

Topology on commutative residuated lattices

東京電機大学・情報環境学部 近藤 通朗 (Michiro KONDO)
School of Information Environment
Tokyo Denki University

概要

ここでは, commutative residuated lattices 上の位相空間についての性質を考察することで, 「 \odot が連続であることと \rightarrow が連続であることが同値であるか?」という問題 ([1]) に否定的な解を与える.

1 Data-mining におけるラフ集合

$X \neq \emptyset$, R を X 上の 2 項関係とすると, $\mathcal{P}(X)$ 上の作用素 $R_+, R_- : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を次のように定義する: $A \subseteq X$ に対して,

$$R_+(A) = \{x \in X \mid \exists y (xRy \cap A \neq \emptyset)\}$$
$$R_-(A) = \{x \in X \mid \forall y (xRy \rightarrow y \in A)\}$$

特に R が同値関係であるとき, $(R_-(A), R_+(A))$ は A のラフ集合とよばれる. 任意の 2 項関係 R に対して, 次の命題が成り立つ.

命題 1. 任意の $A, B \subseteq X$ に対して,

- (1) $R_-(A) \subseteq A$
- (2) $A \subseteq B \implies R_-(A) \subseteq R_-(B)$
- (3) $R_-(A \cap B) = R_-(A) \cap R_-(B)$

これらの作用素と様相論理における必然性演算子, 可能性演算子の類推から, (R が同値関係である) ラフ集合に自然に位相を入れることができる. このとき次のような問題が考えられた:

- 問 1. 関係がどのような場合に位相空間となるか?
- 問 2. もとになる代数をブール代数以外で考察した場合, 代数 (あるいは位相空間) としてどのような性質を持つか?

問 1 については, X の部分集合族 $\mathcal{O}_R = \{A \subseteq X \mid R_-(A) = A\}$ について,

命題 2. R が反射的ならば, \mathcal{O}_R は X 上の位相であり, 次の性質 (IP) を満たす:

$$(IP) \quad A_\lambda \in \mathcal{O}_R (\lambda \in \Lambda) \text{ ならば } \bigcap_\lambda A_\lambda \in \mathcal{O}_R$$

逆に (X, \mathcal{O}) が (IP) をみたす位相空間ならば, 次の式をみたす反射的な関係 R が存在する:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_R = \{A \subseteq X \mid R_-(A) = A\}$$

以下, 問2について考察していく. 代数へ位相を入れることは, 代数における開集合を定義すること, すなわち, ある性質を持つ部分集合を定義することに他ならない. この方法によって, A.Weilらによる同値関係を用いた位相 (*uniform topology*) が研究されてきた. これを用いて (bounded integral) Commutative residuated lattice 上に位相を入れた空間の性質を調べ, [1]にある問題の一般的な解決を図る.

代数構造 $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ が次の条件を満たすとき, (bounded integral) Commutative residuated lattice といわれる (今後簡単のため, CRL と表すことにする):

- (1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ は有界な束;
- (2) $(L, \odot, 1)$ は可換な monoid;
- (3) 任意の $x, y, z \in L$ に対して, $x \odot y \leq z \iff x \leq y \rightarrow z$

CRL 上へ同値関係を用いた位相を入れる. \mathcal{K}^* を *intersection* に関して閉じた X 上の同値関係の集合とし, \mathcal{K} を次のように定義する:

$$\mathcal{K} = \{\varphi \subseteq X \times X \mid \theta \subseteq \varphi, \theta \in \mathcal{K}^*\}$$

定理 1. \mathcal{K}^* において, 次のことが成り立つ:

- (U1) $\varphi \in \mathcal{K}^* \implies \omega \subseteq \varphi$
- (U2) $\varphi \in \mathcal{K}^* \implies \varphi^{-1} \in \mathcal{K}^*$
- (U3) $\varphi \in \mathcal{K}^* \implies \exists \psi \in \mathcal{K}^*; \psi \circ \psi \subseteq \varphi$
- (U4) $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^* \implies \varphi \cap \psi \in \mathcal{K}^*$

$\mathcal{K} = \{\varphi \subseteq X \times X \mid \exists \theta \in \mathcal{K}^*; \theta \subseteq \varphi\}$ とおけば, \mathcal{K} は *uniformity*, すなわち, 次の性質を持つことがわかる.

- 命題 3.**
- (U1) $\varphi \in \mathcal{K} \implies \omega \subseteq \varphi$
 - (U2) $\varphi \in \mathcal{K} \implies \varphi^{-1} \in \mathcal{K}$
 - (U3) $\varphi \in \mathcal{K} \implies \exists \psi \in \mathcal{K}; \psi \circ \psi \subseteq \varphi$
 - (U4) $\varphi, \psi \in \mathcal{K} \implies \varphi \cap \psi \in \mathcal{K}$
 - (U5) $\varphi \in \mathcal{K}, \varphi \subseteq \psi \implies \psi \in \mathcal{K}$

uniformity の一般論から次のようにして X に位相を導入することができる:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{K}} = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists \varphi \in \mathcal{K}; \varphi[x] \subseteq O\}, \quad \varphi[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in \varphi\}$$

命題 4. $\mathcal{O}_{\mathcal{K}} = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O, \exists \theta \in \mathcal{K}^*; \theta[x] = x/\theta \subseteq O\}$

したがって, X において

$$O \text{ が開集合} \iff O \text{ が同値類の和集合}$$

とくに, $\mathcal{K}^* = \{\theta\}$ としたときが上述のラフ集合の場合である.

命題 5. $\omega \in \mathcal{K}^* \iff \mathcal{O}_{\mathcal{K}} : \textit{discrete topology}$

2 連続な位相

ここでは、CRL代数の演算が連続となる位相について考察する。 $X = (X, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ をCRL, τ を X 上の位相とする。 τ に関して演算 \odot, \rightarrow が連続であるとき, (X, τ) は *topological CRL* であるとよばれる。 すなわち, $A, B \subseteq X$ に対して,

$$A \odot B = \{x \odot y \mid x \in A, y \in B\}, \quad A \rightarrow B = \{x \rightarrow y \mid x \in A, y \in B\}$$

とおくと, 任意の $O \in \tau$, $a, b \in X$ に対して,

- (1) $a \odot b \in O \implies \exists O_a, O_b \in \tau; a \in O_a, b \in O_b \text{ and } O_a \odot O_b \subseteq O$
- (2) $a \rightarrow b \in O \implies \exists O_a, O_b \in \tau; a \in O_a, b \in O_b \text{ and } O_a \rightarrow O_b \subseteq O$

intersection に関して閉じている congruence の集合を \mathcal{K}^* とすると

定理 2. $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ は *topological CRL* である。

これに関して, [1] に次の問題が残されている:

問題 : \odot が連続 $\iff \rightarrow$ が連続 ?

これには, 以下に示すように反例を与えることができ, 上述のことは一般に成り立たない。 $X = \{0, a, 1\}$, $0 < a < 1$ において, 演算を次のように定義する: $x, y \in X$ について,

$$\begin{aligned} x \wedge y &= x \odot y = \min\{x, y\} \\ x \vee y &= \max\{x, y\} \\ x \rightarrow y &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ y & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

このとき, 明らかに, $\tau = \{\emptyset, X, \{a, 1\}\}$ は X 上の位相となり, しかも \odot に関しては連続であるが, \rightarrow に関しては連続ではない。 なぜなら, $0 \rightarrow 0 = 1 \in \{a, 1\}$ ではあるが, $X \rightarrow X = X \not\subseteq \{a, 1\}$ となるためである。

3 Filters

X をCRL とするとき, $F(\subseteq X)$ が次の条件をみたすとき, *filter* と定義される:

- (F1) $1 \in F$
- (F2) $x, y \in F$ ならば $x \odot y \in F$
- (F3) $x \in F$ かつ $x \leq y$ ならば $y \in F$

X の filter 全体の集合を $Fil(X)$, congruence 全体の集合を $Con(X)$ とするとき, 次の結果は容易に示すことができる。

定理 3. $Fil(X) \cong Con(X)$

いま, \mathcal{K}^* を intersection に関して閉じた congruence の集合とすると,

定理 4. 任意の $\theta \in \mathcal{K}^*$, $x \in X$ に対して, $x/\theta = \theta[x]$ は clopen set である.

簡単のため, $\mathcal{K}^* = \{\theta\}$ のとき, $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ を \mathcal{O}_{θ} と表す.

命題 6. $\theta, \varphi \in \text{Con}(X)$ とするとき, $\theta \subseteq \varphi \iff \mathcal{O}_{\theta} \subseteq \mathcal{O}_{\varphi}$

位相空間 $(X, \mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ が条件

$$\forall \varphi \in \mathcal{K} \exists x_i \in X; X = \bigcup_i \varphi[x_i]$$

をみたすとき, *totally bounded* であるとよばれる. このとき,

定理 5. $(X, \mathcal{O}_{\theta})$ が compact $\iff (X, \mathcal{O}_{\theta})$ が *totally bounded*

参考文献

- [1] S.Ghorbani and A.Hasankhani, *Implicative topology on residuated lattices*, preprint.
- [2] M.Haveshki, E.Eslami and A.B.Saeido, *A topology induced by uniformity on BL-algebras*, Math. Log. Quart., vol.53 (2007), 162-169.
- [3] I.M.James, *Introduction to uniform spaces*, Cambridge University Press, New York, 1990.
- [4] A.B.Saeido, *Uniform topology on differential algebras*, Bull. Korean Math. Soc., vol.42 (2005), 379-386.

Michiro Kondo
 School of Information Environment,
 Tokyo Denki University,
 Inzai, 270-1382, Japan.
 E-mail: kondo@sie.dendai.ac.jp