数理解析研究所講究録
第1711巻 2010年 204-209

教育学研究科における数学の研究
–修士論文指導等における2，3の事例–

熊本大学教育学部　伊藤 仁一 (Jin-ichi Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

0. はじめに

前回（平成２０年度）の教育学研究科の研究内容（Team 5) の活動としては，修士論文の研究課題となるような未解決問題を多く集めるという報告を行った ([0-1]). 今回（平成２１年度）の教育学研究科の研究内容（Team 4）の活動としては，今年度の修士論文および学部卒論発表会の指導をした事例等について報告する.

1. 内在的直径に対して表面積最大の三角柱

平成２１年度の４年生に課した問題で，きわめて初等的な内容ですが，教育学研究科の研究としても十分ではないかと思えるので紹介する.

まず，Y. G. Nikonorov, & Y. V. Nikonorova というロシア人の書いた 2008年に発表された論文 ([1-5]) を４年生のセミナーで読ませた. 内容としては，直方体の辺の３つの長さが a, b, c とするとき，その表面上の（内在的）直径（表面上の距離で最も離れた２点間の距離）を与える２点とその直径を求めて，更に，直径をノーマライズしてその面積が最大になる直方体の３辺の長さの比は，$1:1:\sqrt{2}$ であることを初等的な計算のみで示したものである. 勿論，特定の多面体に関する結果としても十分意味深いが，Alexandrov の予想 ([1-1]) の特別な場合とみなすことも出来て興味深い.

Alexandrov 予想　曲率が非負の曲面で直径 d と面積 A に対して次の不等式が成り立つであろう.

$$A \leq \frac{\pi}{2} d^2$$

ここで等号成立は，２枚の円盤を周で張り合わせた曲面に限るであろう.

Alexandrov の予想に関してはいくつかの部分的な結果 ([1-2,1-3]) が知られているが，いまだに未解決の問題である. 直方体以外で特殊な多面体を

扱った結果では，四面体表面に限ればその直径に対して正四面体の場合が表面積最大になることが知られている ([1-6]).

残念ながら学生にとっては，意味合いや意義までは分からなかったようだが，正三角柱の表面に限った場合にも分かっていなく，その直径を正確に決定し，直径をノーマライズしたときに表面積が最も大きくなる正三角柱を決定すれば世界で初めての結果になるはずだと言ったら，少しは興味を持ったようで，では調べてみようということになった.

ところが，何をすれば良いのかを自分たちで考え始めることは難しく,「どの２点間の距離を計算すればよいのですか？」と聞いてくる事もあったが，底面の正三角形の１辺の長さを１として，高さが１以下の場合に限り，更に，その時の直径は，１つの頂点からの表面上の最遠点となることは仮定して直径を求め，直径をノーマライズしたときの表面積が最大となる正三角柱は，底面の正三角形の１辺を１とした時の高さ h は，以下の４次方程式の正の実数解となる結果を得た.

$$9h^4 + 18\sqrt{3}h^3 + 27h^2 - \sqrt{3}h - 6 = 0$$

数式処理ソフト Mathematica を使い，直径を１とした時の最大の表面積は近似では，1.454... となることを求めた．ただ，Alexandrov 予想の２枚の円盤のときの $\pi/2$ にあまりにも近すぎるので，どこかに間違いがあるかもしれない.

ただ，高さが１以下のときでも，１つの頂点からの最遠点が１点の場合と２点ある場合との場合分けが必要で学生にとっては手ごろな問題であると思われる．勿論，完全に直径を決定出来れば士論文としは十分な結果と思われる．更に，高さが高い時には，直径を与える２点は頂点ではなくなり，直径を与える２点間に最短線が５本以上あることが知られており ([1-4])，正三角形の重心間でもないことが分かっている．このことからしても十分にデリケートな問題といえる.

2. 多角形，多面体のビリヤードのブロッキングポイント

平成２１年度に修了した吉里泰志君の修士論文指導に着いて報告する．彼は，学部４年生のセミナーでは Tabachnikov の本 [2-3] の多角形上のビリヤード問題に関する部分を勉強し，教育学研究科に進学した．この本では，一辺が１の正方形のビリヤード台（以下，ビリヤード台を省く）において始点 $(0,0)$（一つの頂点）とし，終点 (x,y) を与えた場合，始点から終点への全てのビリヤード軌道は４点でブロックできることが解説してあり，そ

の４点は

$$(\frac{x}{2},\frac{y}{2})\,(\frac{2-x}{2},\frac{y}{2})\,(\frac{x}{2},\frac{2-y}{2})\,(\frac{2-x}{2},\frac{2-y}{2})$$

と表せる．任意の始点から任意の終点に至る軌道を有限個の点のみでブロック出来るとき，secure と呼ばれ，正方形が secure であることは 1998 年に P. Hiemer と V. Snurnikov が示した ([2-2])．球面上をビィヤード台としたときは，始点終点を対称点対に取れば，上記の性質は成り立たず，球面は secure でないと言える．このときにも，任意の始点と終点を与えたときに何個の点でブロックできるかや，正三角形の場合にも考えてみるように勧めましたが，それ以上の結果を得るには至らなかった．

修士に入ってからは，上記の論文 ([2-2]) や，正多角形のビリヤードで secure となるのは正三角形，正方形と正六角形のみであることを証明してある論文 ([2-3]) を勉強したが，正三角形の場合のブロッキングポイントを具体的に決定するように勧めたが，なかなか進展しなかった．

少し方向を変えて，正 n 角形 (n=3,4,6 以外) や球面は secure ではないことが分かっているが ([2])，その概念を弱めて，与えられた長さ l 以下の軌道では，目的の点に至ることが出来ないように有限個の点でブロックすることが出来るとき l-secure と呼ぶことにし，l-secure に関して正多角形や各種の曲面に関してどのようになるかを考えるようにも指導したが，特段の進展はなかった．また，別のタイプのビリヤード問題としては，円形のビリヤードの場合について扱っている ([2-1]) を読み，楕円形の場合や球面内部の場合に拡張することを考えるようにも勧めたが，進展はなかった．

結局，採用試験が終わった修士２年の秋以降になってやっと正三角形のビリヤード軌道のブロッキングポイントに真剣に取り組むことが出来た．そのころになって，以前私が正方形の場合も始点が任意の点のときに１６点以下になることは容易に想像できるが，きちんと考えてみるように言われた事の意味がやっと分かったと本人から聞いた．ちょうどそのころ私も立方体の表面が secure であると言えそうだと思い始めたので，そのことも証明をしてもらうこととした．立方体の場合は他の場合と少し様相が異なる部分もあり興味深い．

結果としては，以下の定理を証明したことになる．

定理　(i) 正三角形の場合，始点を１つの頂点とした場合は４点でブロックでき，始点と終点をを任意の点にした場合は，２４点以下でブロックできる．

(ii) 正六角形の場合，始点を１つの頂点とした場合は２４点以下でブロックでき，始点と終点をを任意の点にした場合は，９６点以下でブロックできる．

(iii) フラットトーラスの場合は，４点でブロックできる．

(iv) 正四面体の表面の場合も secure であり，始点を１つの頂点とした場合は４点でブロックでき，始点と終点をを任意の点にした場合は，８点以下でブロックできる．

(v) 正六面体の表面は secure であり，任意の始点と終点の場合にも９６点以下でブロックできる．

勿論，正八面体，正二十面体の表面も secure であろうが，正十二面体の表面が secure であるかどうかを決定できると望ましいと思うが，残念ながら時間切れでそこまでは至らなかった．

またこの修士論文で本人は以下のようにも述べている．「この研究を通して数学の面白さや奥深さを改めて実感した．教壇に立ったときに，数学の面白さや奥深さを少しでも多く子どもたちに伝えていきたい．」

3. 三角形と円に関する初等幾何の問題

教員研究留学生としてモンゴルの高校の先生の Jamsran Buyant 氏が，私を指導教官として平成２１年度後期から熊本大学に滞在し，熊本大学教育学部や教育学研究科の講義や演習を受講している．初等幾何に特に興味があるようで，モンゴルにいた時から成り立つのではないかと思っていたという三角形と円に関するいくつかの予想を聞いたので紹介する．現在では証明されたので定理としている．

定理 1. 任意の三角形 ABC に対して，頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足を D, E, F とする．D を通り BE, CF に平行な直線と辺 CA, AB との交点を D_1, D_2 とする．E を通り CF, AD に平行な直線と辺 AB, BC との交点を E_1, E_2 とする．F を通り AD, BE に平行な直線と辺 BC, CA との交点を F_1, F_2 とする．このとき，６点 $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ は同一円周上にある．

定理 2. 任意の三角形 ABC に対して，ある円が辺 BC と B_1, C_2 で交わり，辺 CA と C_1, A_2 で交わり，辺 AB と A_1, B_2 で交わるとき，三点 A, A_1, A_2 からなる三角形の外心を A_o，　三点 B, B_1, B_2 からなる三角形の外心を B_o と三点 C, C_1, C_2 からなる三角形の外心を C_o とする．A_o, B_o, C_o からそれぞれ辺 BC, CA, AB におろした３垂線は１点で交わる．

定理 3. 任意の三角形 ABC に対して，ある円が辺 BC と B_1, C_2 で交わり，辺 CA と C_1, A_2 で交わり，辺 AB と A_1, B_2 で交わるとき，A_1, A_2 を

通る直線，B_1, B_2 を通る直線の交点を C^*，B_1, B_2 を通る直線，C_1, C_2 を通る直線の交点を A^*，C_1, C_2 を通る直線，A_1, A_2 を通る直線の交点を B^* とする．このとき，3 直線 AA^*, BB^*, CC^* は 1 点で交わる．

これ等の結果は，全 6 巻の幾何学大辞典（[3-1]）には，ざっと見たところでは見当たらなく，広く知られた事柄ではないと思われる．

定理 1 は，三角形のみによって決まる点（6 点円の中心）なので，おそらく 3500 を超える三角形の心を紹介しているという C. Kimberling のリスト ([3-3]) にはあるだろうと思われるが，まだ調べていない．定理 3 は，パスカルの定理（円上に頂点をもつ 6 角形）の演習問題程度で証明することができるが，定理 2 は，以下の性質（私の講義で扱った演習問題）を用いて Buyant 氏が証明したが，きわめて複雑である．

演習問題　三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 U, V, W があるとき，これら 3 点でそれぞれの辺に立てた垂線が 1 点で交わるための必要十分条件は，$AW^2 + BU^2 + CV^2 = WB^2 + UC^2 + VA^2$. であることを示せ．

いずれにせよ初等幾何の性質が現在どこまでが既知の結果で，どこからが新しい結果であるかは，おそらく誰も判定出来なくなってしまっているよ言うに思われる．

Buyant 氏自信もモンゴルに居た時に使っていたということだが，計算ソフトの発達によって，正確な図形を計算機に書かせ更には引っ張ったりして動かすことも可能となっている現在では，以前は思いつかなかったような初等幾何の性質が見つかることもあるのではないかと期待される．これ等の事柄も教育学研究科における研究として重要であろう．

最後に，Buyant 氏が座標を入れて証明した次の定理を紹介して終わりにしたい．

定理 4.　任意の四角形 $ABCD$ とその対角線の交点を O とする．三角形 ABO の垂心から辺 CD に下した垂線，三角形 BCO の垂心から辺 DA に下した垂線，三角形 CDO の垂心から辺 AB に下した垂線，三角形 DAO の垂心から辺 BC に下した垂線，これら 4 つの垂線は 1 点で交わる．

与えられた 4 点に対して全ての 3 点対を選んだ 4 つの三角形に対しての性質は，多くの教科書に紹介されているが，対角線の交点も用いて 4 つの三角形に関しての記述は浅学非才の著者の探した範囲では見当たらなかった．どなたか教えて頂ければ幸いです．

参考文献

[0-1] 伊藤仁一, 教育学研究科における数学の研究 –直観幾何学的視点から–, 京都大学数理解析研究所講究録 1657 (2009), 157-176.

[1-1] A. D. Alexandrov, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1955

[1-2] E. Calabi and J. Cao, *Simple closed geodesics on convex surfaces,* J. Diff. Geom. **36** (1992), 517–549.

[1-3] J. Itoh & C. Vîlcu, *On the lengths of simple closed (quasi)geodesics on convex surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I **343** (2006), 259-264.

[1-4] J. O'Rourke & C. Shevon, *Computing the geodesic diameter of a 3-polytope*, In: Proc. 5th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom., (1989), 370-379.

[1-5] Y. G. Nikonorov, & Y. V. Nikonorova, *The intrinsic diameter of the surface of a parallelepiped*, Discrete Comput. Geom. **40** (2008), 504–527.

[1-6] V. A. Zalgaller, *An isoperimetric problem for a tetrahedron*, J. Math. Sci. (N. Y.) 140 (2007), no. 4, 511–527

[2-1] R. L. Bishop, *Circular billiard tables, conjugate loci, and a cardioid*, Regul. Chaotic Dyn. 8 (2003), 83–95.

[2-2] P. Hiemer,& V. Snurnikov, *Polygonal billiards with small obstacles*, J. of Statistical Physics, **90**(1998), 453-466.

[2-3] T. Monteil, *On the finite blocking property*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **55** (2005), 1195-1217.

[2-4] S. Tabachinikov, *Geometry and Billiards*, STML 30, 2005, AMS & MASS.

[2-5] 吉里泰志, 多角形、多面体のビリヤード軌道およびブロッキングポイント–中高数学科教材開発の試み–, 熊本大学大学院教育学研究科修士論文 (2009).

[3-1] 岩田至康編, 幾何学大辞典全６巻, 補巻 I,II, 槇書店, 1978.

[3-2] C.Kimberling, *Encyclopedia of triangle centers*, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html