数理解析研究所講究録
第 1712 巻 2010 年 95-100

環の微分演算子の新しい視点 *

岡山県立大学・情報工学部　小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

非可換代数の微分加群について, 新しい展開を二つ紹介する.

一つ目は, 左微分演算子に付随して研究されてきた微分加群が, 左微分演算子よりも根本的な概念に関連していることが判明したことである. これを §1 で述べる. それに伴い, 左微分演算子との関連が研究されてきた分離代数についても新たな視点が導入されることを §2 で述べる.

二つ目は, 左微分演算子の概念を拡張することによって, 両側加群の derivation を高次化することが可能になったことである. それを §3 で述べ, 分離代数との関連を §4 で述べる.

本論文を通じて用いる記号について説明する. $\mathbb{N}$ は負でない整数の全体を表す. 環はすべて単位元を有し, 環上の加群はすべて unitary であるとする. 環 R 上の左加群の圏を R-Mod で表す. 環 R 上の両側加群 M に対して, 次の記号を用いる.

(1) $u\in M$ と $r\in R$ に対して, $[u,r]=ur-ru$ とおく.

(2) $X\subseteq M$ と $Y\subseteq R$ に対して, $[X,Y]=\{[x,y]\mid x\in X,\ y\in Y\}$ とおく.

(3) さらに, $[X,Y]_0=X$, $[X,Y]_{p+1}=[[X,Y]_p,Y]$ $(p\in\mathbb{N})$ と定める.

K は常に可換環を表し, K 代数の圏を K-**Alg** で表す. $A\in K$-**Alg** に対し, 両側 A 加群 M で $[M,K]=0$ なるもの全体の圏を $\mathfrak{M}(A)$ で表す.

1. Sweedler の微分加群

微分とは無関係に見える話題から始める.

定義 1.1 $A\in K$-**Alg**, $p\in\mathbb{N}$ とする. 各 $M\in\mathfrak{M}(A)$ に対して,

$$\mathcal{C}_A^p(M)=\{u\in M\mid [u,A]_p=0\}$$

とおく. $\mathfrak{M}(A)$ の任意の射 $f:M\to N$ に対して $f(\mathcal{C}_A^p(M))\subseteq\mathcal{C}_A^p(N)$ が成り立つことから, 関手 $\mathcal{C}_A^p:\mathfrak{M}(A)\to K$-Mod が得られる.

特に, $\mathcal{C}_A^1(M)=\{u\in M\mid [u,A]=0\}$ は M の中心である.

---

* 本論文は投稿予定の論文の予報である.

定義 1.2 $A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$, $p \in \mathbb{N}$ とする．$A \otimes_K A \in \mathfrak{M}(A)$ において $[1 \otimes 1, A]_p$ で生成された両側 A 加群を U_A^p とする．$\mathcal{J}_A^p = (A \otimes_K A)/U_A^p$ とおき，$j_A^p = 1 \otimes 1 + U_A^p \in \mathcal{J}_A^p$ とおく．

定理 1.3 $A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$, $p \in \mathbb{N}$ とするとき，関手 $\mathcal{C}_A^p$ は $(\mathcal{J}_A^p,\, j_A^p)$ で表現される．即ち，すべての $M \in \mathfrak{M}(A)$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}(A)}(\mathcal{J}_A^p,\, M) \ni \varphi \mapsto \varphi(j_A^p) \in \mathcal{C}_A^p(M)$ は同型写像である．

特に $p = 1$ の場合は，周知のとおり $(\mathcal{J}_A^1,\, j_A^1) \simeq (A,\, 1)$ である．即ち，両側 A 加群の同型写像 $f : \mathcal{J}_A^1 \to A$ で $f(j_A^1) = 1$ を満たすものが存在する．

なお，$(\mathcal{J}_A^p,\, j_A^p)$ は右加群に対する右微分演算子をも表現可能である．

例 1.4 多項式環 $A = K[X_1, \ldots, X_r]$, $B = K[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r]$ および B のイデアル $I = (X_1 - Y_1, \ldots, X_r - Y_r)$ を考える．$\mathfrak{M}(A)$ を B-Mod と同一視するとき，任意の $M \in \mathfrak{M}(A)$ に対して，$\mathcal{C}_A^p(M) = \{u \in M \mid I^p u = 0\}$ が成り立ち，$\mathcal{J}_A^p = B/I^p$ である．

実は，$\mathcal{J}_A^p$ は Sweedler [10] において既に発見されていたのである．そのことを説明する．

定義 1.5 ([10, Definition 1.1]) $A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$, $p \in \mathbb{N}$, $M, N \in A\text{-Mod}$ に対して，

$$\mathcal{D}_A^p(M, N) = \mathcal{C}_A^{p+1}\bigl(\mathrm{Hom}_K(M, N)\bigr)$$

とおく．$\mathcal{D}_A^p(M, N)$ の要素を **p 次の左微分演算子**という．これらから関手

$$\mathcal{D}_A^p : (A\text{-Mod})^{op} \times (A\text{-Mod}) \to K\text{-Mod}$$

が得られる．

定理 1.6 ([10, Theorems 1.17 and 1.18]) $A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$, $p \in \mathbb{N}$ とする．任意の M, $N \in A\text{-Mod}$ に対して，写像

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}_A^{p+1} \otimes_A M,\, N) \to \mathcal{D}_A^p(M, N)$$

を $\Phi(\varphi)(u) = \varphi(j_A^{p+1} \otimes u)$ によって定義すると，Φ は同型写像である．

証明 周知の同型写像 $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}_A^{p+1} \otimes_A M,\, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}(A)}\bigl(\mathcal{J}_A^{p+1},\, \mathrm{Hom}_K(M, N)\bigr)$ と $p+1$ に対する定理 1.3 の同型写像との合成写像が Φ である． □

$\mathcal{D}_A^p(M, N)$ の要素を微分演算子と呼ぶ背景は次のようなものである．可換代数 A 上の加群 M (左右の区別はない) に定義 1.5 を適用したものが**微分演算子**である ([2], [8], [9])．A が可換代数の場合，A の derivation は 1 次の微分演算子で 1 を 0 に写像するもの

にほかならない．さらに，p 次と q 次の微分演算子の合成写像は $p+q$ 次の微分演算子になる．したがって，n 個の derivation を合成すると n 次の微分演算子になるのである．

定理 1.6 の証明でわかるように，$\mathcal{J}_A^p$ の意義は $\mathcal{D}_A^p$ よりも $\mathcal{C}_A^p$ にこそその本質がある．Sweedler が気付かなかったのは，可換代数の理論を非可換代数へ焼き直すことに専念したからであろう．

なお，伝統的に微分加群と呼ばれているものは $\mathcal{J}_A^p$ ではなく，$\mathcal{J}_A^P$ の中の $[j_A^p, A]$ で生成された両側 A 加群のことである．それについては，[10] に先駆けて Hattori [1] の研究がある．また，[3], [4], [5], [6] に関連した研究がある．

2. 準分離代数

定義 2.1 [10, Definition 1.20]　$A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$ とする．$U_A^2 = U_A^1$ が成り立つとき，A を**微分分離代数**という．しかし，本稿では [5] にしたがって**準分離代数**と呼ぶことにする．

次の結果が知られている．

定理 2.2 [5, Theorem 2.4]　分離代数は準分離代数である．

定理 2.3 [10, Theorem 1.21 (a)]　$A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$ に対して，次の条件は同値である．

(1) A は準分離代数である．
(2) $U_A^p = U_A^1$ を満たす $2 \leq p \in \mathbb{N}$ が存在する．
(3) $U_A^p = U_A^1$ がすべての $1 \leq p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．
(4) $(\mathcal{J}_A^2, j_A^2) \simeq (A, 1)$ である．
(5) $(\mathcal{J}_A^p, j_A^p) \simeq (A, 1)$ を満たす $2 \leq p \in \mathbb{N}$ が存在する．
(6) $(\mathcal{J}_A^p, j_A^p) \simeq (A, 1)$ がすべての $1 \leq p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．
(7) $\mathcal{D}_A^1 = \mathrm{Hom}_A$ が成り立つ．
(8) $\mathcal{D}_A^p = \mathrm{Hom}_A$ を満たす $1 \leq p \in \mathbb{N}$ が存在する．
(9) $\mathcal{D}_A^p = \mathrm{Hom}_A$ がすべての $p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

定理 1.3 の観点から次の結果が導かれる．

定理 2.4　$A \in K\text{-}\mathbf{Alg}$ に対して，次の条件は同値である．

(1) A は準分離代数である．
(2) $\mathcal{C}_A^2 = \mathcal{C}_A^1$ が成り立つ．
(3) $\mathcal{C}_A^p = \mathcal{C}_A^1$ を満たす $2 \leq p \in \mathbb{N}$ が存在する．
(4) $\mathcal{C}_A^p = \mathcal{C}_A^1$ がすべての $1 \leq p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．
(5) $j_A^2 \in \mathcal{C}_A^1(\mathcal{J}_A^2)$ が成り立つ．
(6) $j_A^p \in \mathcal{C}_A^1(\mathcal{J}_A^p)$ を満たす $2 \leq p \in \mathbb{N}$ が存在する．
(7) $j_A^p \in \mathcal{C}_A^1(\mathcal{J}_A^p)$ がすべての $p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．

系 2.5 A が準分離代数ならば，任意の $M \in \mathfrak{M}(A)$ と任意の $1 \leq p \in \mathbb{N}$ に対して $A[M, A]_p = A[M, A]$ が成り立つ.

系 2.6 [4, Corollary 8] A が準分離代数ならば，任意の $1 \leq p \in \mathbb{N}$ に対して $A[A, A]_p = A[A, A]$ が成り立つ.

3. derivation の高次化

本節では §1 の定義と結果の焼き直しを行う. n は正の整数を表すものとする.

定義 3.1 $A = (A_1, \ldots, A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ に対して $\hat{A} = A_1 \otimes_K \cdots \otimes_K A_n$ とおく.

定義 3.2 $A = (A_1, \ldots, A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ とする. 各々の $M \in \mathfrak{M}(\hat{A})$ に対して,

$$\mathcal{C}_A^p(M) = \{u \in M \mid [\cdots[[u, A_1]_{p_1}, A_2]_{p_2}, \cdots, A_n]_{p_n} = 0\}$$

とおく. $\mathfrak{M}(\hat{A})$ の任意の射 $f : M \to N$ に対して $f(\mathcal{C}_A^p(M)) \subseteq \mathcal{C}_A^p(N)$ が成り立つことから, 関手 $\mathcal{C}_A^p : \mathfrak{M}(\hat{A}) \to K\text{-Mod}$ が得られる.

定義 3.3 $A = (A_1, \ldots, A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ とする. $\hat{A} \otimes_K \hat{A}$ において $[\cdots[[1 \otimes 1, A_1]_{p_1}, A_2]_{p_2}, \cdots, A_n]_{p_n}$ で生成された両側 $\hat{A}$ 加群を U_A^p とする. $\mathcal{J}_A^p = (\hat{A} \otimes_K \hat{A})/U_A^p$ とおき, $j_A^p = 1 \otimes 1 + U_A^p \in \mathcal{J}_A^p$ とおく.

定理 3.4 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$, $p \in \mathbb{N}^n$ とするとき, 関手 $\mathcal{C}_A^p$ は $(\mathcal{J}_A^p, j_A^p)$ で表現される.

例 3.5 1 変数多項式環の組 $A = (K[X_1], \ldots, K[X_n])$ を考える. $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ とする. 多項式環 $B = K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ の $(X_1 - Y_1)^{p_1} \cdots (X_n - Y_n)^{p_n}$ で生成されたイデアルを I_p とする. $\hat{A} = K[X_1, \ldots, X_n]$ であるから, $\mathfrak{M}(\hat{A})$ を B-Mod と同一視することができる. 任意の $M \in \mathfrak{M}(\hat{A})$ に対して, $\mathcal{C}_A^p(M) = \{u \in M \mid I_p u = 0\}$ が成り立ち, $J_A^p = B/I_p$ である.

定義 3.6 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$, $p \in \mathbb{N}^n$ とする. 任意の $M, N \in \hat{A}$-Mod に対して,

$$\mathcal{D}_A^p(M, N) = \mathcal{C}_A^p(\mathrm{Hom}_K(M, N))$$

とおく. $\mathcal{D}_A^p(M, N)$ の要素を**型 p の左微分演算子**という. これらから関手

$$\mathcal{D}_A^p : (\hat{A}\text{-Mod})^{op} \times (\hat{A}\text{-Mod}) \to K\text{-Mod}$$

が得られる.

$n = 1$ の場合, 型 p の左微分演算子は定義 1.5 の意味の $p - 1$ 次の左微分演算子に相当する.

$n=2$ の特殊な場合として，$A=(R,\, R^{op}) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^2$ を考える．ここで，R^{op} は R の双対代数である．このとき，R の derivation は $\mathcal{D}_A^{(1,1)}(R,R)$ の要素で 1 を 0 に写像するものにほかならない．したがって，一般の $p \in \mathbb{N}^2$ に対する $\mathcal{D}_A^p(R,R)$ の要素を**高次の derivation** と呼びたくなる．しかし，$n=1$ の場合とは異なり，高次の derivation の合成写像が高次の derivation になるわけではないところが難点である．

定理 3.7 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$，$p \in \mathbb{N}^n$ とする．任意の $M,\, N \in \hat{A}\text{-Mod}$ に対して，写像

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\mathcal{J}_A^p \otimes_{\hat{A}} M,\, N) \to \mathcal{D}_A^p(M,N)$$

を $\Phi(\varphi)(u) = \varphi(j_A^p \otimes u)$ によって定義すれば, Φ は同型写像である．

なお，$(\mathcal{J}_A^p,\, j_A^p)$ は右加群に対する右微分演算子をも表現可能である．

4. $(K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ における準分離性

本節でも n は正の整数を表す．定理 2.4 (5) の条件に着目して，準分離代数の概念を $(K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ にまで拡張する．

定義 4.1 $A=(A_1,\,\dots,\,A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ とする．各々の $M \in \mathfrak{M}(\hat{A})$ に対して，

$$\mathcal{C}_A(M) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{A_i}^1(M)$$

とおくことによって，関手 $\mathcal{C}_A : \mathfrak{M}(\hat{A}) \to K\text{-Mod}$ を得る．

定義 4.2 $\boldsymbol{I} = (1,\,\dots,\,1) \in \mathbb{N}^n$ とおく．

定義 4.3 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ とする．$j_A^{\boldsymbol{I}} \in \mathcal{C}_A(\mathcal{J}_A^{\boldsymbol{I}})$ が成り立つとき，A は**準分離的**であるという．

定理 2.2 は次のように一般化される．

定理 4.4 $A=(A_1,\,\dots,\,A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ とする．$A_1,\,\dots,\,A_n$ が分離代数ならば，A は準分離的である．

次のような興味深い事実がある．

定理 4.5 [7, Theorem 17] $A=(R,\, R^{op}) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^2$ とする．ここで，R^{op} は R の双対代数である．このとき，R が分離代数であることと A が準分離的であることとは同値である．

最後に，定理 2.3 (7) の形の結果を与える．

定義 4.6 $A = (A_1, \ldots, A_n) \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ とする. 各 $M, N \in \hat{A}\text{-Mod}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{A_i}(M,N)$$

とおくことによって, 関手 $\mathrm{Hom}_A : (\hat{A}\text{-Mod})^{op} \times (\hat{A}\text{-Mod}) \to K\text{-Mod}$ を得る.

定理 4.7 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ が準分離的ならば, $\mathcal{C}_A^I = \mathcal{C}_A$ が成り立ち, したがって $\mathcal{D}_A^I = \mathrm{Hom}_A$ が成り立つ.

問題 4.8 $A \in (K\text{-}\mathbf{Alg})^n$ とする.

(1) $\mathcal{C}_A^I = \mathcal{C}_A$ ならば A は準分離的か.

(2) $\mathcal{D}_A^I = \mathrm{Hom}_A$ ならば A は準分離的か.

参考文献

[1] A. Hattori: On high order derivations from the view-point of two-sided modules, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **20** (1970), 1–11.

[2] R. G. Heyneman and M. E. Sweedler: Affine Hopf algebras, I, J. Algebra **13** (1969), 192–241.

[3] M. Hongan and H. Komatsu: On the module of differentials of a noncommutative algebras and symmetric biderivations of a semiprime algebra, Comm. Algebra **28** (2000), 669–692.

[4] H. Komatsu: The module of differentials of a noncommutative ring extension, *International Symposium on Ring Theory*, Birkhäuser, 2001, 171–177.

[5] H. Komatsu: Quasi-separable extensions of noncommutative rings, Comm. Algebra **29** (2001), 1011–1019.

[6] H. Komatsu: High order Kähler modules of noncommutative ring extensions, Comm. Algebra **29** (2001), 5499–5524.

[7] H. Komatsu: Diffenrential operators of bimodules, *preprint*.

[8] Y. Nakai: High order derivations I, Osaka J. Math. **7** (1970), 1–27.

[9] H. Osborn: Modules of differentials. I, Math. Ann. **170** (1967), 221-244.

[10] M. E. Sweedler: Right derivations and right differential operators, Pacific J. Math. **86** (1980), 327–360.