数理解析研究所講究録
第1712巻 2010年 117-121

環上の加群の分解

城西大学理学部数学科　石橋 宏行 (Hiroyuki Ishibashi)

Department of Mathematics
Josai University
Sakado, Saitama 350-02, JAPAN
e-mail : hishi@math.josai.ac.jp

概要. S は単位元 1 を含む環、E は S 上の左加群とする。このとき、S の特別な 2 元 a, b の存在が E の分解又は直和分解を引き起こすことを示す。
次に、この結果を用いて、環 R 上の加群 M の分解又は直和分解を導くような M のある種の自己準同型のクラスを呈示する。

1. 準備

まず、定理 A,B,C において決定的な役割を果たす次の補題から始める。

補題. S は単位元 1 を持つ環とし、M は S 上の左加群とする。このとき S の 2 元 a, b が

(i) $abE = baE = 0$,

(ii) $aS + bS = S$

をみたすならば

$$E = E_a + E_b$$

が成り立つ。ただし、S の元 c に対し

$$E_c = \{x \in E | cx = 0\}$$

とする。E_c は E の加法群としての部分群であるが、c が S の中心元であれば、S の作用を受け入れ、E_c は S 上の部分加群となる。特に、a, b が (i),(ii) の他に

(iii) a, b は S の中心元

もみたすならば、

$$E = E_a \oplus E_b, \quad E_a = bE, \quad E_b = aE$$

が成り立つ。

証明. (ii) より S の元 c, d が存在し、$ac + bd = 1$。よって E の任意の元 x に対し

$$(1) \quad acx + bdx = x.$$

ここで、$b(acx) = 0,\ a(bd)x = 0$ より $acx \in E_b,\ bdx \in E_a$ であるから

$$E = E_a + E_b$$

を得る。

特に、a, b が S の中心元ならば $x \in E_a \cap E_b$ に対し、(1) より

$$x = acx + bdx = cax + bdx = 0 + 0 = 0.$$

よって

$$(2) \qquad E = E_a \oplus E_b.$$

更に $a(bE) = 0$ より $bE \subseteq E_a$ は自明。逆に $x \in E_a$ ならば $ax = 0$ であるから (1) より

$$x = acx + bdx = cax + bdx = bdx \in bE,$$

即ち、$E_a \subseteq bE$、よって $E_a = bE$ 。同様に $E_b = aE$ を得る。 (証終)

2. 定理

次の定理は体上のベクトル空間 V の任意の自己準同型 σ が引き起こす V の直和分解で " 自己準同型 σ の表現 " として知られている。

定理 A. k は体、$k[t]$ は k 上の多項式環とし V は k 上の有限次元ベクトル空間とする。また、$\mathrm{End}_k V$ は V の k 上の自己準同型環であり、$\mathrm{End}_k V$ の元 σ のモニック最小多項式 $g(t)$ の素元分解を

$$g(t) = p_1(t)^{e_1} p_2(t)^{e_2} \cdots p_r(t)^{e_r}$$

$e_1, e_2, \cdots, e_r$: 自然数,

$p_1, p_2, \cdots, p_r$: モニック既約多項式

$$i \neq j \text{ ならば } p_i, p_j \text{ は非同伴}$$

とすれば、

$$V = \ker\, p_1^{e_1}(\sigma) \oplus \ker\, p_2^{e_2}(\sigma) \oplus \cdots \oplus \ker\, p_r^{e_r}(\sigma).$$

が成り立つ。

証明. $k[t]$ の V への作用を、$f[t] \in k[t]$ と $x \in V$ に対し $f(t)x = f(\sigma)x$ により定義すれば、V は左 $k[t]-$ 加群となる。そこで、

$$u(t) = p_1(t)^{e_1}, \quad v(t) = p_2(t)^{e_2} \cdots p_r(t)^{e_r}$$

とおけば、

(i) $u(t)v(t) = 0,$

(ii) $u(t)k[t] + v(t)k[t] = k[t]$

(iii) $u(t), v(t)$ は $k[t]$ の中心元

をみたす。故に、補題より

$$V = V_u + V_v = \ker\, p_1(t)^{e_1} \oplus \ker\, p_2(t)^{e_2} \cdots\ p_r(t)^{e_r}$$

以下 r に関する帰納法による。(証終)

群又は半群 G の元 σ は $\sigma^2 = 1$（G の単位元）をみたすとき対合 (involution) と呼ばれる。例えば、有理整数環 $\mathbb{Z}$ における $\{\pm 1\}$, n 次対称群 S_n における互換 (ij)、可換環 R 上の n 次行列環 $\mathrm{GL}_n R$ における対角行列 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $a_i \in \{\pm 1\}$ などはいずれも対合である。次に、環 R 上の加群 M の自己準同型環 $\mathrm{End}_R M$ の元 σ に対し、一般化された対合として $\sigma^{2^n} = 1$ を考えることにより、M の直和分解が引き起こされることを示す。

定理 B. R は単位元 1 と単元 2 を持つ環、M は R 上の加群とし、$\mathrm{End}_R M$ は M の R 上の自己準同型環とする。このとき、$\mathrm{End}_R M$ の元 σ が自然数 n に対し

$$\sigma^{2^n} = 1$$

をみたせば、M は直和分解

$$M = M_\sigma \oplus M_{-\sigma} \oplus M_{-\sigma^2} \oplus \cdots \oplus M_{-\sigma^{2^{n-1}}},$$

を持つ。ただし、$\mathrm{End}_R M$ の元 τ に対して

$$M_\tau = \{x \in M | \tau x = \tau\}$$

とする。

証明. 前定理の証明と同様に $R[t]$ の M への作用を $f(t)x = f(\sigma)x$ により定義し、

$$u(t) = t^{2^{n-1}} - 1, \quad v(t) = t^{2^{n-1}} + 1$$

とおけば、

(i) $u(t)v(t)M = 0$,

(ii) $u(t)R[t] + v(t)R[t] = R[t]$

(iii) $u(t), v(t)$ は $R[t]$ の中心元

をみたす。故に、補題より

$$\begin{aligned} M &= M_u \oplus M_v \\ &= M_{\sigma^{2^{n-1}}} \oplus M_{-\sigma^{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

以下、n に関する帰納法による。（証終）

群又は半群 G の元 σ は $\sigma^2 = \sigma$ をみたすとき巾等元と呼ばれる。今、$\mathrm{End}_R M$ の元 σ に対し、巾等元の一般化として、$\sigma^2 = \varepsilon\sigma$（$\varepsilon$ は R の中心単元）を考えることにより次の定理を得る。

定理 C. R, M, $\mathrm{End}_R M$ は定理 B と同じとするとき、$\mathrm{End}_R M$ の元 σ が

$$\sigma^2 = \varepsilon\sigma \qquad (\varepsilon \text{ は } R \text{ の中心元})$$

をみたすならば、

(a) $\ker\sigma = \mathrm{Im}\,(\sigma - \varepsilon 1_M)$, $\mathrm{Im}\,\sigma = \ker\,(\sigma - \varepsilon 1_M)$,

(b) $M = \ker\sigma \oplus \mathrm{Im}\,\sigma$,

ここで、1_M は M の恒等写像。

証明. 前定理と同様、$R[t]$ の M への作用を M の元 x と $R[t]$ の元 $f(t)$ に対し、$f(t)x = f(\sigma)x$ により定義し、

$$u(t) = t, \quad v(t) = t - \varepsilon$$

とおけば、

(i) $u(t)v(t)M = 0$,

(ii) $u(t)R[t] + v(t)R[t] = R[t]$

(iii) $u(t), v(t)$ は $R[t]$ の中心元

をみたす。従って、補題より

$$\begin{aligned} M &= M_u \oplus M_v \\ &= \ker \sigma \oplus \ker (\sigma - \varepsilon 1_M). \end{aligned}$$

を得る。更に、包含関係を考えることにより

$\ker \sigma = \mathrm{Im}\ (\sigma - \varepsilon 1_M), \quad \mathrm{Im}\ \sigma = \ker (\sigma - \varepsilon 1_M)$

も示される。従って、

$M = \ker \sigma \oplus \mathrm{Im}\ \sigma,$

を得る。(証終)