2) = b + c - 1$となり, 差が1となり1ずつ小さくなる(金光三男・志水廣編著[SK, p.18-19, 2000年])。

このように, ここで述べた3つのことを中学校数学の文字式の教材と関連して使用するのも面白いし, 演習問題としても面白い。九九の決まりが7の段など他にも多く存在するので発展性もある。

乗法の九九は, 奈良時代に中国から輸入され, 当時は九九　八十一からよびはじめられていた。これは, 9は一番大きい数であり, 9を9回足すより, $9 \times 9 = 81$とする方が, 労力の節約をはかることが出来るからと佐藤俊太郎の著書[S, 2005年]に書いてある。更に同書には, 「$2 \times 2 = 4$」などは, 読み上げるときに「ににんが4」と「が」を入れるが, 他にも「にしが8」などと「が」の入る九九は, 算盤で「十」の玉を動かさないという意味があるそうである。
万葉集の中には「二 八十一」を, 九九＝八十一を使用して「にくく」と読ませるなど戯れ書きが散見されることが, 石橋康徳著「算数学一学習材と理論」([I, 2006年])に記載されている。同様のことが参考文献にあるインターネット[H]を調べると, 「十六」と書いて「しし」, 「二二」と書いて「し」と読ませる言葉遊びがあったことや割り算の九九についても記されている。割り算の九九は, 二一, 天作の五(にいちてんさくのご), 二進の一十(にっちんのいんじゅう)などである。このような内容の引継ぎも文化的意味で無意味ではないとも考えられる。

事例2．高校の「組合わせ」の教材の背景・発展

高等学校の学習指導要領である文部科学省編[M, 2006年]では, 中学校で樹形図など利用し起こり得るすべての場合を簡単に知ることができる程度の事象の確率を扱っている。そのとき, 起こり得る場合を順序よく整理して数え上げる順列・組み合わせについて内容の理解とともに, 身近にある事例をもとにして具体的な場面に活用できる認識をさせることが記載されている。ものを取り出す順序を無視した組を作るときに, その組の1つ1つ

を組み合わせといい, 異なる n 個のものから r 個を取り出して組み合わせを作るときその総数を ${}_nC_r$ と表す。この 1 組について, 1 列に並べる並べ方は $r!$ 通りできるので, 異なる n 個のものからなる r 個を取り出して並べる順列の総数を ${}_nP_r$ と書くと ${}_nP_r = {}_nC_r \times r!$ となるから,

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

となる。

この記号は $C(n,r)$ とか, スイスの数学者オイラー (1707-1783) の使用した

$$ \binom{n}{r} $$

とも書かれ, 2 項係数と呼ばれている。

三項係数とは, G. ポリア ([P, 1964 年]) によれば, 次の 2 条件によって定義される数を, 三角形状に無数に並べた配列をいう。

境界条件とは, 先ず各々の水平線 (底辺ともいう) は, 0, 1 で始まり 1, 0 で終わっていて, 第 n 辺は $2n+1$ 個の数からなり, 従って $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対しては第 n 底辺の $2n-3$ 個の数の境界条件はまだ定義されない。また回帰公式とは, 境界条件ではまだ定義されていない第 $n+1$ 底辺の任意の数を, 第 n 底辺上の, それの北西, 北, 及び北東隣りにある三つの数の和として決める方法を言う。(例えば, $45 = 10 + 16 + 19$)。

第 n 辺の, 1 で始まり 1 で終わる数は, $(1 + x + x^2)^n$ を x の冪級数に展開したものの係数である。このとから, 名前が三項係数と呼ばれるそうである。

最初の数行を書くと,

第 1 底辺 (水平線) は, 0 1 0; 第 2 底辺は, 0 1 1 1 0; 第 3 底辺は, 0 1 2 3 2 1 0; 第 4 底辺は, 0 1 3 6 7 6 3 1 0; 第 5 底辺は, 0 1 4 10 16 19 16 10 4 1 0; 第 6 底辺は, 0 1 5 15 30 45 51 45 30 15 5 1 0。

また第 7 底辺は, 0 1 6 21 50 90 126 141 126 90 50 21 6 1 0, $\cdots$ となる。

上記の底辺を順にパスカルの三角形のように並べたものが三項係数である。この表は中央の縦の線に関して対称である。冪級数 $(1+x+x^2)^n$ において, $x = 1$ とおくと 3^n だから, 三項係数を水平線 (底辺) の和は 3^{n-1} となる。同様に $x = -1$ とおくと, 冪級数 $(1-1+1)^n = 1$ だから, 第 n 底辺の数字を＋から交互に符号を変えると和が 1 になる。これらは高校の教科書にある二項係数に関する式の拡張となっている。

オイラーに関連して虚数の話を少し述べてみよう (片野善一郎 [K, 1995 年])。最初に虚数に注目したのは, イタリアのカルダノ (1501-1576) である。彼は 10 をその積が 40 になる二つの数に分解することは不可能であるが, 形式的な解を $5+\sqrt{-15}, 5-\sqrt{-15}$ になると述べている。彼は虚数を全く理解できなかったが, 不可能なものを書き表すことによって象徴的な意義を与えたことは素晴らしいことであった。イタリアのボンベリ (1530-1572) は, 三次方程式 $x^3 = 15x + 4$ の解が因数分解することにより, $4, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ の 3 個であることが分かるが, カルダノの公式に代入して求めると, $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-12}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-12}}$

が $2+\sqrt{-1}, 2-\sqrt{-1}$ と変形できることを示した。ボンベリは虚数の計算を正しく理解していた。$\sqrt{-1}$ の代わりに現代の虚数単位 i を最初に用いた。フランスのデカルト, ライプニッツ達も虚数の理解を想像上の数の段階に止まっていた。最初に虚数を現実的なイメージとして与えたのはガウスであった。このように虚数は長い間そのイメージを掴むの時間がかかったのである。

都合により三項係数を先に述べ順序が逆になったが, 高校の数学の教科書には2項係数は2項定理の展開式の係数として得られる。係数を並べるとパスカルの三角形と呼ばれている。パスカルは17世紀のフランスの数学者でもあり, 哲学者でもある。更に物理学の研究も行い, 計算機の創始者としても知られている (仲田紀夫・吉村啓 [NY, p.23, 1982年])。

古藤怜編著 [Ko 2, 74-75, 1982年] によれば, 横 $(m+1)$ 本, 縦 $(n+1)$ 本の街路をもつ町で A_0 地点から P_n 地点までの最短路を通って行くには, 何通りの方法があるか。縦の路を $A_0, B_0, C_0, \cdots, P_0$ とし, 横の街を $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n$ とする。P_0 と A_n の交点を P_n とする。この問題はよく知られているように, 重複組み合わせ

$$ {}_{m+1}H_n = {}_{m+n}C_n = \frac{(m+n)!}{m!n!} $$

である。A_0 から格子点の各地点へ至るにはいく通りの方法があるかを記入すると, A_1 地点が 1, B_0 地点が 1 (これがパスカルの三角形の第1底辺; 1 1), A_2 地点が 1, (B_0, A_1) 地点が 2, C_0 地点が 1 (これが第2底辺の 1 2 1), A_3 地点が 1, (B_0, A_2) 地点が 3, (C_0, A_1) 地点が 3, D_0 地点が 1 (これが第3底辺の 1 3 3 1), $\cdots$ となり, A_0 から P_n を縦にして見るとパスカルの三角形が出てきているのが分かる。$(m+1)$ 行, $(n+1)$ 列を通る格子点に対して, ${}_{m+n}C_n$ が対応する。これは帰納的な考えである。

また文部科学省編 [M, 2006年] においては, 「第5節　数学A ア 順列・組合せ」において, 「組み合わせの総数が ${}_5C_2$ などの具体例などを通して, ${}_nC_r$ を理解させる。」とある。

大矢雅則・岡部恒治他の教科書 [OO, 2006年] では, 組み合わせを順列との関係で定義し, ${}_nC_r$ の性質として, ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ とパスカルの三角形の回帰公式と呼ばれている

$$ \binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} $$

が述べてある。この前者の事実 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を G. ポリアは [P, 1964年] において, 幾つか説明をしている。それを述べてみよう。

(1) 街路網は, パスカルの三角形の頂点を通る鉛直線に関して対称である (上述)。

(2) これと同じ対称性は, 回帰公式にも境界条件にも現れている。

(3)

$$ \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{n-r} $$

(4) $(a+b)^n$ は a と b を入れ替えても不変であるから, その展開式で $a^r b^{n-r}$ と $a^{n-r} b^r$ と係数が同じでなければならない。

(5) n 人からなる一つの集合から, r 人から成る一つの部分集合を取り出せば, あとに $(n-r)$ 人から成る他の一つの部分集合が残る。従って, 一方の集合と丁度同じ集合の他方の集合が存在する。

大矢雅則・岡部恒治他の教科書 [OO, 2006 年] には, 組み合わせの考え方の応用という項目がある。ここでは次のような例題・問題があげてある。

例題 7(大矢雅則・岡部恒治他 [OO, p.29, 2006 年]) 円周上に異なる 8 個の点がある。これらの点を頂点とする三角形は, 何個作れるか。

解答は, 3 個の点を一組決めると三角形が 1 個作れるので, 求める三角形の個数は $_8C_3$ である。

例題 7 の類題として, 練習 31(大矢雅則・岡部恒治他の [OO, p.29, 2006 年]) では, 正六角形について, 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数, 2 個の頂点を結ぶ線分の本数, 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数を求める問題があげてある。

また例題 8 では, 5 人の男子の中から 2 人, 4 人の女子の中から 2 人を選んで 4 人の組を作るとき, 何通りの組が作れるか。解答は, 積の法則を使用して, $_5C_2 \times {}_4C_2 = 60$。

この例題 8 の背景には, 完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ の四角形の個数を求める問題がある。m 個の頂点集合を A, B を n 個の頂点集合とし, $A \cap B = \phi$ となっている。この A から 2 個の頂点を選び, B から 2 個の頂点を選んで四角形を作ると, $_mC_2 \times {}_nC_2 = \frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ 個できる。上記の例題 8 では, $m=5, n=4$ の場合であるから, $\frac{1}{4} \times 20 \times (5-1)(4-1) = \frac{1}{4} \times 20 \times 12 = 60$ となり上での解に一致する。

例題 8 を男子 5 人の頂点集合と女子 4 人の頂点集合と見て, 男子同士は誰も辺で結ばれていなく, 同様に女子同士の 4 人も誰も辺で結ばれていないとする。男子と女子は誰もみんな辺で結ばれているとみなすと完全 2 部グラフ $K_{5,4}$ となる。この隣接行列 A を求めると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従ってこの隣接行列の固有多項式は

$$f(\lambda) = \lambda^{m+n-2}(\lambda^2 - mn) = \lambda^{m+n} - mn\lambda^{m+n-2}$$

となる。

2番目に高次の係数の mn は辺の総数を表しているのが, 練習31と同様にして求めることができる。この2部グラフでは三角形は出来ない。四角形は上で求めたように, ${}_mC_2 \times {}_nC_2 = \frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ であった。

一方, Y.L.Jin and M.Kanemitsu([JK, 2007年]) は頂点を共有しない2つの辺 (これを2−マッチングという) の個数 n_M に関する公式を得た。それは頂点数 (位数) が n の単純グラフ G の次数列を $(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n)$ とするとき,

$$n_M = \frac{1}{8}(\sum_{i=1}^n d_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n d_i$$

これを認めると, 完全2部グラフ $K_{m,n}$ は次数列が $(n, n, \cdots, n, m, m, \cdots, m)$ だから, 2−マッチングの個数 n_M は, $\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)$ となる.
降冪の順にした固有多項式

$$f(\lambda) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + C_3\lambda^{n-3} + C_4\lambda^{n-4} + \cdots$$

の係数間には, $C_1 = 0, -C_2 =$ 辺の個数, $C_3 = 2 \times$ 三角形の個数, $C_4 = n_M - 2n_C$ (ただし, n_C はグラフの四角形の個数) という関係があることが知られている。$0 = C_4 = n_M - 2n_C = \frac{1}{2}mn(m-1)(n-1) - 2 \times \frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ で確認ができる。

これらの固有多項式の係数とグラフとの関係の根拠に触れてみよう。

n 個の頂点を持つ単純無向グラフ G の隣接行列 $A = (a_{ij})$ は対角線要素がすべて0であるような実対称行列であるから, 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ はすべて実数である。またグラフ G の固有多項式 $f(\lambda) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda_{n-2} + C_3\lambda^{n-4} + C_4\lambda^{n-5} + \cdots$ とおくと, $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ が成立する。従って λ^{n-1} の係数を比較すると,

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$$

行列論で上記の固有多項式の係数は

$$C_1 = -\sum_i a_i$$

を使用して $C_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$。

辺の個数 (サイズ) に関しては,

$$C_2 = \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \begin{vmatrix} a_{i_{11}} & a_{i_{12}} \\ a_{i_{21}} & a_{i_{22}} \end{vmatrix}$$

を使用する。G の隣接行列の主小行列式で 0 でない要素を含むものの行列式は

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

の形である。一つの辺にこのような行列式があるので, $C_2 = (-1)^2(-1) \times$ (辺の個数) である。よって, $-C_2 = G$ の辺の個数。

次に

$$C_3 = -\sum_{i_1<i_2<i_3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

を使用して三角形の個数を求めよう。

3 個の辺に対応する行列式で G の三角形に対応するものは

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

の形であるので, $\dfrac{(-1)^3C_3}{2} =$ (三角形の総数)。故に, $C_3 = -2 \times$ (3 角形の数)。

四辺形の個数は C_4 では直接表せないが, 2 ーマッチングの個数 n_M と異なる四辺形の個数 n_C の関連を C_4 が与える。

$$C_4 = \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \begin{vmatrix} a_{i_{11}} & a_{i_{12}} & a_{i_{13}} & a_{i_{14}} \\ a_{i_{21}} & a_{i_{22}} & a_{i_{23}} & a_{i_{24}} \\ a_{i_{31}} & a_{i_{32}} & a_{i_{33}} & a_{i_{34}} \\ a_{i_{41}} & a_{i_{42}} & a_{i_{43}} & a_{i_{44}} \end{vmatrix} \quad (= n_M - 2n_C \quad (\text{N.Biggs[B, 1993 年]}))$$

が成立することが知られている。

参考文献

[B] N.Biggs, *Algebraic Graph Theory* (2nd Edition), Cambridge, 1993 年

[H] $http://www.geocities.co.jp/Berkely-Labo/6317/michijum_{10}.htm$

[I] 石橋康徳, 算数学一学習材と理論, 日本評論社, 2006 年

[JK] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with $\mathbf{Z}_n$ and their characteristic polynomials, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 11, No. 7, (2007) 81-93.

[K] 片野善一郎, 数学史の利用 (教職数学シリーズ 実践編 7), 共立出版株式会社, 1995 年

[Ko, 1] 古藤怜, 自ら学ぶ意欲を育てる算数科の指導ー Do Mathematics の視座からー, 日本数学教育学会誌, (1998)　第 80 巻　第 12 号, 210-220,　日本数学教育学会

[Ko, 2] 古藤怜, 数学科における学習指導 (教職数学シリーズ実践編 2), 共立出版株式会社, 1982 年

[Ku] 黒木哲徳, 教育実践の観点から見た教科内容とその課題ー算数科・数学科の場合ー, (数学教師に必要な数学能力形成に関する研究), 京都大学数理解析研究所講究録 1657, 2009 年

[M] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編, 1999 年, 一部補訂 2006 年

[NY] 仲田紀夫・吉村啓, 数学科での教材開発 (教職数学シリーズ　実践編　5), 共立出版株式会社, 1982 年

[OO] 大矢雅則・岡部恒治他, 改訂版　新編　数学 A , 数研出版株式会社, 2006 年

[P] G. ポリア (柴垣和三雄・金山靖夫訳), 数学の問題の発見的解き方 第 1 巻, 1964 年

[Sa] 佐藤俊太郎, 算数科教材研究, 明治図書, 2005 年

[SK] 柴田録治監修, 金光三男・志水廣編著, 愛知教育大学名古屋附属小学校算数部著, 算数科問題解決型授業作りのノウハウ, 明治図書, 2000 年

[S1] 志水廣, 算数　数と計算　授業のアイデア, 国土社, 1992 年

[S2] 志水廣, 算数科・教材開発のマニュアル, 明治図書, 1991 年

2. 三角錐の体積の背景にある数学

鹿児島大学教育学部　安井　孜 (Yasui Tsutomu)
Faculty of Education
Kagoshima University

1　はじめに

中学校の教科書 [4], [5] の三角錐の節を開いてみた．同底面，等高の円錐と円柱による紙上の実験図とともに，[5] では，次のように書かれていた．

『円錐，角錐の体積は，底面積が等しく高さも等しい円柱，角柱の体積の $\frac{1}{3}$ であることがわかっている．だから，円錐，角錐の底面積を S，高さを h とすると体積 V は次のようになる：

$$V = \frac{1}{3}Sh. \tag{1.1}$$』

中学生は，はたしてこれで納得できるであろうか？教師自身，この説明で納得できるであろうか？生徒の質問に納得できるような (証明までとは言わないまでも) 説明ができるであろうか？我々が教科専門の授業の中で，教師を目指す大学生 (中学生にではない！) に対し，この問題をどのように扱えばよいであろうか？大学で教える数学は，学校現場の教科書のような説明はしない．教育現場で教える数学と大学ので教える数学のギャップは大きい [9]．三角錐の体積を求める公式の証明は，数学Ⅲの積分 (法) の応用まで待たねばならない．しかし，小学生・中学生は積分を学校で学ばない．

教員志望の教育学部の学生はこのギャップの存在を認め，なおかつ，このギャップを，なぜこのようなギャップがあるのかも込めて，自分自身で解消しておくくらいの知識がほしい．そこには，小・中学校で教える内容の背後にある数学，大学の数学と教育現場における数学との関連付け，位置付けが見えてくるだろう [9]．小・中・高校の数学の教育内容の発展が歴史的な発展の凝縮になっていることを知るだけでなく，なぜ教科書のような教え方をせざるを得ないのかも見えてくる．三角錐の体積を求める問題はその一つの事例である．

以下の構成は次のようになる．第 2 節で学校教育における体積の扱いを分析をする．第 3 節では，ユークリッドの「原論」[12] における扱いを紹介する．第 4 節では，ヒルベルトの第 3 問題とデーンの定理の紹介をする．第 5 節では，「原論」の扱いを基本的には踏襲しながら，高校の教科書のレベルで理解できる証明を紹介する．第 6 節では，ルベーグの扱いを紹介し，第 7 節では，線形代数学による証明を紹介する．最後の第 8 節で筆者の考えを整理する．

この拙文のほとんど全ては既知のものであるが，このように一つに整理しておくことは，教員志望の大学生，現職の教員にとって，意味があると思いこれを著わす．

2　学校教育における三角錐の体積

新指導要領 [7] によれば，角柱，円柱の体積は小学校６年に降りたが，角錐，円錐の体積は現行の指導要領と同じく，中学１年で学ぶことになっている．前前回改訂された指導要領によれば，小学６年で，量と測定の項目の (１) イで「基本的な角錐及び円錐の体積の求め方について知ること，また簡単な場合について，その表面積の求め方について知ること」となっていた．錐体の体積はこのように中学校で扱ったり，小学校で扱ったりしている．そこで，現行の指導要領の下で編集された教科書の該当する部分を見てみる．

2.1　教科書における三角錐の体積

東京書籍の教科書「新しい数学１」[5] では以下のように記述されている．

まず図で，立方体の重心 O(この用語は使っていない) と各頂点を結び，立方体の各面を底面とする正四角錐が６個 (互いに合同な四角錐とは書いてないが，図から推察可能) に分解できることから，底面が 10cm の正方形，高さ 5cm の正四角錐の体積を求めさせている．次に，第１節で述べたように，

『角錐，円錐の体積は，底面積が等しく高さも等しい角柱，円柱の体積の $\frac{1}{3}$ であることがわかっている．(円錐の水が円柱の $\frac{1}{3}$ まで入った写真を見せ) 角錐，円錐の底面積を S，高さを h とすると，体積 V を求める公式は次のようになる。$V = \frac{1}{3}Sh$』

学校図書の教科書「中学校数学１」[4] を見てみると，東京書籍の教科書 [5] と同様の写真があり，同様の記述と公式 (1.1) があり，立方体を合同な３個の三角錐から構成している．

いずれの教科書も，特定の四角錐では公式が成立することと，(紙上の) 実験により，一般の円錐，角錐にも公式 (1.1) が一般に成立するらしいことを示している．

2.2　教科書における面積と体積の流れ

ここで，小学校で学ぶ三角形の面積の公式の証明 (小学校では証明という用語は使わないが) と公式 (1.1) とを，学校図書の教科書 [1]，[2]，[3]，[4] で比べてみよう．

三角形の面積の場合

４年で，正方形を基準とする単位の面積を決め，次の公式が現れる：

$$\text{長方形の面積} = \text{たて} \times \text{横}. \qquad \text{小学４年}$$

５年下では，平行四辺形を分解して長方形に直し，次の公式を得る：

平行四辺形の面積 = 底辺 × 高さ. 　　小学５年

さらに，三角形の面積は，(１) 分解合同により平行四辺形 (または長方形) を構成，または (２) 合同な２つの三角形から平行四辺形を構成し，次の公式を得る：

三角形の面積 = 底辺 × 高さ ÷ 2. 　　小学５年

三角錐の体積の場合

６年で，立方体を基準にする単位の体積を決め，次の公式が現れる：

直方体の体積 = たて × 横 × 高さ. 　　小学６年

中学１年，空間図形の単元で，四角柱は直方体とみて，

四角柱の体積 = 底面積 × 高さ 　　中学１年

と考えることができることを紹介したのち，角柱，円柱の体積の公式が与えられる：

底面積が S cm^2，高さが h cm の角柱，円柱の体積を V cm^3 とすると

$$V = Sh$$ 　　中学１年

と述べ，底面積と高さのの等しい角柱と角錐，円柱と円錐の容器を用いた写真による紙上の実験から次のように述べている：

『底面積が Scm^2，高さが $h$cm の角すい，円すいの体積を Vcm^3 とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh. 』$$ 　　中学１年

義務教育においては，三角形の面積の公式は堅固な根拠をもって得られるのに対し，角錐，円錐の体積の公式の根拠は非常に曖昧である．体積の公式の証明は紙上の実験である．教科書にあるような角錐と角柱の容器，円錐と円柱の容器は確かに市販されていが，多くの中学校がこのような容器を持っているかどうかは疑問である．そのような容器を持って実験しても，わずか１回の実験ではたしてこの公式は信用できるであろうか？

実際，円を描き，その周の長さを出来るだけ正確に測れば，円周率は 3.14 となるであろう．だからと言って，円周率が 3.14 というのは正しくないことを思い起こせばよい．

鹿児島大学教育学部付属中学校では，生徒に紙で模型をつくらせ，水の代わりに目の細かい砂で代用するとのことであった．だからと言って，(1.1) の公式が成立するとは言えない．ある特殊な四角錐に対しては公式 (1.1) が成立し，一般の角錐の場合 (1.1) がほぼ成立することを知るのみである．それでも，この方法では生徒の数だけ実験でき，公式の信頼度が高まる．数学的活動のモデルになっているという長所はある．

2.3 高校の教科書の扱い

東京書籍の教科書 [6] では，数学IIIの積分の応用の単元で体積を扱い，その例として底面積 S，高さ h の角錐の体積は公式 (1.1) で与えられることを示している．しかし，それとて曖昧さが残る (詳細は第 8 節).

直線で構成される図形に対して積分を用いるのは何か仰々しさを感じる．将来，指導要領が改訂され，角錐の体積が以前のように (1988 年改訂の指導要領) 小学校に降りてきたら，数学IIIを選択せず大学でも文系を通してきた小学校教員は，公式 (1,1) の正しいことを，彼ら自身，根拠を知ることなしに，児童と同レベルの知識で頭ごなしに教えるしかなくなる．それでも，数学 B の数列と，背理法 (数学 A) または数列の極限 (数学III) を学べば (1.1) の公式は得られることを第 5 節で紹介する．

3 ユークリッドの「原論」第 12 巻における扱い

ユークリッドの原論 [12] では，第 1 巻が平面幾何を扱い，公式があるわけではないが，事実上，小学校の教科書のように三角形の面積を求めている (「原論」における面積は量ではなく，分解合同である)．立体幾何は第 12 巻で扱っている．内容よりも記号に使われる文字 (ギリシャ文字) と文体のために，今の学生にとって読みやすいとは言えないが，落ち着いて読めば特に難しいものではない．該当する部分を紹介する．

命題 3：三角錐は，互いに合同で，全体に対しても相似な 2 つの三角錐と，体積の等しい 2 つの角柱に分解できる．このとき 2 つの角柱の和は全体の半分より大きい．

証明は，具体的に構成する．

命題 4：等高な 2 つの角錐が上のように分解されると，角錐内の角柱の体積の和は底面積に比例する (取り尽くし法).

証明：背理法による．

命題 5：等高な三角錐の体積は底面積に比例する．

証明は，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$(とアルキメデスの原理) を用いる (これが重要).

命題 6：等高な多角錐は底面に比例する．

証明：多角錐を三角錐に分解する．

命題 7：三角柱は体積の等しい 3 個の三角錐に分解できる．

証明：構成による．

以下，与えられた三角錐に対し，その三角錐と同体積の 2 つの三角錐を命題 7 の手法で構成すれば，底面を共有する三角柱が構成される．従って，公式 (1.1) が得られる．□

「原論」に現れる体積も，面積と同様,「量」ではないことが分かるだろう.「原論」において等しいというのは，分解して，必要なら同じ図形を加えて，一方から他方が構成されるとき言う．原論第 1 巻命題 38(底辺が同一で同じ平行線の間にある三角形は互いに等

しい）はその例である．この辺りの議論は「原論」[12] より砂田の本 [21, 第 4 章] の方が理解しやすい．

「原論」の証明は中学生には難しすぎるだろうし，高校生には，授業の中でするのは，時間が不足するだろう．

命題 3 を見ると，三角錐を分解して，三角柱を構成できないだろうかと考えるのは自然な発想であるが，実は，次節で説明するように，それは一般的には不可能である．

4　ヒルベルトの第 3 問題

ヒルベルトは 1990 年 8 月，パリで開催された第 2 回国際数学者会議において 23 の問題を提示した．その第 3 問題が「底面積と高さの等しい 2 つの三角錐 (四面体) の体積の等しいことの合同公理だけによる証明は可能か？」である．2 つの三角形は，その面積は底辺と高さが等しければ，底辺はそのままにして，高さを半分にした長方形を介して面積の等しいことが分かる (小学 5 年)．同様のことは三角錐でも成立するかというものである．与えられた三角錐を分解し，再構成して，同じ底面で高さが $\dfrac{1}{3}$ の三角柱が得られれば,「原論」第 12 巻命題 5 の証明にアルキメデスの原理を用いなくてすみ，大変都合がよい．

M. デーンはその年のうちに,「正四面体を分解合同により同じ底面で高さ 3 分の 1 の三角柱に直すことは不可能である.」と，ヒルベルトの第 3 問題を否定的に解決した．従って，一般には，三角錐を分解合同により同底面の三角柱を構成することはできないことになった．その証明には，今ではデーン不変量と呼ばれる不変量を用いる．詳細は，例えば，ポルチャンスキーら [16] の「面積と体積，第 2 章」，ハーツホーン [15] の「幾何学 I，第 27 節」ほか,「天書の証明，第 7 章」[13],「分割の幾何学，第 4 章」[21] にある.「見える数学の世界」[22] には解説が載っている．

さらに，同底面，等高であるが，同形でない 2 つの三角錐で，分解合同により，一方は三角柱にでき，もう一方はできない例もある [13, pp. 63-64], [11, p. 47].

三角形の面積には，実数の連続性は使わなかった．三角錐の場合，原論第 12 巻命題 5 に現れたように，実数の連続性 (アルキメデスの原理) を必要とした．不可能性にはこのように，数の構造が背景にある．さらに，初等的に扱うことのできた 2 次元 (多角形) とそれを越えた議論を必要とする 3 次元 (多面体) という，次元の差というのも大きい例であることが分かる．

小学校教員，中学校数学教員を目指す大学生は，角錐と角柱が，一般には分解合同でないという事実だけは知識として持っていることを望む．この不可能性のゆえに，同底面，等高な角錐と角柱の容器で教科書のような実験をする意味がある．

5　数列の極限を使う証明(高校3年で可能)

以下，空間図形 K の体積を $V(K)$ で表し，平面図形 K の面積を $S(K)$ で表す．

アルキメデスの原理を直接には用いず(陰には用いる)，高校で学ぶ程度の厳密性を用いて公式(1.1)の証明を紹介する．本質的には，原論第12巻命題5と同値である．

5.1　数列(数学B)と極限の性質(数学Ⅲ)を用いる証明

ここで，極限の性質というのは，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ と極限の和の公式とはさみうちの原理である．

公式(1.1)の証明 (cf. [22, pp. 364-365])：三角形 $\triangle ABC$ を底面とし D を頂点とし，底面積 $S=S(\triangle ABC)$，高さ h の三角錐 K を考える．線分 DA を n 等分し，その点を上から $A_1, A_2, \ldots, A_n(=A)$ とする．点 A_k を通り，底面と平行な平面と，線分 DB, DC との交点をそれぞれ B_k, C_k $(1\le k\le n)$ とおく．このとき，三角形 $\triangle A_kB_kC_k$ $(1\le k\le n)$ は $\triangle ABC$ と相似である．$\triangle A_kB_kC_k$ を上底とし，A_kA_{k+1} を母線とする三角柱 K_k $(1\le k\le n-1)$ と $\triangle A_kB_kC_k$ を下底とし，A_kA_{k-1} を母線とする三角柱 L_k $(1\le k\le n)$ とが構成される．このとき，

$$V(K_k)=V(L_k)=S(\triangle A_kB_kC_k)\times\frac{h}{n}=\frac{h}{n}\frac{k^2}{n^2}S=\frac{k^2}{n^3}hS.$$

集合として $\bigcup_{1\le k\le n-1}K_k\subset K\subset\bigcup_{1\le k\le n}L_k$ だから

$$\sum_{1\le k\le n-1}\frac{k^2}{n^3}hS<V(K)<\sum_{1\le k\le n}\frac{k^2}{n^3}hS. \tag{5.1}$$

従って，

$$\frac{hS}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})<V(K)<\frac{hS}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}).$$

ここまでは高校数学Bの範囲である．ここで高校数学Ⅲ，数列の極限の単元における極限の和の公式と $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$(アルキメデスの原理と同値だが，高校生には直観的に受け入れやすい)とを用いれば，公式(1.1)が得られる．□

区分求積法を用いても公式(1.1)は求められるが，区分求積法は数学Ⅲの積分の単元に入る．そこでは，積分を用いて級数を求めるのが本来の目的である．

5.2　数列と背理法(数学A)を用いる証明

上で用いたアイディアにより，背理法(数学A)と自然数の数列 $\{n\}_{n\in N}$ が上に有界でないことを用いれば，数学Bの数列の範囲内で，次の命題が証明できる．

補題 5.1 底面積と高さの等しい2つの三角錐は体積も等しい．

証明: K, K' を，底面積がともに S で，高さがともに h の三角錐で，$V(K) \neq V(K')$ とすると，$|V(K) - V(K')| > 0$ となる．$\dfrac{Sh}{|V(K) - V(K')|} < n$ を満たす自然数 n をとる (ここで数列 $\{n\}_{n \in N}$ が上に有界でないことを用いるが，高校生，大学生は疑問を持たないほど自然である)．即ち，

$$|V(K) - V(K')| > \frac{Sh}{n}. \tag{5.2}$$

(5.1) より，

$$\sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{k^2}{n^3} hS < V(K), V(K') < \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k^2}{n^3} hS.$$

故に，

$$|V(K) - V(K')| \leq \frac{1}{n} Sh.$$

これは n の取り方 (5.2) に矛盾する．従って，$V(K) = V(K')$ である．□

以下，公式 (1.1) の証明は，原論第 12 巻命題 7 の逆の発想，即ち，[17, p. 71] と同様にすればよい．□

5.3　ここまでの議論に対するコメント

学校教育で扱う図形ということでユークリッド空間内の図形を対象にしてきたが，ここまで来ると，大学生にも三角錐の体積の公式 (1.1) がそれほど安直に得られるものでなく，中学生に理解させる方法も限定的であることが理解されるだろう．この間，無意識に次の性質を用いたことにも気付くかもしれない．

(a) 学校教育で扱う体積は「量」であり，その基準となる量は立法体の体積である．
(b) 従って，体積は非負の実数．
(c) 立体 K が K_1 と K_2 に分解されるとき，$V(K) = V(K_1) + V(K_2)$,
(d) 立体 K と L が合同 $\Longrightarrow V(K) = V(L)$,
(e) $K \subset L$ ならば $V(K) \leq V(L)$.

しかし，小学校における面積，体積の定義のままでは 2 辺の大きさが 1, $\sqrt{2}$ の長方形の面積，3 辺の大きさが，1, 1, $\sqrt{2}$ の直方体の体積を決めることができない．小学校における面積は「量」であり，その計算には極限が必要となる．体積も同様である．「量」としての面積，体積を考える限り，解析学に接近する．

「原論」においては，体積は (その前に面積も)「量」ではない．面積であれ，体積であれ,「原論」では「等しい＝分解合同可能」である．「原論」では，面積・体積は「性質」に重点がおけれているように見られるが，背後には「量」があり，幾何学の起源も「(測)量」であることを忘れてはならない．この「原論」においてすら体積においては無限の操作 (極限) を必要とする．

上野 [19] はこう述べている：「小学校で学んでいる数学を概念的に説明するのは実は一番難しい」[19, p. 43]．さらに，「面積というのも決して簡単なことではありません．(中略) 面積もきちんと定義しようとすると，実は長々と議論しなければいけない.」[19, p. 45]

体積はもっと難しく，体積を計算しようとすると [17, IV 体積] のように，さらに長い議論が必要となる．

6 ルベーグの扱い

ここでは，学校教育における体積と同様，立方体を基準とするルベーグ [17, §§44-48] のアイディアのみ紹介する：

まず，単位となる長さ (v とおく) を決める．単位の大きさを 1 辺とする立方体 C を決める．1 辺が $\dfrac{v}{10^i}$ ($i = 0$ または $i \in \boldsymbol{N}$) の立方体を C_i とおき，C_i に等しい立方体 (U_i-立方体という) の網目で空間 $\boldsymbol{R}^3$ を覆う．

定義 6.1 与えられた立体 K に含まれる U_i-立方体の個数を n_i，K の点を 1 点以上含む U_i-立方体の個数を m_i とおく．このとき，

$$n_0 \leq \frac{n_1}{1000} \leq \cdots \leq \frac{n_i}{1000^i} \leq \frac{m_i}{1000^i} \leq \frac{m_1}{1000} \leq m_0.$$

$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{m_i - n_i}{1000^i} = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{1000^i} \left(= \lim_{i\to\infty} \frac{m_i}{1000^i}\right)$ を K の体積といい，$V(K)$ で表す．

小・中学校における定義は $n_0 = m_0$ または $m_1 = n_1$ の場合のみで，しかも，当然ながら有界な立体しか考えない．ここでも，体積を考える対象は有界な立体に限っている．次に，定義より，「直方体の体積 = 底面積 × 高さ」を証明する．

ルベーグは面積に関する議論との重複を避け，面積の章では記載があるが，体積のところ省いたものがある．ここではそれを補いながら解説する．

立体 K が K_1 と K_2 に分解されるとき，$V(K) = V(K_1) + V(K_2)$.

合同な立体の体積は等しい．

任意の多面体は体積を持つ．

次の補題は，[17, §28] の面積に関する補題の体積版で，[17] に書かれてはいないが，[17, §48] で暗に使われている．

補題 6.1 (有界で連結な) 立体 K が体積を持つための必要十分条件は，K を覆うある多面体 E と K に覆われる (いくつかの) 多面体 (の和集合) I とを，E の体積と I の体積の差を十分小さく出来るように取ることができることである．

ルベーグはここで三角錐の体積の議論のために，原論第 12 巻命題 5 の代わりに，次の補題を準備する：

補題 6.2 体積を持つ立体は，平面に関する直角または斜め折返しによって同一体積の立体に変換される．

証明には，上記の補題6.1を暗に使っている．斜め折り返しの定義は書いてないが，文脈から，適当な直角座標系で，(x, y, z) を $(x + az, y + bz, -z)$ に移す変換のことと推察される．

以下，公式(1.1)の証明[17, p. 71]は，基本的に原論第12巻命題7と同じである．従って，3つの三角錐は互いに体積が等しく，公式(1.1)が得られる．

ルベーグの方法は，$\epsilon - \delta$ 論法を使わず,「差を十分小さく取ることができる」という表現で済ませており，その意味では高校の範囲の数学しか使わない．だからと言って，高校で教えるには，時間の制限を超えるだろう．

7 線形代数学を用いる方法

線形変換により，平行六面体が平行六面体に移り，その体積は変換の行列の行列式の絶対値倍になることは示すが(例えば[18, p. 76])，三角錐の公式(1.1)は証明されているものとして，線形代数で扱うことはほとんどない．ここでは補題6.1を用いて公式(1.1)の証明を試みる．

補題 7.1 3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ のアファイン変換 f と2つの立体 K, L に対して，$V(K) = V(L)$ ならば $V(f(K)) = V(f(L))$ が成立する．

証明 3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の任意のアファイン変換は，適当な直交座標によって座標ごとの正の定数倍となるアファイン変換(今の場合，線形な同型写像)

$$g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3,\ g(x, y, z) = (\alpha x, \beta y, \gamma z) \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

と合同変換との合成で表される[20, 定理5.41]．ここで，α, β, γ は g の固有値である．従って，上記の g について補題を証明すれば十分である．線形変換 g により，U_i-立方体(§6参照)は平行六面体 $g(U_i)$ に移る．$g(U_i)$ を U_i'-平行六面体という．このとき，体積 $V(U_i') = \alpha\beta\gamma V(U_i)$．補題6.1より，体積を持つ立体 K に対して，K を覆う多面体 E，K に覆われるいくつかの互いに素な多面体 I は共に，ある m_i 個，n_i 個の U_i-立方体で構成される．このとき，$g(K)$ は m_i 個の U_i'-平行六面体で覆われ，n_i 個の U_i'-平行六面体を覆う．$V(E) - V(I)$ が十分小さいとき，$V(g(E)) - V(g(I))$ も十分小さい．故に，$g(K)$ は体積 $\alpha\beta\gamma V(K)$ を持つ．従って，$V(K) = V(L) \Longrightarrow V(g(K)) = V(g(L))\ (= \alpha\beta\gamma V(K))$. □

補題 7.2 $\boldsymbol{R}^3$ において，O を原点，E_1, E_2, E_3 をそれぞれ

$$E_1 = (1, 0, 0),\ E_2 = (1, 1, 0),\ E_3 = (0, 0, 1)$$

とおく．このとき，底面が三角形 $\triangle OE_1E_2$ で頂点が E_3 の三角錐 K の体積 $V(K)$ は，同じ三角形を底面とし，母線が OE_3 の三角柱 K' の体積 $V(K')$ の3分の1である．

証明　三角柱 K' から三角錐 K を取り去った図形は，底面は頂点 $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ の正方形で頂点 $(0,0,1)$ の四角錐になる．この四角錐を，３点 $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ を含む平面で切ると２つの三角錐ができる．点 $(1,0,0)$ を含む方を K_1, 点 $(1,1,1)$ を含む方を K_2 とする．K_1 と K_2 は切られた面に対しする折返しとなっており合同である．K と K_1 も平面による折返しとなり，合同である．従って，三角錐 K の体積は三角柱 K' の体積の３分の１になる．□

公式 (1.1) の証明 与えられた三角錐 L の底面の頂点を O, F_1, F_2 とし，三角錐の頂点を F_3 とする．原点を原点に，３点 $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ を３点 F_1, F_2, F_3 に移す線形写像 f はアファイン変換で，補題 7.2 の三角錐 K を与えられた三角錐 L にうつし，三角柱 K' を底面が三角形 $\triangle OF_1F_2$ とし母線が OF_3 の三角柱 L' に移す．補題 7.1 より，

$$V(L) = V(f(K)) = V(f(K_1)) = V(f(K_2)),\ \text{即ち}\ 3V(L) = V(L').$$

故に，公式 (1.1) は成立する．　□

8　まとめ

積分の応用としての体積 (高校数学Ⅲ) を用いないで，三角錐の体積を議論するとき，小学校教員・中学校数学教員を目指すの大学生には以下のことを，厳密な証明は犠牲にしても (厳密性は後からついてくる [14, p. 29])，理解してほしい：

1. 三角錐は，三角形と異なり，一般には分解合同で三角柱にできない (第４節)．従って，教科書 [4]，[5] のような説明は止むえないところがある．
2. 公式 (1.1) の証明には極限の概念が必要で，三角錐の体積を考えることにより初等幾何学 (ユークリッド幾何学) が解析学と接近する．面積・体積を「量」として捉える学校教育では，面積の定義の段階から極限を必要とする．
3. その面積・体積の定義である．正方形・立方体を用いる面積・体積の定義のアイディアは，基本的には，小学４年，小学６年で学ぶものと同じである．

(1) 正方形，立方体が存在するのはユークリッド幾何の世界のみなので，この定義は非ユークリッド幾何には使えない．

(2) 定義は一意的ではない．逆転の発想で,「三角形の面積 $= \dfrac{1}{3}$(底辺 × 高さ)」を定義に採用し,「三角錐の体積 $= \dfrac{1}{3}$(底面積 × 高さ)」を体積の定義にすることもできる [21, 第３章].

(3) 微分幾何やベクトル解析では，面積要素，体積要素の積分で面積，体積を定義をする．

4. 体積の対象は暗黙に有界な立体としてきた．無限な立体も対象にすると，学校教育の範囲を超え，広義積分まで必要になる．

5. 次の性質は定義から証明されるが，学校教育の場においては直感的に自明なものとして承認するのは，教育上は妥当だろう．

(1) 合同な立体の体積は等しい．

(2) 立体 K が K_1，K_2 と分解されるとき，K の体積は K_1，K_2 の体積の和になる．

(3) 2つの立体 K，L にたいして，$K \subset L$ ならば，K の体積より L の体積が大きい(か等しい)．

(4) 体積 (面積) は，基準となる立方体 (正方形) を決めれば，立体 (平面図形) の体積 (面積) は一意に決まる．

6. 多角形は三角形に，多面体は三角錐に分解される．従って，面積，体積の定義の後，三角形の面積，三角錐の体積を早く求めるのは学校教育上も実用上も重要である．

7. 体積の計算に積分を用いる場合でも，高校の教科書を大学数学から見るとやはり問題が残る．

x 軸に高さをとる．高さ x における yz 平面と平行な平面による切断の面積を $S(x)$ とおく．[6] では，$S(x)$ は x に関し，図では連続であるが，文章では連続と仮定されていない．高さ x までの体積を $V(x)$ とおく．このとき，$V(x)$ は微分可能で $\frac{dV}{dx}(x) = S(x)$ の証明 (例えば，[6]) は，大学のレベルでみると，曖昧である．ここにも，研究する数学と，教える数学[1]のギャップがある．

参考文献

[1] みんなと学ぶ小学校算数4年下，学校図書，平成16年検定済

[2] みんなと学ぶ小学校算数5年下，同上

[3] みんなと学ぶ小学校算数6年上，同上

[4] 中学校数学1，学校図書，平成17年検定済

[5] 新しい数学1，東京書籍，平成13年検定済

[6] 数学Ⅲ，東京書籍，平成17年検定済

[7] 文部科学省，中学校学習指導要領解説　数学編，教育出版，平成20年9月

[8] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説，文部科学省ホームページ (2010年2月24日閲覧)

[9] 黒木哲徳，教育実践の観点から見た教科内容とその課題，数理解析研究所講究録1657，数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，2009年7月，94-104

[1] 蟹江 [10, p. 10] のいう教育数学とはこのことか？

[10] 蟹江幸博，教師教育における数学者の役割，数理解析研究所講究録 1657，数学教師に必要な数学能力形成に関する研究，2009 年 7 月，1-22

[11] P.R.Cromwell, Polyhera, Cambridge Univ. Press, 1997 年
(日本語訳，下川航也ほか訳，多面体，シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 12 月)

[12] 中村幸四郎他訳・解説，ユークリッド原論，縮刷版，共立出版，1996 年 6 月

[13] M. アイグナー・G.M. ツィーグラー (蟹江幸博訳)，天書の証明，シュプリンガー・フェアラーク東京，2002 年 12 月

[14] ジョラン編，何のための数学か，東京図書，1975 年 5 月

[15] R. ハーツホーン，幾何学 I，シュプリンガー・ジャパン，2007 年 10 月

[16] ボルチャンスキー他，面積と体積，東京書籍，1994 年 7 月

[17] ルベーグ，量の測度，みすず書房，1976 年 1 月

[18] 石川暢洋・鎌田正良，基礎線形代数，実教出版，1977 年 4 月

[19] 上野健爾，高校で何を教えるか，日本数学教育学会誌 (2010)，第 92 巻，第 1 号，pp.40-47

[20] 小松醇郎，菅原正博，ベクトル空間入門，朝倉書店，昭和 49 年 11 月

[21] 砂田利一，分割の幾何学，日本評論社，2000 年 4 月

[22] 山崎昇監訳，見える数学の世界 2，大竹出版，2000 年 12 月

[23] 吉田稔・飯島忠編集代表，話題源数学 $\boxed{上}$，東京法令出版，平成元年 10 月

3. ポリアの発見法の一例

鹿児島大学・教育学部 磯川 幸直（Yukinao Isokawa）
Faculty of Education
kagoshima University

鹿児島大学教育学部は，鹿児島県総合教育センターと連携して，現職教員を対象とした短期研修講座を開催している．ところで，数学教員であってポリアの小著『いかにして問題を解くか』を読んだことのない方はいないだろうが，より大部の著書『数学の問題の発見的解き方』や，より高度な著書『帰納と類比』を読んだことのある方は，おそらく数少ないと思われる．そこで私は，昨年度の短期研修講座において，その前半で『数学の問題の発見的解き方』の一部分の紹介を行った．と言うのは，この本は50年以上も前に書かれたものだが，その内容は今も輝きを失ってはいない，と信じるからである．しかし，ただ本の紹介をするだけでは，講義に迫力が欠けるであろうし，何より自分自身に確信が芽生えない．そこで講座の後半では，私自身がポリアの発見法に導かれて，再発見した事柄を紹介した．それは，『あの』３次方程式の解法についてである．

本論説の第１節では，ポリアの著書も含めて数学の書物ではあまり扱われることがない「統計」から題材を選んで，数学の概念が現実世界で有効に働いている例を紹介した．たんなる私の想像であるが，もし高校生が数学を得意とすればするほど，数学の抽象的な側面のみに心を奪われ，数学は現実世界と無縁なもの，と思い込んでいるのではないだろうか．しかし第１節の例により，彼らは数学の新しい側面を発見し，そして驚くことになるであろう．

第２節では，代数学で良く知られている「中国人の剰余定理」，または和算の世界では「百五減算」と呼ばれていた問題を題材にする．ところでポリアは『数学の問題の発見的解き方』の第４章において,「重ね合わせ」による発見的解き方を解説している．ポリア自身はその著書の中でこの「百五減算」を扱っていないが,「百五減算」はそこで扱うに相応しい例であると考えたので，第２節でその紹介を行う．

第３節では，小学校算数の題材を扱う．これまで私は，算数の題材はあまりにも初等的すぐて，発見的解き方が活躍する余地が無いように思っていた．しかしこの節では，文献を注意深く探せば，算数の中にもまだまだ再考に値する題材があることを示したい．

第４節では，３次方程式の解法の発見的解き方を紹介する．

1 平均余命

つぎの表は，厚生労働省の WEB サイト [4] で公表されている，平成 16 年簡易生命表（男性）の一部である．

年齢	死亡率	平均余命
0	0.00301	78.64
1	0.00044	77.87
2	0.00031	76.91
3	0.00022	75.93
4	0.00016	74.95
⋮	⋮	⋮

以下の説明では，具体的な数値でなく記号を用いる方が便利なので，この表を次のように書くことにする．

年齢	死亡率	平均余命
0	q_0	e_0
1	q_1	e_1
2	q_2	e_2
3	q_3	e_3
4	q_4	e_4
⋮	⋮	⋮

この表において,「死亡率」 q_t は，年齢 t 歳の男子が $t+1$ 歳になるまでに死亡する「割合」を示している．また,「平均余命」 e_t は，年齢 t 歳の男子たちが，平均として，このあと何年生きることができるかを意味する量である．ここで注意すべき重要な事は,「死亡率」は，市町村の役所に提出される死亡届を集計することにより，具体的に知ることができる量，すなわちデータとして与えられうるのに対して,「平均余命」は，死亡という個々の人間の未来の事象に関わる量であるから，データとしては決して与えられない，ことである．そこで問題は，所与のデータから未来の事象に関する量をどのように推定したらよいか，ということになる．

1.1 期待値の登場

現実の問題は，その性格を正しく認識した後にはじめて，問題を数学的に考察することが可能になる．すなわち，

1. はじめは「死亡率」q_t を，年齢 t 歳の男子の集団（「母集団」）におけるある部分集団の「割合」として理解していたが，これを,「母集団からランダムに選ばれた一人が一年以内に死亡する」という事象の「確率」と捉え直す.
2. そして確率変数 X_t を「母集団からランダムに選ばれた一人が X_t 年後に死亡する」として定義して,「平均余命」はその確率変数 X_t の期待値であると考えることにする：すなわち $e_t = E(X_t)$.

このようにして，元の現実問題を，数学の問題に翻訳することができた．このあとは高等学校の生徒でも容易に解くことができる．年齢 t の男子が，一年以内に死亡する場合と，そうでない場合に分けて考える.

- 一年以内に死亡する場合，確率変数 X_t の値は 1/2 と考える（死亡届まで戻ると，母集団に属する個々の人の残りの寿命がわかるから，確率変数 X_t の分布が推定できる．しかし簡易生命表にはそこまでの詳細なデータは与えられていないから，0 年以上 1 年以内の中間の値 1/2 を当てはめることにする）.
- そうでない場合，確率変数 X_t の値は $1 + X_{t+1}$ となる（再帰的方法！）

したがって，一年以内に死亡するが q_t であることを思い起こして，

$$e_t = q_t \cdot \frac{1}{2} + (1 \quad q_t) \cdot (1 + e_{t+1}). \tag{1}$$

を得る.

簡易生命表の数値を用いて，関係 (1) が正しいことを，たとえば $t = 0$ の場合に具体的に確かめてみよう．右辺は

$$q_0 \cdot \frac{1}{2} + (1 \quad q_0) \cdot (1 + e_1) = 0.00301 \cdot \frac{1}{2} + (1 \quad 0.00301) \cdot (1 + 77.87) = 78.634$$

となり，$e_0 = 78.64$ とほぼ一致している.（わずかな不一致は，上にも述べた，簡易生命表には確率変数 X_t の分布に関する詳細なデータが与えられていないことによる.）

1.2 ポリアが主張する数学教育の目標

前節の説明からもわかるように，現実世界の問題は，その問題を数学の問題に翻訳する過程の中に，数学教育の価値が潜んでいる．しかも，翻訳された問題を数学的に解く過程の中よりも，より多くの価値が在る場合もある．この論点に関して，ポリアは『数学の問題の発見的解き方』第 2 章 **2.77.** において，次の意見を述べている（[2] より引用，ただし長くなるので後半部分を省略した）.

私が中学・高校における数学教育の最も大切な務めは，文章題を解くために方程式を立てることを教えることだと主張するとき，驚く人が少数であってほしい．だがこの意見に味方する有力な論拠がある．

方程式を立てることによって文章題を解く場合，生徒は現実的状位を数学の言葉に翻訳する：生徒は，数学の諸概念は現実の事物と関連はあるが，そのような関連は注意深く取り扱わねばならないということを経験する機会を持つわけである．ここにこの基本的経験に対して教科課程から与えられる最初の機会がある．この最初の機会はまた将来自分の職業で数学を用いない生徒にとっては最後の機会であろう．だが技術者や科学者のように，数学を専門的に用いる人々は，数学を主に現実的状位を数学的概念に移すに用いるであろう．

2　百五減算

2.1　百五減算の由来

3～5世紀頃成立したといわれている中国の算術書『孫子算経』には，つぎの問題とその解答が書かれている（[5] を参照）．

今物が有るが、その数はわからない。三つずつにして物を数えると、二余る。五で割ると、三余る。七で割ると、二余る。物はいくつあるか？

答え：二十三。

解法：三で割ると、二余る数として、百四十と置く。五で割ると、三余る数として、六十三と置く。七で割ると、二余る数として、三十と置く。これらを足し合わせて、二百三十三を得る。これから二百十を引いて、答えを得る。一般に、三つずつにして物を数え、一余ると、その度に七十と置く。五で割った余りに二十一をかける。七で割った余りに十五をかける。百六以上ならば、百五を引くことで、答えを得る。

わかりやすくするために，もとの『孫子算経』の解法を，記号を用いて述べてみる．

いま，物の箇数を N とする．N を 3 除，5 除，7 除したときの商を x, y, z として，余りを a, b, c とすればつぎのようになる．

$$N = 3x + a, \quad N = 5y + b, \quad N = 7z + c$$

この三式にそれぞれ 70, 21, 15 をかけて，辺々加えれば

$$106N = 210x + 105y + 105z + 70a + 21b + 15c$$

しかるに $106N = 105N + N$ であるから

$$N = 105(2x + y + z \quad N) + 70a + 21b + 15c$$

になる．したがって $N \equiv 70a + 21b + 15c \pmod{105}$

2.2　ポリアの「重ね合わせ」の方法

上の解法において,「この三式にそれぞれ 70, 21, 15 をかけて，辺々加えれば」とあるが，どうしてこのようにするとよいのか，その理由は『孫子算経』にも『塵劫記』にも解説されていない．本論の目的は，ポリアの発見法を適用して，この発見の秘密を推測することである．

ポリアは『数学の問題の発見的解き方』第 4 章において，難しい問題を解く方法の一つとして，つぎの事を試みるように教えている：

1. 解きやすい特別な場合（複数）を見つけ，まずそれらを解く事
2. それら特別な場合を結合して，とくに「重ね合わせ」ることにより，一般の場合を解く事

以下，上記の方法を適用してみる．

2.2.1　解きやすい特別な場合

誰もが容易に解くことができる場合は，つぎの場合であろう：

小問 1　3 で割ると 1 余るが，5 と 7 で割り切れる数を求めよ．

小問 2　5 で割ると 1 余るが，3 と 7 で割り切れる数を求めよ．

小問 3　7 で割ると 1 余るが，3 と 5 で割り切れる数を求めよ．

実際，たとえば小問 1 の解は，つぎのようにして求めることができる．

> 3 で割ると 1 余るが，5 と 7 で割り切れる数を N_1 とおく．すると $N_1 = 3x + 1 = 35y$ となる．この x, y に関する 2 元 1 次方程式を解くと，$N_1 = 105k_1 + 70$（ただし k_1 は任意の整数）を得る．特に，$k_1 = 0$ とおいて，$N_2 = 70$ を得る．

同様に，小問 2 の解として $N_2 = 105k_2 + 21$（ただし k_2 は任意の整数）を，特に $N_2 = 21$ を得ることができ，また小問 3 の解として $N_3 = 105k_3 + 15$（ただし k_3 は任意の整数）を，特に $N_3 = 15$ を得ることができる．

2.2.2 重ね合わせ

すると $2N_1$ は 3 で割ると 2 余るが，5 と 7 で割り切れる数となり，また $3N_2$ は 5 で割ると 3 余るが，3 と 7 で割り切れる数となり，さらに $2N_3$ は 7 で割ると 2 余るが，3 と 5 で割り切れる数となる．したがって，これらを重ね合わせた数 $2N_1+3N_2+2N_3$ は，3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，また 7 で割ると 2 余る．すなわち

$$\begin{aligned} 2N_1+3N_2+2N_3 &= 2\cdot(105k_1+70)+3\cdot(105k_2+21)+2\cdot(105k_3+15) \\ &\equiv 70\cdot 2+21\cdot 3+15\cdot 2 \pmod{105} \end{aligned}$$

3 「借りない」引き算

良く知られているように，小学生が引き算をするときに最も計算間違いを起こすのは，たとえば 2022　77 のように，「上の位から借りる」必要があるが，肝心のその上の位がゼロである場合，とくにゼロが連続している場合である．そこでこの節ではつぎの問題を考える：

> 「上の位から借りる」ことをしないで，引き算を行え．

この問題を解くために，『いかにして問題を解くか』に書かれている指示

> もし与えられた問題が解けなかったならば，何かこれと関連した問題を解こうとせよ．もっと易しくてこれと似た問題は考えられないか．

にしたがってみよう．今の場合，もっと易しい問題とは，足し算，または「上の位から借りる」必要のない引き算（たとえば 1999　77 のような）のことと考えてよいだろう．

さて難しい引き算を，足し算または易しい引き算に直す，似た問題は過去になかったであろうか．この記憶を呼び戻すためには，大人はもう忘れてしまっているかもしれないが，じつは小学校 1 年生の時のことを思い出すとよい．小学校 1 年生は，たとえば 13　8 を，あえて式で表現すると，

$$13 \quad 8 = (10+3) \quad 8 = (10 \quad 8)+3 = 2+3 = 5$$

のようにして計算することを学ぶ.（そして，この計算を半ば無意識にできるようになるまで，トレーニングする）．ここで数 2 $(= 10 \quad 8)$ は，8 の 10 に関する**補数**と呼ばれている．このように，「2 位数　1 位数 = 1 位数」となる**引き算は補数を足し算することにより**，行うことができる．この方法を，**一般化**してみよう．

$2022 \quad 77$ に戻ろう．この場合 2000 に関する補数を考えればよい．

$$2022 \quad 77 = (2000 + 22) \quad 77 = (2000 \quad 77) + 22 = 1923 + 22 = 1945$$

このようにして，桁数が大きい引き算でも，補数を足し算することにより，行うことができる．

しかし実際には，まだ難しい引き算 $2000 \quad 77$ が残っている．これを，もっと易しい問題に直したい．足し算はすでに使ったので,「上の位から借りる」必要のない引き算に直す可能性を探る．すると容易に，

$$2000 \quad 77 = (1999 + 1) \quad 77 = (1999 \quad 77) + 1$$

とすればよいことに気がつくであろう．

以上をまとめると,「上の位から借りる」必要がある引き算は，足し算，または「上の位から借りる」必要のない引き算だけを用いて，行うことができる．ここで紹介した引き算の方法は，じつはコンピュータが実際に用いる計算法である（[6] を参照）．もちろんコンピュータは２進法で計算するのだが．小学校算数の引き算の方法は歴史的なものであるが，現代でも教育的な理由により教えられているのだろう．しかし，この節で説明した方法が，実用性で優ることは興味深い．.

4　３次方程式の解法

３次方程式の解法の歴史については，たとえばカジョリ『初等数学史』にもかなり詳細に書かれているので，ここでは繰り返さないが，その最も困難な部分を解決したのは，タルタリアであることに疑いの余地はない．

4.1　タルタリアの解法

はじめに簡単な事実から述べる．方程式

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

を解きたいとき，

$$y + \frac{a}{3} = x$$

と置けば，方程式

$$x^3 + px + q = 0 \tag{2}$$

を得る．したがって方程式 (2) を解けばよい．

タルタリアは，この方程式の解が

$$x = u + v \tag{3}$$

という形をしていると見抜き，この u, v を求めようとする．式 (3) を方程式 (2) に代入して，$(u+v)^3$ を展開すると

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

となる．これを

$$(u^3 + v^3 + q) + x(3uv + p) = 0$$

のように変形する．これを見ると，もし

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{4}$$

$$3uv + p = 0 \tag{5}$$

を同時に満たす u, v を見つけることができるならば，方程式 (2) の解 (3) を見いだしたことになる．

連立方程式 (4), (5) は容易に解くことができる．式 (5) を

$$v = \quad \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{u}$$

と変形し，これを式 (4) に代入する．すると

$$\begin{aligned} u^3 \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{u^3} + q &= 0 \\ (u^3)^2 + qu^3 \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 &= 0 \end{aligned}$$

となるが，これは未知数 u^3 に関する 2 次方程式であるにすぎない．そこで，この 2 次方程式を解いて，

$$u^3 = \quad \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

を得る．さらにこれを (4) に代入すれば，

$$v^3 = \quad \frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

を得る．したがって，解

$$x \;=\; \sqrt[3]{\;\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{6}$$

$$+\sqrt[3]{\;\frac{q}{2}\quad\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{7}$$

を見いだすことができた．

4.2　発見の秘密

強い疑問が浮かぶ．

タルタリアは，どのようにして解が (3) の形をしていることを発見したのだろうか？

この疑問に答えるために，はるかに簡単な問題を振り返ってみる．

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ は何故解くことができるのだろうか？

この問に対する答えは簡単で,「平方完成」の形

$$(x+a)^2=k^2$$

に変形できるので，解くことができるのであった（ここで a,k は p,q から決めることのできるある定数）．

3 次方程式 (2) も，もしそれを「立方完成」の形

$$(x+a)^3=k^3$$

にすることができるならば，容易に解くことができる．しかし，それが不可能であることはすぐわかる．

「立方完成」の形にすることはできないが,『類比』な形を考えて，解くことができないだろうか？おそらくタルタリアは，こう考えたにちがいない．そして，もし 3 次方程式を

$$(x+a)^3=k^3(x+b)^3 \tag{8}$$

の形に変形できるならば，容易に解くことができる，と考えたのではないだろうか．実際，もしそのように変形できるならば，解は

$$x=\frac{kb\quad a}{1\quad k} \tag{9}$$

となることがすぐわかる.

では３次方程式 (2) を，(8) の形にすることは可能だろうか？試みてみよう．(8) を展開して整理すると，

$$(1 \quad k^3)x^3 + 3(a \quad k^3b)x^2 + 3(a^2 \quad k^3b^2)x + (a^3 \quad k^3b^3) = 0$$

となる．これが３次方程式 (2) と一致するためには，

$$a \quad k^3b = 0 \tag{10}$$

$$3(a^2 \quad k^3b^2) = p(1 \quad k^3) \tag{11}$$

$$(a^3 \quad k^3b^3) = q(1 \quad k^3) \tag{12}$$

でなければばらない．この３つの式は，a, b, k を未知数とする連立方程式と見なすことができ，また実際に解くことも難しくはない．しかし，まずは，この３つの式の意味を明らかにしてみよう．

式 (10) より $a = k^3b$ であるが，これを用いて解を表す式 (9) において a を消去してみる．すると

$$x = \frac{kb \quad k^3b}{1 \quad k} = kb + k^2b$$

が導かれる．そこで

$$u = kb,\ v = k^2b \tag{13}$$

と置くと，解は (3) の形で表されたことになる．

さらに，式 (11), (12) において，a, b, k を u, v で書き直す．すると

$$p = 3\,\frac{a^2 \quad k^3b^2}{1 \quad k^3} = \quad 3k^3b^2 = \quad 3uv$$

および

$$q = \frac{a^3 \quad k^3b^3}{1 \quad k^3} = \quad (k^3b^3 + k^6b^3) = \quad (u^3 + v^3)$$

となり，これらは (4)，(5) と全く同じものとなる．

こうして，タルタリアの解法に辿り着くことができた．

参考文献

[1] ポリア 『いかにして問題を解くか』 （丸善）

[2] ポリア 『数学の問題の発見的解き方』 （みすず書房）

[3] ポリア 『帰納と類比』 （丸善）

[4] 厚生労働省 『平成１６年簡易生命表』
http://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/life/life04/

[5] 平山諦 『東西数学物語』 （恒星社）

[6] 安藤壽茂 『コンピュータアーキテクチャの話』
http://journal.mycom.co.jp/column/architecture/index.html

4. 関数の性質の背景にある位相群の準同型

奈良教育大学・数学教室　河上 哲 (Satoshi Kawakami)
Department of Mathematics
Nara University of Education
大阪府立大学大学院・理学系研究科　山中聡恵 (Satoe Yamanaka)
School of Science
Osaka Prefecture University

群という概念が数学の世界では極めて重要であることは、一般に認識されているが、学校教育の教科内容に取り入れられたことは無い。しかし、大学生にとっては、群という考え方を理解して、教科内容、教科書の内容を見直しておくことが必要なことを、多くの教員養成系の教員が指摘しているところである。特に、数の四則演算（加減乗除）と数の発展（自然数、整数、有理数、実数）の背景に群の概念を加味して理解しておくことは、学校教育において数の計算を指導する上でも大事である。また、幾何学の背景に群概念が重要な役割を果たしていることは、クラインのエルランゲン・プログラムを持ち出すまでもなく、周知の通りである。対称性のある美しい図形の背景には、群が数学的に潜んでいる。

本稿では、関数の基本的な性質の背景に位相群の準同型の概念が潜んでいることを教員養成系大学での授業やセミナーで指摘していることの報告をする。中学校１年での関数の導入は、比例の関係から１次関数へと進む。また、加法と乗法の関係式として分配の法則も学ぶ。次に２次関数を学ぶ。高校では、指数関数と指数法則、対数関数と対数法則、三角関数と加法定理などが関数関連領域では大事なテーマである。そこで、これらの関数の性質を体系的に見直してみる。

性質１. 関数 $f(x) = ax$ は任意の実数 x, y に対し、$a(x+y) = ax + ay$ という分配の法則が成り立っているので、$f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たす。

性質２. 関数 $f(x) = x^2$ は任意の正の実数 x, y に対し、$(xy)^2 = x^2y^2$ なので、$f(xy) = f(x)f(y)$ を満たす。

性質３. 関数 $f(x) = a^x \quad (a > 0)$ は任意の実数 x, y に対し、$a^{x+y} = a^x a^y$ という指数法則が成り立つので、$f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たす。

性質４. 関数 $f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$ は任意の正の実数 x, y に対し、$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ という対数法則が成り立つので、$f(xy) = f(x) + f(y)$ を満たす。

ここで、位相群とその準同型について簡単に復習しておく。

$\mathbb{R} = \{$ 実数全体 $\}$ とおく。この時、次が成り立っている。

1) $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対して、$(x+y)+z = x+(y+z)$ を満たす。

2) $x+0 = 0+x = x$ である。

3) $x \in \mathbb{R}$ に対して、$x+x' = x'+x = 0$ を満たす $x' \in \mathbb{R}$ が存在する。
実際、$x' = -x$ である。

$\mathbb{R}^+ = \{$ 正の実数全体 $\}$ とおく。この時、次が成り立っている。

1) $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ に対して、$(xy)z = x(yz)$ を満たす。

2) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ である。

3) $x \in \mathbb{R}^+$ に対して、$xx' = x'x = 1$ を満たす $x' \in \mathbb{R}^+$ が存在する。
実際、$x' = \frac{1}{x}$ である。

一般に空でない集合 G に演算 $\circ$ が定義されている時、つまり、$x, y \in G$ に対し、$x \circ y \in G$ が定義されていて、次を満たす時、$G = (G, \circ)$ は群と呼ばれている。

1) $x, y, z \in G$ に対して、$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ を満たす。

2) $e \in G$ が存在して、$x \circ e = e \circ x = x$ である。e は G の単位元と呼ばれている。

3) $x \in G$ に対して、$x \circ x' = x' \circ x = e$ を満たす $x' \in G$ が存在する。
$x' = x^{-1}$ と表され、x の逆元と呼ばれている。

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ は加法に関して群である。また、$\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^+, \times)$ は乗法に関して群である。

更に 群 G が位相空間であって、G の演算が連続となっている時、つまり、

4) $G \times G \ni (x, y) \longmapsto x \circ y \in G$ が連続。

5) $G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$ が連続。

の時、G は位相群と呼ばれている。

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$ 、$\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}^+, \times)$ は位相群にもなっている。

群 $G = (G, \circ)$ から群 $H = (H, *)$ への写像 f が

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

を満たすとき、f は G から H への (群として) 準同型であると呼ばれている。

上述の関数の性質を位相群の準同型という観点から整理しておくと次のようになる。

性質 1. 関数 $f(x) = ax$ の f は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}, +)$ への連続な準同型である。

性質 2．関数 $f(x)=x^2$ の f は $(\mathbb{R}^+,\times)$ から $(\mathbb{R}^+,\times)$ への連続な準同型である。

性質 3．関数 $f(x)=a^x \quad (a>0)$ の f は $(\mathbb{R},+)$ から $(\mathbb{R}^+,\times)$ への連続な準同型である。

性質 4．関数 $f(x)=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ の f は $(\mathbb{R}^+,\times)$ から $(\mathbb{R},+)$ への連続な準同型である。

$\mathbb{T}=\{$ 絶対値 1 の複素数全体 $\}$ は複素数の積で位相群となり、1 次元トーラスと呼ばれている。この時、三角関数の加法定理により、次が言える。

性質 5．関数 $f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の f は $(\mathbb{R},+)$ から $(\mathbb{T},\times)$ への連続な準同型である。

次のステップとして、上記の性質の逆の問題を考える。ここでは、準同型という代数的な構造と位相的な構造（関数の連続性）がどこまで具体的な関数を規定するのかという点が主要テーマとなる。

問題 1．連続関数 $f(x)$ が、任意の実数 x,y に対し、$f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満たすとき、$f(x)=ax$ と表されることを示せ。

問題 2．連続関数 $f(x)$ が、任意の正の実数 x,y に対し、$f(xy)=f(x)f(y)$ を満たすとき、$f(x)=x^\alpha$ （α は実数）と表されることを示せ。

問題 3．正の値をとる連続関数 $f(x)$ が、任意の実数 x,y に対し、$f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たすとき、$f(x)=a^x \ (a>0)$ と表されることを示せ。

問題 4．連続関数 $f(x)$ が、任意の正の実数 x,y に対し、$f(xy)=f(x)+f(y)$ を満たすとき、$f(x)=\log_a x \ (a>0, a\neq 1)$ または $f(x)=0$ であることを示せ。

問題 5．一次元トーラス $\mathbb{T}$ （絶対値 1 の複素数）に値をとる連続関数 $f(x)$ が、任意の実数 x,y に対し、$f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たすとき、$f(x)=e^{iax}$ （a は実数）と表されることを示せ。

問題 3 の解法の一例

1. x が自然数 n のとき

$n=1$ の時を出発点として、自然数に関するペアノの公理と深く関連する数学的帰納法を用いる。

$f(1)=a$ とおく。準同型の性質より、$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=a^2$ となる。$f(k)=a^k$ と仮定すると、$f(k+1)=f(k)f(1)=a^k\cdot a=a^{k+1}$ となるので、数学的帰納法より、自然数 n に対して $f(n)=a^n$ が成り立つ。

同様にして、任意の実数 x に対しても、$f(nx) = f(x)^n$ であることが示される。

2. $x = 0$ のとき

0 は実数加法群の単位元であることから、任意の y に対して、$y + 0 = y$ を満たす。従って、準同型の性質より $f(y) = f(y+0) = f(y)f(0)$ が成り立つ。乗法の単位元の性質より、$f(0) = 1$、つまり、$f(0) = a^0$ であることが分かる。

3. x が負の整数のとき、$x = -n$ （n は自然数）とする。

負の数が加法に関する逆元である。つまり、$n+(-n) = 0$ であるので、$f(n+(-n)) = f(0) = 1$ である。他方、準同型の性質から $f(n+(-n)) = f(n)f(-n) = a^n f(-n)$ が成り立つので、$a^n f(-n) = 1$ である。従って、乗法の逆元の性質より、$f(-n) = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$ を確認することができる。

4. x が有理数のとき

1. で注意したように自然数 n に対して、$f(nx) = f(x)^n$ が成り立つことを使う。自然数 n に対して、$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n$ を得る。$f(1) = a$ なので、$a = f(\frac{1}{n})^n$ である。従って、$f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ を得る。また、自然数 m により、$x = \frac{m}{n}$ のとき、つまり、x が正の有理数のとき、$f(\frac{m}{n}) = f(m \cdot \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$ を得る。$f(x)f(-x) = f(x-x) = f(0) = 1$ より、$f(-x) = f(x)^{-1}$ なので、任意の有理数 x に対して、$f(x) = a^x$ が確認できた。

5. x が実数のとき

実数 x に対して、有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がとれて、$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とできる。この時、関数 $f(x)$ と指数関数 a^x の連続性により、$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$ を示すことができる。

以上のような証明をこつこつと与えていく上での教育効果としては、加法群における単位元０の役割 (証明の２)、逆元（負の数）の役割 (証明の３)、乗法群における単位元１の役割（証明の３)、逆数（乗法における逆元）の役割（証明の３と４)、数学的帰納法（証明の１)、n 乗解の定義（証明の３と４)、数の拡張（証明を５段階に分けたこと)、有理数の稠密性（証明の５)、関数の連続性（証明の５）などの概念を再認識することが挙げられる。

また、問題５. の解法においては、１次元トーラスは、局所的に実数の０を含む開区間の近傍をとって、問題１. に帰着させることが必要となり、多様体の考え方の導入に役立つ。また、代数的構造と位相的構造が解析的構造（微分可能性）を導くことの体験ともなる。これは、ヒルベルトの第５問題とも関連していることの説明も付け加える。更に、複素変数の指数関数の指数法則に触れ、オイラーの公式やド・モアブルの公式の意味について考える。